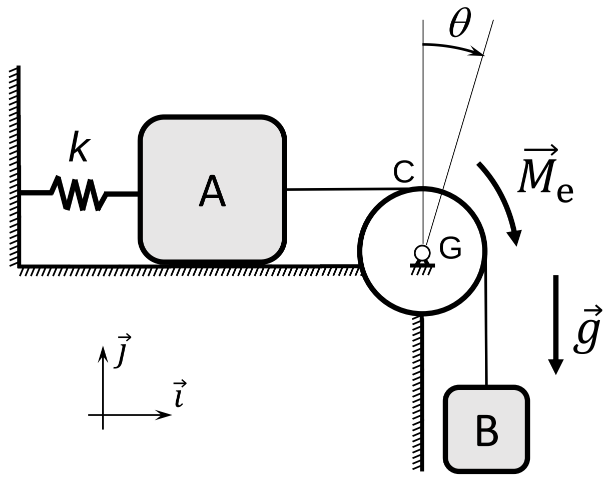
PME 3100 – MECÂNICA I – 2024 – Prova Substitutiva – 03 de Dezembro de 2024

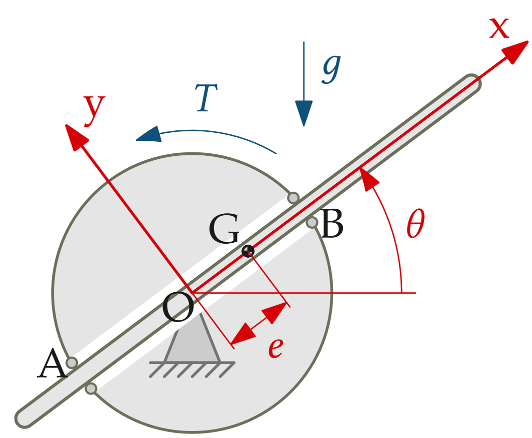
Instruções gerais e formulário estão disponíveis no caderno de respostas.

Questão 1 (3,0 pontos). O sistema indicado na figura é composto por uma polia homogênea de massa m e raio R, um bloco A de massa $2m$ em contato com um plano horizontal com coeficiente de atrito μ, um bloco B de massa m, e uma mola ideal de constante elástica k, inicialmente não deformada e conectada ao bloco A. O sistema é configurado com $\theta = 0$ no instante inicial e parte do repouso no mesmo instante em que se aplica um momento externo constante $\vec{\mathrm{M}}_\mathrm{e} = -M_\mathrm{e}\vec{\mathrm{k}}$ à polia. Considere que os esforços aplicados no instante inicial são suficientes para colocar o sistema em movimento. Pede-se, em função de θ e dos demais parâmetros fornecidos:

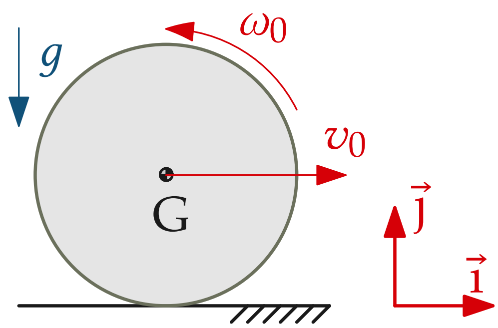


- **a)** O trabalho do peso.
- **b)** O trabalho da força de atrito que atua no bloco A.
- **c)** O trabalho da força elástica.
- **d)** O trabalho do momento externo $\vec{\mathrm{M}}_\mathrm{e}$.
- **e)** O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ do disco.

Questão 2 (3,5 pontos). O sistema mostrado na figura consiste em um disco de centro O, raio R e massa M, articulado em O e sujeito a um torque constante $\vec{\mathrm{T}} = T\vec{\mathrm{k}}$. O disco possui uma ranhura AB ao longo da qual uma barra delgada e homogênea de comprimento $2L$ e massa m pode deslizar, *sem atrito*, apoiando-se apenas nas extremidades A e B. Os momentos de inércia do disco e da barra são $J_{\mathrm{O}z}$ e $J_{\mathrm{G}z}$, respectivamente, e considera-se $\overline{\mathrm{AB}} \approx 2R$. O sistema disco+barra parte do repouso, com o centro de massa G da barra localizado a uma distância e do centro do disco. Admitindo que o sistema de coordenadas Oxy é solidário ao disco, pede-se, para o instante *imediatamente* após o início do movimento:



- **a)** Os diagramas de corpo livre do disco e da barra.
- **b)** A aceleração *absoluta* $\vec{\mathrm{a}}_\mathrm{G}$ do centro de massa da *barra* em função da aceleração angular $\vec{\alpha} = \alpha\vec{\mathrm{k}}$ do disco e da posição e e aceleração relativa $\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{G,rel}} = \ddot{e}\,\vec{\imath}$ do centro de massa da barra. (Use composição de movimentos).
- **c)** As equações obtidas ao aplicar o Teorema da Resultante ao disco e à barra.
- **d)** As equações obtidas ao aplicar o Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao disco e à barra.
- **e)** Organize e enumere todas as equações obtidas e liste as incógnitas, mostrando que o sistema assim obtido pode ser resolvido para se determinar a aceleração angular α do disco e a aceleração relativa $\ddot{e}$ do centro de massa da barra, assim como as reações em O, em A e em B. (**Não é necessário resolver o sistema!**).



Questão 3 (3,5 pontos). A figura ao lado representa um cilindro rígido e homogêneo de raio R e massa m, lançado sobre uma mesa plana e horizontal no instante inicial $t_0 = 0$. *No momento do lançamento*, o cilindro possui uma velocidade angular $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{k}$ e seu centro de massa apresenta uma velocidade $\vec{v}_{G,0} = v_0\vec{\imath}$. Observa-se que o cilindro inicialmente rola escorregando, mas, após um certo tempo, passa a rolar sem escorregar para a esquerda ou para a direita, dependendo dos valores de ω_0 e v_0. O coeficiente de atrito entre o cilindro e a mesa é μ. Com base nas condições descritas, pede-se:

a) Desenhe o diagrama de corpo livre do cilindro enquanto ocorre rolamento com escorregamento.

b) Mostre que a aceleração do centro de massa é $\vec{a}_G = -\mu g\vec{\imath}$ e que a aceleração angular do cilindro é $\vec{\alpha} = \dfrac{-2\mu g}{R}\vec{k}$, enquanto persiste o escorregamento. **Justifique sua resposta utilizando os Teoremas da Dinâmica!**

c) A partir das expressões da aceleração angular $\vec{\alpha}$ e da aceleração do centro de massa $\vec{a}_G$, determine as expressões para a velocidade angular $\vec{\omega}(t)$ e a velocidade do centro de massa $\vec{v}_G(t)$ para qualquer instante de tempo enquanto ocorre o escorregamento.

d) Considere t_f como o instante de tempo em que o cilindro para de escorregar. Calcule, em função de t_f e dos parâmetros fornecidos, o trabalho realizado pela força de atrito enquanto o cilindro escorrega.

e) Determine a relação entre v_0 e ω_0 necessária para que, a partir do instante t_f, o sentido da velocidade do centro de massa do cilindro seja para a esquerda.

f) Obtenha o tempo t_f necessário para que o cilindro comece a rolar sem escorregar, em função dos parâmetros fornecidos.

RESOLUÇÃO

Questão 1:

a) Trabalho do peso com $\Delta y_B = -R\theta$:

$$\boxed{W_B = -mg\Delta y_B = mgR\theta} \quad (0,5)$$

b) Trabalho da força de atrito que atua no bloco A com $F_{at} = \mu N_A = 2\mu mg$ e $\Delta x = R\theta$:

$$\boxed{W_A = -F_{at}\Delta x = -2\mu mgR\theta} \quad (0,5)$$

c) Trabalho da força elástica com $x_{\text{Inicial}} = 0$ e $x_{\text{Final}} = R\theta$:

$$\boxed{W_m = -\frac{1}{2}k\left(x_{\text{Final}} - x_{\text{Inicial}}\right)^2 = -\frac{1}{2}kR^2\theta^2} \quad (0,5)$$

d) Trabalho do momento externo com $\theta_{\text{Inicial}} = 0$:

$$\boxed{W_{\text{Momento}} = M_e\Delta\theta = M_e\theta} \quad (0,5)$$

e) O deslocamento do bloco A é igual ao deslocamento do bloco B, que, por sua vez, corresponde ao deslocamento do fio. Este, em função de θ, pode ser expresso como:

$$x = x_A = x_B = R\theta$$

A energia cinética do conjunto é calculada como: $T_{\text{Conjunto}} = T_A + T_B + T_{\text{Polia}}$, em que:

$$T_A = \frac{1}{2}2m|\vec{v}_A|^2 = m\dot{x}_A^2 = mR^2\dot{\theta}^2 \quad (0,25), \qquad T_B = \frac{1}{2}m|\vec{v}_B|^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_B^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (0,25)$$

$$T_{\text{Polia}} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_O|^2 + \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge m(G - O) + \frac{1}{2}J_{Oz}|\vec{\omega}|^2$$

Selecionando-se o polo $O \equiv G$ e sabendo que $\vec{v}_G = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$, tem-se:

$$T_{\text{Polia}} = \frac{1}{2}J_{Gz}\dot{\theta}^2 \ \text{ com } \ J_{Gz} = \frac{mR^2}{2} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{Polia}} = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (0,5)$$

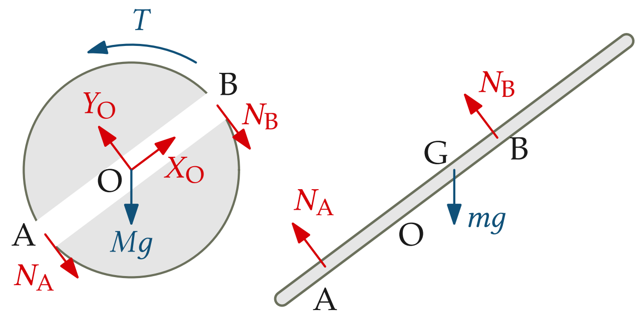
Assim, a energia cinética do conjunto fica expressa por:

$$T_{\text{Conjunto}} = mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{7}{4}mR^2\dot{\theta}^2}$$

Aplicando o TEC como: $T_2 - T_1 = W_B + W_A + W_m + W_{\text{Momento}}$, onde $T_1 = 0$ e $T_2 = T_{\text{Conjunto}}$, e resolvendo para $\dot{\theta}$, obtém-se:

$$\frac{7}{4}mR^2\dot{\theta}^2 = mgR\theta - 2\mu mgR\theta - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + M_e\theta \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k} = -\sqrt{\frac{4\left(mgR\theta - 2\mu mgR\theta - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + M_e\theta\right)}{7mR^2}}\,\vec{k}}$$

Questão 2:



a) O DCL correto é apresentado ao lado. (0,5 por DCL)

b) Uma vez que a barra está inserida na ranhura AB do disco, tem-se que $\alpha_{\text{disco}} = \alpha_{\text{barra}} = \alpha$.

Além disso, a aceleração absoluta do centro de massa da barra é dada por:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_{G,rel} + \vec{a}_{G,arr} + \vec{a}_{G,Cor}$$

Como o instante considerado é o início do movimento, a partir do repouso, então $\omega = 0$, que resulta em:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{G,rel} &= \ddot{e}\,\vec{\imath} \\
\vec{a}_{G,arr} &= \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = \vec{0} + \alpha\vec{k} \wedge e\vec{\imath} + \vec{0} = \alpha e\,\vec{\jmath} \\
\vec{a}_{G,Cor} &= 2\,\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{G,rel} = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{e}\vec{\imath} = \vec{0}
\end{aligned}$$

Portanto, a aceleração absoluta do centro de massa da barra é: $\boxed{\vec{a}_G = \ddot{e}\,\vec{\imath} + \alpha e\,\vec{\jmath}}$ (1,0)

c) Aplicando-se o TR ao disco, tem-se:

$$(X_O - Mg\sin\theta)\vec{\imath} + (Y_O - N_A - N_B - Mg\cos\theta)\vec{\jmath} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{\imath}: X_O - Mg\sin\theta = 0 \\ \vec{\jmath}: Y_O - N_A - N_B - Mg\cos\theta = 0 \end{array}} \quad (0,25)$$

Aplicando-se o TR à barra, tem-se:

$$(-mg\sin\theta)\vec{\imath} + (-mg\cos\theta + N_A + N_B)\vec{\jmath} = m\left(\ddot{e}\,\vec{\imath} + \alpha e\,\vec{\jmath}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{\imath}: -mg\sin\theta = m\ddot{e} \\ \vec{\jmath}: -mg\cos\theta + N_A + N_B = m\alpha e \end{array}} \quad (0,25)$$

d) Aplicando-se TQMA ao disco com respeito ao polo O (movimento no plano xy), tem-se:

$$\boxed{J_{Oz}\alpha = T + (N_A - N_B)\,R} \quad (0,25)$$

Aplicando-se TQMA à barra com respeito ao polo G (movimento no plano xy), tem-se:

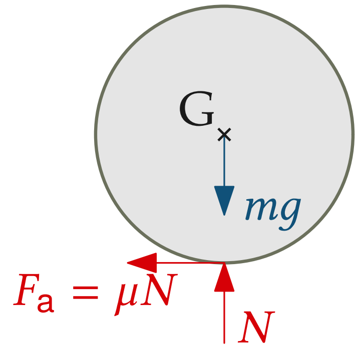
$$\boxed{J_{Gz}\alpha = (R - e)N_B - (R + e)N_A} \quad (0,25)$$

e) No instante da partida, os teoremas da dinâmica e as equações da cinemática fornecem o seguinte sistema de equações (com $\alpha_{\text{disco}} = \alpha_{\text{barra}} = \alpha$):

$$\boxed{\begin{array}{rr} X_O - Mg\sin\theta = 0 & Y_O - N_A - N_B - Mg\cos\theta = 0 \\ -g\sin\theta = \ddot{e} & -\,mg\cos\theta + N_A + N_B = m\alpha e \\ J_{Oz}\alpha = T + (N_A - N_B)\,R & J_{Gz}\alpha = (R - e)N_B - (R + e)N_A \end{array}} \quad (0,5)$$

o qual, devidamente resolvido, determina as incógnitas do problema, ou seja: $H_O, V_O, N_A, N_B, \alpha$ e $\ddot{e}$.

Questão 3:



a) O DCL correto é apresentado ao lado. (0,5)

b) Como o movimento de G é paralelo ao plano, a aceleração do mesmo na direção vertical é nula e o TR fornece:

$$N = mg$$

Assim, na condição de escorregamento $F_{at} = \mu N = \mu mg$ e concluindo o TR temos:

$$m\vec{a}_G = -\mu mg\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G = -\mu g\vec{i}$$

Por fim, aplicando o TQMA utilizando o polo G:

$$\frac{mR^2}{2}\vec{\alpha} = -R\mu mg\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{-2\mu g}{R}\vec{k}} \quad (0,8)$$

c) Em ambos os casos temos um problema de velocidade inicial dada com uma aceleração constante, de forma que:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\omega}(t) &= \left(\omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t\right)\vec{k} \\ \vec{v}_G(t) &= (v_0 - \mu g t)\,\vec{i} \end{aligned}} \quad (0,6)$$

d) A velocidade ao final do escorregamento de G é $\vec{v}_G = (v_0 - \mu g t_f)\vec{i}$, enquanto que a velocidade angular é $\vec{\omega} = \left(\omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t_f\right)\vec{k}$, de forma que a variação da energia cinética fica:

$$\Delta T = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \left(\mu g t_f\right)^2 - 2\mu g v_0 t_f\right) + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\omega_0^2 + 4\left(\frac{\mu g t_f}{R}\right)^2 - \frac{4\mu g \omega_0 t_f}{R}\right) - \frac{mv_0^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\omega_0^2 =$$

$$= \frac{3m}{2}\left(\mu g t_f\right)^2 - \mu m g v_0 t_f - \mu m g \omega_0 R t_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = \frac{3m}{2}\left(\mu g t_f\right)^2 - \mu m g t_f\left(v_0 + \omega_0 R\right)} \quad (1,0)$$

Como o atrito é a única força que realiza trabalho no problema, o valor encontrado é o próprio valor do trabalho da força de atrito de acordo com o TEC.

e) Para que o ponto G tenha velocidade para esquerda ao fim do lançamento, devemos ter:

$$\left(v_0 - \mu g t_f\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 < \mu g t_f} \quad (0,2)$$

f) Para que o cilindro role sem escorregar, a velocidade do ponto de contato deve ser nula, de forma que:

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \left(R\vec{j}\right) \Rightarrow \left(v_0 - \mu g t_f\right)\vec{i} = \left(\omega_0 - \frac{2\mu g}{R}t_f\right)\vec{k} \wedge \left(R\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_f = \frac{v_0 + \omega_0 R}{3\mu g}} \quad (0,4)$$