ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

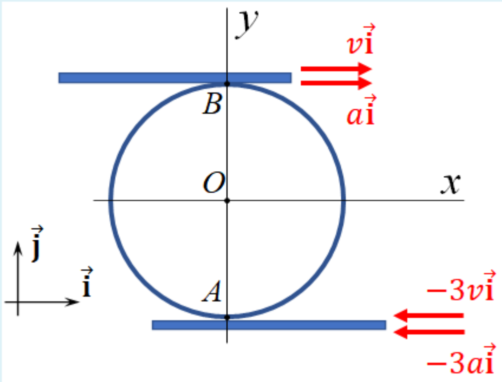
PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 15 de dezembro de 2020

Duração da Prova: 140 minutos (Início: 10:00 – Término: 12:20)

1ª Questão (3,0 pontos).

No sistema mostrado na figura, o movimento do disco de centro O e raio R ocorre no plano xy. O disco rola sem escorregar em relação a duas barras, sendo uma em contato com o ponto A da periferia do disco e a outra em contato com o ponto B da periferia do disco. No instante analisado, a barra em contato com o ponto A apresenta velocidade $-3v\vec{i}$ e aceleração $-3a\vec{i}$. Neste mesmo instante, a barra em contato com o ponto B movimenta-se com velocidade $v\vec{i}$ e aceleração $a\vec{i}$. Para este instante, e considerando um sistema de coordenadas com origem em O, **calcule e escreva suas respostas preenchendo os campos abaixo sem incluir unidades e com apenas 2 casas decimais. Utilizar PONTO como separador de decimais (ex.: usar 0.75 e não usar 0,75).**

Admita: $R = 1.4\,m$, $v = 1.2\,m/s$ e $a = 1\,m/s^2$.



a) As coordenadas do centro instantâneo de rotação do disco: $x_{CIR} =$ ☐ e $y_{CIR} =$ ☐ $[m]$

b) O vetor velocidade angular do disco: $\vec{\omega} =$ ☐ $\vec{k}$ $[rad/s]$

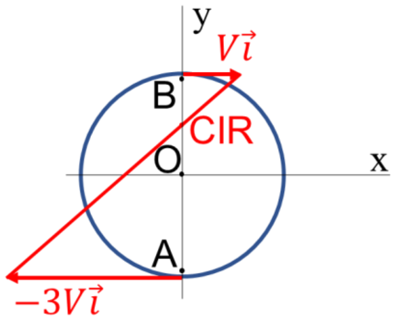
c) A velocidade do ponto O do disco: $\vec{v}_O =$ ☐ $\vec{i} +$ ☐ $\vec{j}$ $[m/s]$

d) A aceleração do ponto O do disco: $\vec{a}_O =$ ☐ $\vec{i} +$ ☐ $\vec{j}$ $[m/s^2]$

e) A aceleração do ponto A da periferia do disco: $\vec{a}_A =$ ☐ $\vec{i} +$ ☐ $\vec{j}$ $[m/s^2]$

(a) Contatos de rolamento sem escorregamento e módulo da velocidade proporcional à distância ao CIR.

Geometricamente, $(CIR - O) = \frac{R}{2}\vec{j} \;\Rightarrow x_{CIR} = 0 \;\; e \;\; y_{CIR} = \frac{R}{2}$



(b) $\vec{v}_B = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (B - CIR)$

$$\Rightarrow V\vec{i} = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left(\frac{R}{2}\vec{j}\right) \Rightarrow \omega = -\frac{2V}{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = -\frac{2V}{R}\vec{k}$$

(c) $\vec{v}_O = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (O - CIR) \;\Rightarrow\; \vec{v}_O = \vec{0} - \frac{2V}{R}\vec{k} \wedge \left(-\frac{R}{2}\vec{j}\right) \;\Rightarrow\; \vec{v}_O = -V\vec{i}$

(d) Aceleração da barra em contato com B é $a\vec{i}$ e aceleração da barra em contato com A é $3a\vec{i}$. Portanto, com a proporção de velocidades mantida, o CIR permanece com as mesmas coordenadas e o ponto O com velocidade de mesmo módulo e sentido oposto à velocidade da barra em contato com B. Dessa forma:

$$\vec{a}_O = -a\vec{i} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{\omega}} = -\frac{2a}{R}\vec{k}$$

(e) $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = -a\vec{i} + \left[-\frac{2a}{R}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})\right] - \frac{2V}{R}\vec{k} \wedge \left[-\frac{2V}{R}\vec{k} \wedge (-R\vec{j})\right] \;\;\Rightarrow\;\; \vec{a}_A = -3a\vec{i} + \frac{4V^2}{R}\vec{j}$$

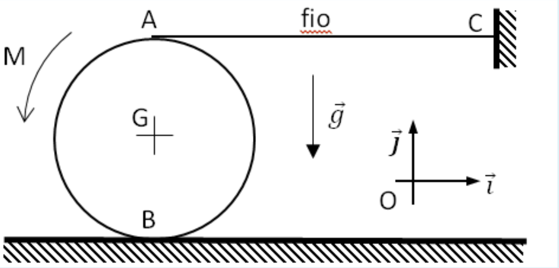
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,0 pontos).

O disco de massa m e raio R está sobre uma superfície horizontal e possui enrolado sobre si um fio ideal. O fio, por sua vez, tem sua extremidade presa ao suporte fixo em C. O disco se movimenta acionado por um binário $\vec{M} = M\vec{k}$ e **ocorre escorregamento em B**. Sabe-se que o coeficiente de atrito dinâmico entre o disco e a superfície horizontal é μ. Para estas condições, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixo, expressando as grandezas na base $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, com $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$, **levando em conta a orientação da base de versores** (isto é, de acordo com os respectivos sinais negativos, caso necessário). **Utilize até duas casas decimais separadas por PONTO (ex.: usar 0.75 e não usar 0,75). Preencher todos os campos, mesmo que haja valores nulos. Campos não preenchidos são considerados erros.** Dado: momento de inércia do disco $J_{Gz} = \frac{1}{2}mR^2$.



Admita: $m = 0.3\,kg$, $R = 0.1\,m$, $M = 1.4\,Nm$, $\mu = 0.4$ e $g = 10\,m/s^2$.

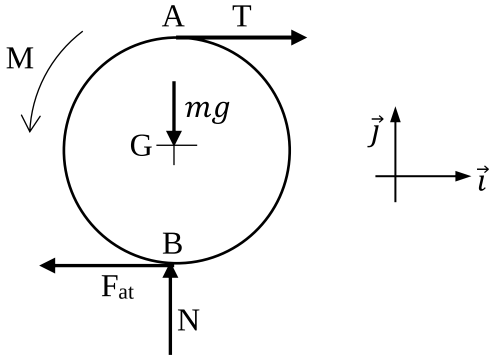
a) A componente vertical da força de contato atuante no disco em B: ☐ $\vec{j}$ $[N]$

b) A componente horizontal da força de contato atuante no disco em B: ☐ $\vec{i}$ $[N]$

c) A aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco: ☐ $\vec{k}$ $[rad/s^2]$

d) A aceleração do centro de massa G do disco: ☐ $\vec{i}+$ ☐ $\vec{j}$ $[m/s^2]$

e) A força que o fio aplica no disco: ☐ $\vec{i}$ $[N]$



<u>TMB:</u>

$$m\vec{a}_G = \vec{R}_{EXT} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a}_G = (T - F_{at})\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath}$$

Relação cinemática: $\vec{a}_G = \dot{\omega}R\vec{\imath}$

$$m\dot{\omega}R\vec{\imath} = (T - F_{at})\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath}$$

Assim:

$$m\dot{\omega}R = (T - F_{at}) \qquad N = mg \qquad (1)$$

Escorregamento em B: $F_{at} = \mu N = \mu mg$ (2)

<u>TQMA, polo em A:</u>

$$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{EXT} \quad \Rightarrow \quad J_A\dot{\omega}\vec{k} = M\vec{k} - 2RF_{at}\vec{k} \quad \Rightarrow \quad J_A = J_G + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$\Rightarrow J_A = J_G + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}mR^2\dot{\omega} = M - 2R\mu mg$$

a) $\dot{\omega} = \frac{2}{3mR}\left(\frac{M}{R} - 2\mu mg\right)$ (3)

b) $\vec{a}_G = \dot{\omega}R\vec{\imath} \quad \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{2}{3m}\left(\frac{M}{R} - 2\mu mg\right)\vec{\imath}$

c) Usando (1), (2) e (3):

$$T = \frac{2M}{3R} - \frac{\mu mg}{3}$$

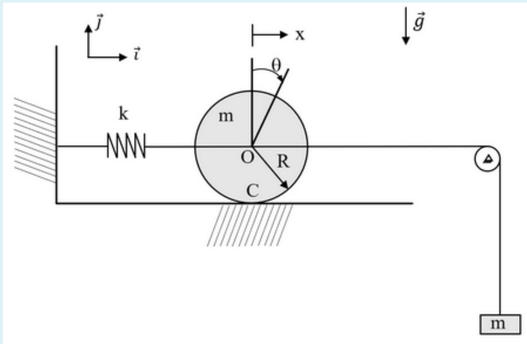
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (4,0 pontos).

A figura mostra um disco homogêneo de massa m e raio R ligado por um fio ideal a um bloco de massa também m. O disco está conectado ao plano vertical por uma mola de constante elástica k. Devido ao peso do bloco, o sistema começa a se movimentar a partir do repouso e o disco rola sem escorregar. Considerando que no instante inicial $\theta(0) = 0$ e a mola não está deformada, calcule e escreva suas respostas nos campos abaixo, expressando as grandezas vetoriais na base $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, com $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$, **levando em conta a orientação da base de versores** (isto é, de acordo com os respectivos sinais negativos, caso necessário). **Utilize até duas casas decimais separadas por PONTO (ex.: usar 0.75 e não usar 0,75).** Dado: momento de inércia do disco $J_{Oz} = \frac{1}{2}mR^2$.



Admita: $m = 14\,kg$, $R = 0.7\,m$, $k = 56\,N/m$ e $g = 10.0\,m/s^2$.

a) A energia cinética E_c do sistema em função de $\dot{\theta}^2$, no formato $cte_1.\dot{\theta}^2$. $E_c = \square\ \dot{\theta}^2\ [J]$

b) O trabalho τ realizado pelos esforços aplicados ao sistema em função de θ e θ^2, no formato $cte_2.\theta + cte_3.\theta^2$. $\tau = \square\ \theta + \square\ \theta^2\ [J]$

c) A aceleração angular $\ddot{\theta}$ do disco, em função de θ, no formato $cte_4 + cte_5.\theta$. $\ddot{\theta} = \square + \square\ \theta\ [\frac{rad}{s^2}]$

d) A força de atrito $\vec{F}_{at}$ atuante no disco em função de θ, no formato $cte_6 + cte_7.\theta$. $\vec{F}_{at} = (\square + \square\ \theta)\ \vec{i}\ [N]$

a) Sabendo que módulo da velocidade do baricentro do disco é $v_o = \dot{\theta}R$.

Energia cinética do disco:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{\theta}^2R^2$$

Energia cinética do bloco:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = +\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2R^2$$

Energia cinética do sistema:

$$E_c = \frac{5}{4}m\dot{\theta}^2R^2$$

b) O trabalho das forças externas ao sistema deve ser igual ao trabalho realizado pela força elástica na mola somado ao trabalho realizado pela força pelo do bloco.

Para a mola:

$$\tau_{mola} = -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}k(\theta R)^2$$

Para o peso:

$$\tau_P = mg\theta R$$

Assim, somando os dois termos:

$$\tau_{ext} = mg\theta R - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

c) Pelo teorema da energia cinética (TEC).

$$\tau_{ext} = \Delta Ec$$

Como inicialmente o corpo estava parado, a energia cinética inicial é nula. Então, substituindo os resultados dos itens anteriores na equação:

$$mg\theta R - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = \frac{5}{4}m\dot{\theta}^2R^2$$

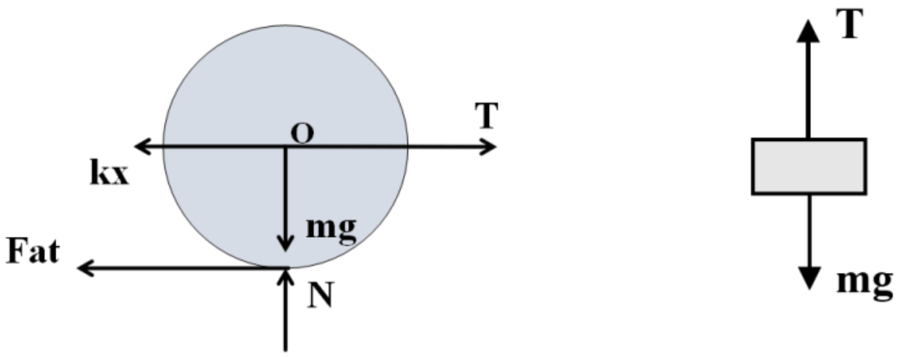
Agora, derivando a expressão acima em relação ao tempo, obtém-se:

$$mgR\dot{\theta} - kR^2\theta\dot{\theta} = \frac{5}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{5}\frac{g}{R} - \frac{2}{5}\frac{k}{m}\theta$$

d) Considerando o diagrama de corpo livre do disco e do bloco:

Figura 2



Pelo teorema do movimento do baricentro

$$\text{Disco} \Longrightarrow T - kx - Fat = ma_o$$
$$\text{Bloco} \Longrightarrow mg - T = ma_o$$

Lembrando que $a_o = \ddot{\theta}R$ e $x = \theta R$, segue portanto, que

$$\text{Bloco} \Longrightarrow T = mg - m\ddot{\theta}R$$
$$\text{Disco} \Longrightarrow Fat = T - k\theta R - m\ddot{\theta}R$$

$$Fat = \frac{1}{5}mg - \frac{1}{5}kR\theta$$