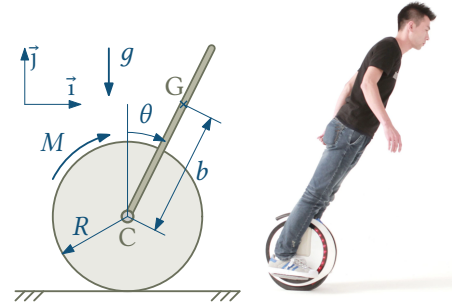




PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 19 de Dezembro de 2023

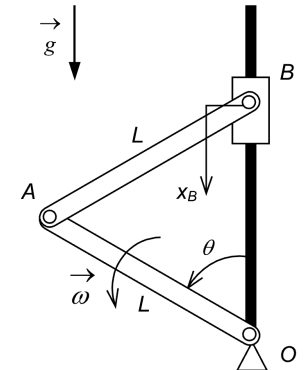
- Esta avaliação tem duração de 120 minutos e é composta por 3 questões.
- Não é permitido utilização de quaisquer dispositivos eletrônicos, tampouco consulta a qualquer material externo.
- As questões podem ser resolvidas a lápis, na ordem escolhida pelo aluno (que deve indicar claramente onde iniciou cada questão).

Questão 1 (3,5 pontos). Para melhor compreender a dinâmica de um monociclo motorizado, um estudante propôs o modelo físico ilustrado na figura ao lado. A roda é representada como um disco rígido de massa m , raio R e momento de inércia central $J_{Cz} = k_1 m R^2$, que rola sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal com velocidade angular $\vec{\omega} = -\omega \vec{k}$ e aceleração angular $\vec{\alpha} = -\alpha \vec{k}$. Sobre esta roda é aplicado um momento $\vec{M} = -M \vec{k}$. A pessoa que guia o monociclo, por sua vez, é representada como uma barra rígida, de massa $m' = k_2 m$ e centro de massa G , idealmente articulada ao centro C do disco. Deseja-se modelar um cenário em que seja possível *manter constante* o ângulo θ que o segmento CG forma com a vertical. Nestas condições, pede-se:



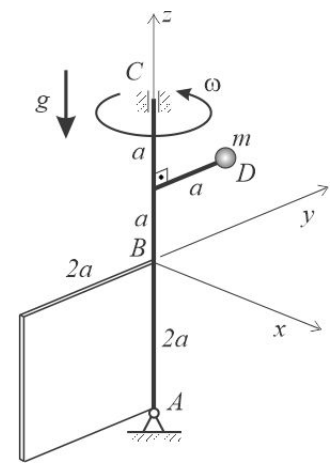
- (0,5) os diagramas de corpo livre (DCLs) do disco e da barra;
- (0,5) as expressões das acelerações dos centros de massa C e G em função dos dados do problema;
- (1,5) listar e enumerar as equações obtidas pela aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular ao disco e à barra;
- (0,5) o valor do momento M compatível com o movimento modelado em função de m, g, R, k_1, k_2 e θ ;
- (0,5) o menor valor do coeficiente de atrito estático μ compatível com a condição de rolamento sem escorregamento.

Questão 2 (3,0 pontos) A figura ao lado ilustra um sistema composto por um bloco e duas barras. O bloco B de massa m desliza na vertical, guiado pelo eixo fixo OB . A barra OA , que gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \theta \vec{k}$ ao redor de O , está articulada em A à barra AB . As barras OA e AB possuem massa m e comprimento L . Considere que na posição inicial, quando θ da barra OA é *aproximadamente zero*, o sistema encontra-se em repouso. Pede-se:



- (0,5) determinar a posição e velocidade do bloco B em função de θ ;
- (1,0) determinar a energia cinética do sistema em função de θ ;
- (1,0) determinar o trabalho das forças externas ao sistema em função de θ ;
- (0,5) determinar a velocidade do bloco B em função de θ .

Questão 3 (3,5 pontos). Na figura, no eixo vertical ABC há uma articulação em A e um anel em C . Soldadas nesse eixo, há uma placa homogênea, de massa m e lado $2a$, e uma barra, de comprimento a com uma massa m fixa em D , conforme mostrado na figura. O conjunto eixo, placa e barra está no plano Byz e o sistema de coordenadas (B, x, y, z) gira solidariamente ao conjunto com rotação ω constante dada. O eixo e a barra têm massas desprezíveis. Pede-se:



- (0,5) faça o diagrama de corpo livre (DCL) do conjunto;
- (1,0) obtenha a expressão da quantidade de movimento angular do conjunto, em relação ao polo B , em função da sua rotação ω ;
- (0,5) obtenha os momentos e produtos de inércia do conjunto, envolvidos na expressão do item (b);
- (1,5) obtenha as reações em A e C , em função de ω .

Formulário da prova: momentos de inércia de sólidos homogêneos

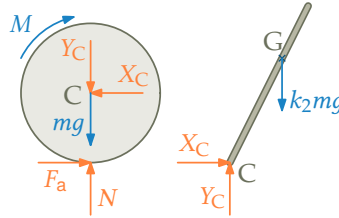
<p>Barra homogênea (massa m, comprimento ℓ):</p> <p>$J_{Gy} = J_{Gz} = \frac{1}{12} m \ell^2$</p>	<p>Placa retangular homogênea (massa m, lados a, b):</p> <p>$J_{Gx} = \frac{1}{12} m b^2 \quad J_{Gz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$</p>
---	--



Questão 1 (3,5 pontos)

Resolução:

- (a) Os diagramas de corpo livre são indicados na figura abaixo (0,5).



- (b) O disco rola sem escorregar, assim, seu centro C descreve um movimento retilíneo com velocidade $\vec{v}_C = \omega R \vec{i}$ e aceleração $\vec{a}_C = \alpha R \vec{i}$. A barra, por sua vez, descreve um movimento de translação retilínea, de tal forma que:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = \alpha R \vec{i} \quad (0,5)$$

- (c) Aplicando os teoremas, obtêm-se as equações (1) a (3) para o disco e as equações (4) a (6) para a barra (1,5):

$$ma_{Cx} = R_x^{\text{disco}} : \quad mR\alpha = F_a - X_C \quad (1)$$

$$ma_{Cy} = R_y^{\text{disco}} : \quad 0 = N - mg - Y_C \quad (2)$$

$$J_{Cz}\alpha_z^{\text{disco}} = M_{Cz}^{\text{disco}} : \quad -k_1mR^2\alpha = -M + RF_a \quad (3)$$

$$ma_{Gx} = R_x^{\text{barra}} : \quad k_2mR\alpha = X_C \quad (4)$$

$$ma_{Gy} = R_y^{\text{barra}} : \quad 0 = Y_C - k_2mg \quad (5)$$

$$J_{Gz}\alpha_z^{\text{barra}} = M_{Gz}^{\text{barra}} : \quad 0 = bX_C \cos \theta - bY_C \sin \theta \quad (6)$$

Observação: a equação (3) corresponde ao TQMA aplicado ao disco para o polo C; a equação (6) corresponde ao TQMA aplicado à barra para o polo G.

- (d) Resolvendo o sistema de equações obtido no item anterior, obtemos:

$$(4), (5) \rightarrow (6) : \quad 0 = b(k_2mR\alpha) \cos \theta - b(k_2mg) \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{g}{R} \tan \theta \quad (7)$$

$$(7), (4) \rightarrow (1) : \quad mg \tan \theta = F_a - k_2mg \tan \theta \quad \Rightarrow \quad F_a = (k_2 + 1)mg \tan \theta \quad (8)$$

$$(5) \rightarrow (2) : \quad 0 = N - mg - k_2mg \quad \Rightarrow \quad N = (k_2 + 1)mg \quad (9)$$

$$(7), (8) \rightarrow (3) : \quad -k_1mRg \tan \theta = -M + R(k_2 + 1)mg \tan \theta \quad \Rightarrow \quad M = (k_1 + k_2 + 1)mgR \tan \theta \quad (0,5)$$

- (e) Utilizando as equações (8) e (9), obtemos:

$$\mu \geq \frac{|F_a|}{N} = \tan \theta \quad (0,5)$$



Questão 2 (3,0 pontos)

Resolução:

- (a) Determinar a posição e velocidade do bloco B em função de θ : **(0,5)**

$$(B - O) = 2L \cos \theta \vec{j} \Rightarrow \boxed{x_B = 2L(1 - \cos \theta)} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = -\dot{x}_B \vec{j} = -(2L \sin \theta \dot{\theta}) \vec{j} = -(2\omega L \sin \theta) \vec{j}} \quad (1)$$

- (b) Determinar a energia cinética do sistema em função de θ : **(1,0)**

- Bloco B: $T_B = \frac{m}{2} |\vec{v}_B|^2 = (2mL^2 \sin^2 \theta) \omega^2 \quad (2)$

- Barra OA (polo em O): $T_{OA} = \frac{J_{OZ}}{2} \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{3} \right) \omega^2 = \left(\frac{mL^2}{6} \right) \omega^2 \quad (3)$

- Barra AB (polo em G_{AB}): $T_{AB} = \frac{m}{2} |\vec{v}_{G_{AB}}|^2 + \frac{J_{GZ}}{2} \omega_{AB}^2 \quad (4)$

Aplicando a expressão do campo de velocidades para o cálculo de \vec{v}_A nas duas barras, tem-se:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{OA} \wedge (A - O) = \omega \vec{k} \wedge (-L \sin \theta \vec{i} + L \cos \theta \vec{j}) = -\omega L (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \quad (5)$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge (A - B) = -(2\omega L \sin \theta) \vec{j} + \omega_{AB} \vec{k} \wedge (-L \sin \theta \vec{i} - L \cos \theta \vec{j}) = \omega_{AB} L \cos \theta \vec{i} - L \sin \theta (2\omega + \omega_{AB}) \vec{j} \quad (6)$$

Igualando as expressões (5) e (6), tem-se que $\vec{\omega}_{AB} = -\omega \vec{k}$. Dessa forma, $\vec{v}_{G_{AB}}$ pode ser calculado aplicando-se novamente a expressão do campo de velocidades a barra AB:

$$\vec{v}_{G_{AB}} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G_{AB} - B) = -(2\omega L \sin \theta) \vec{j} - \omega \vec{k} \wedge \frac{L}{2} (\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) = -\frac{\omega L}{2} (\cos \theta \vec{i} + 3 \sin \theta \vec{j}) \quad (7)$$

Substituindo (7) e (4), obtém-se a expressão da energia cinética da barra AB:

$$T_{AB} = \frac{mL^2}{6} (1 + 6 \sin^2 \theta) \omega^2 \quad (8)$$

A energia cinética total do sistema é calculada por meio da soma das expressões (2), (3) e (8):

$$\boxed{T = \frac{mL^2}{3} (1 + 9 \sin^2 \theta) \omega^2} \quad (9)$$

- (c) Determinar o trabalho das forças externas ao sistema em função de θ : **(1,0)**

- Trabalho da força peso do bloco B: $W_B = -\Delta U_{G_B} = 2mgL(1 - \cos \theta) \quad (10)$

- Trabalho da força peso da barra OA: $W_{OA} = -\Delta U_{G_{OA}} = \frac{mgL}{2} (1 - \cos \theta) \quad (11)$

- Trabalho da força peso da barra AB: $W_{AB} = -\Delta U_{G_{AB}} = \frac{3mgL}{2} (1 - \cos \theta) \quad (12)$

O trabalho total das forças externas ao sistema é calculado por meio da soma das expressões (10-12):

$$\boxed{W^{\text{ext}} = 4mgL(1 - \cos \theta)} \quad (9)$$

- (d) Determinar a velocidade do bloco B em função de θ : **(0,5)**

Sabendo que as forças internas nesse sistema não realizam trabalho, tem-se

$$\Delta T = W^{\text{ext}} \Rightarrow \frac{mL^2}{3} (1 + 9 \sin^2 \theta) \omega^2 = 4mgL(1 - \cos \theta) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12g}{L} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + 9 \sin^2 \theta} \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = - \left[2L \sin \theta \sqrt{\frac{12g}{L} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + 9 \sin^2 \theta} \right)} \right] \vec{j}}$$



Questão 3 (3,5 pontos)

Resolução:

(a) DCL ao lado (0,5):

(b) Quantidade de movimento angular em relação ao polo B, com coordenadas (B, x, y, z) (1,0):

$$\vec{H}_B = m(\vec{G} - \vec{B}) \wedge \vec{v}_B + (J_{Bx}\omega_x - J_{Bxy}\omega_y - J_{Bxz}\omega_z) \vec{i} + (-J_{Byx}\omega_x + J_{Byy}\omega_y - J_{Byz}\omega_z) \vec{j} + (-J_{Bzx}\omega_x - J_{Bzy}\omega_y + J_{Bzz}\omega_z) \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_B = -J_{Byz}\omega \vec{j} + J_{Bz}\omega \vec{k}}$$

(c) Polo B (0,5):

$$\boxed{J_{Byz} = [0 + m(a)(a)] + [0 + m(a)(a)] = 2ma^2} \quad \boxed{J_{Bz} = \left[\frac{m(2a)^2}{12} + ma^2 \right] + ma^2 = \frac{7ma^2}{3}}$$

(d) Centro de massa CM do conjunto:

$$(\text{CM} - \text{B}) = \frac{m(x_G + x_D)\vec{i} + m(y_G + y_D)\vec{j} + m(z_G + z_D)\vec{k}}{2m} = \vec{0} \Rightarrow \text{CM} \equiv \text{B}$$

Pelo Teorema da Resultante (TR), obtemos (0,5):

$$m\vec{a}_B = \vec{0} = (X_A + X_C)\vec{i} + (Y_A + Y_C)\vec{j} + (Z_A - 2mg)\vec{k}$$

$$X_A + X_C = 0 \quad (1)$$

$$Y_A + Y_C = 0 \quad (2)$$

$$Z_A = 2mg \quad (3)$$

Pelo Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), obtemos (0,5):

$$\vec{H}_B = \omega (-J_{Byz}\vec{j} + J_{Bz}\vec{k}) \Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = \dot{\omega} (-J_{Byz}\vec{j} + J_{Bz}\vec{k}) + \omega (-J_{Byz}\dot{\vec{j}} + J_{Bz}\dot{\vec{k}}) = \omega^2 J_{Byz}\vec{i}$$

$$\dot{\vec{H}}_B = m\vec{v}_B \wedge \vec{v}_B + \vec{M}_B^{\text{ext}} \Rightarrow \omega^2 J_{Byz}\vec{i} = a(2Y_A - mg + mg - 2Y_C)\vec{i} + a(-2X_A + 2X_C)\vec{j}$$

$$\omega^2 J_{Byz} = 2a(Y_A - Y_C) \quad (4)$$

$$0 = 2a(-X_A + X_C) \quad (5)$$

Destas equações obtemos (0,5):

De (1) e (5): $\boxed{X_A = 0}$ e $\boxed{X_C = 0}$

De (2) e (4): $\boxed{Y_A = \frac{\omega^2 J_{Byz}}{4a} = \frac{\omega^2 ma}{2}}$ e $\boxed{Y_C = -\frac{\omega^2 J_{Byz}}{4a} = -\frac{\omega^2 ma}{2}}$

De (3): $\boxed{Z_A = 2mg}$

