ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

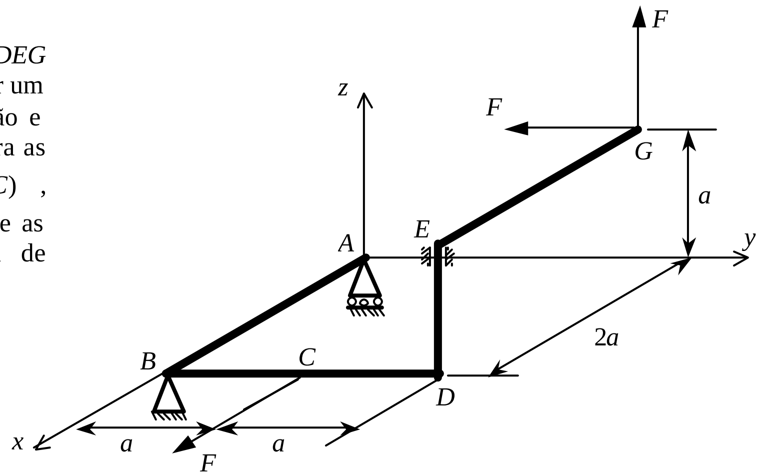
PMC 2100 – MECÂNICA A

Prova Substitutiva – 15 de dezembro de 2000 – Duração: 100 minutos
(importante: não é permitida a utilização de calculadoras)

Nome: ____

Assinatura: ____

(3,0 pontos) Questão 1 – A barra *ABCDEG* mostrada na figura é vinculada em *A* por um apoio simples, em *B* por uma articulação e em *E* por um anel. São aplicadas na barra as forças $(-F\vec{j}+F\vec{k}\,,\; G)$ e $(F\vec{i}\,,\; C)$, conforme indicado pela figura. Determine as reações externas utilizando o sistema de coordenadas (A,x,y,z).



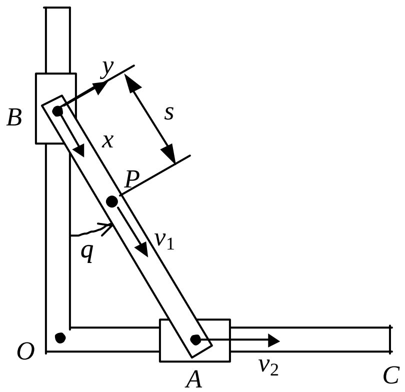
(3,5 pontos) Questão 2 – Um ponto *P* se desloca sobre a barra *AB* (de comprimento *l*) com velocidade v_1, constante, em relação à barra. A extremidade *A* da barra se desloca sobre o trilho fixo *OC* com velocidade constante v_2.

a) Determine graficamente o CIR da barra.

Em função de *q*, *s*, v_1 e v_2, e expressando as respostas na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ do sistema (B,x,y,z) móvel com a barra:

b) Determine o vetor velocidade $\vec{v}_B$ do ponto *B* e o vetor de rotação $\vec{w}$ da barra.

c) Determine o vetor velocidade $\vec{v}_P$ do ponto *P*.



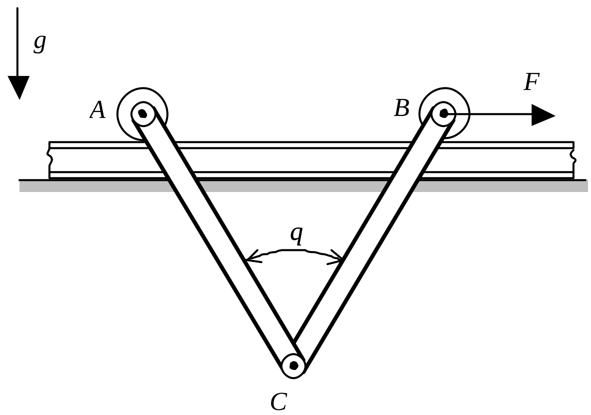
(3,5 pontos) Questão 3 – As barras da figura são uniformes e iguais, têm massa *m* e estão articuladas entre si na extremidade inferior *C*, sem atrito. As barras se apóiam em um trilho por meio de roletes em cada extremidade superior. Estes roletes têm massa desprezível e deslizam sem atrito sobre o trilho. O conjunto é acelerado por uma força constante *F*, e sabe-se que, a partir de um certo instante, o ângulo *q* permanece constante. Considerando este instante, determine:

a) A aceleração do conjunto.

b) O ângulo *q* (constante).

c) As reações nas barras em *C*.

d) As reações verticais R_A e R_B nos roletes.



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

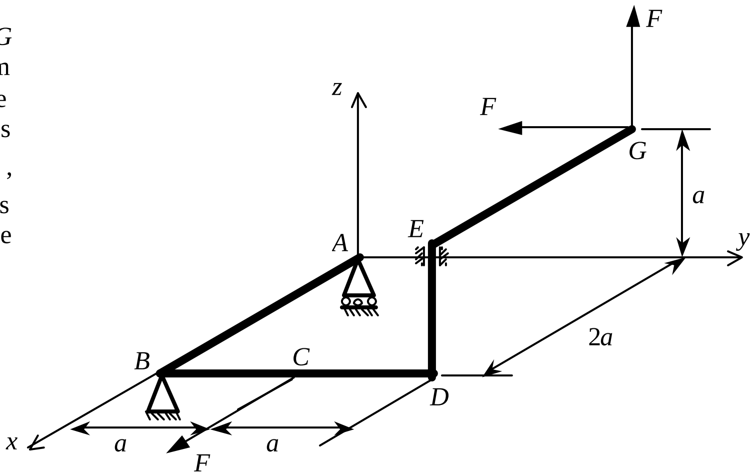
Departamento de Engenharia Mecânica

PMC 2100 – MECÂNICA A

Prova Substitutiva – 15 de dezembro de 2000

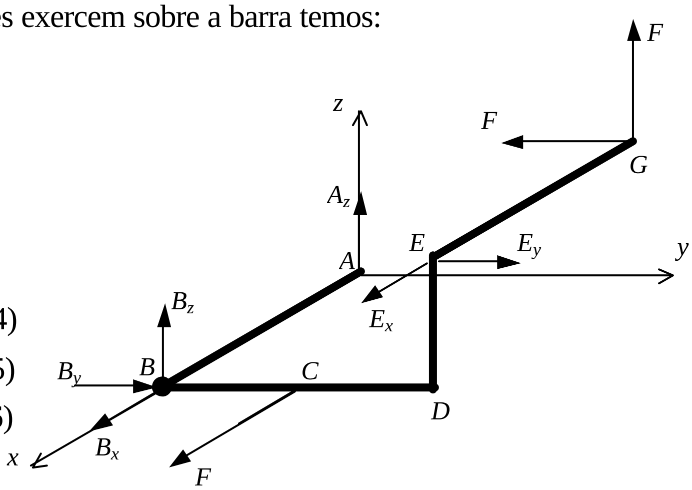
GABARITO

(3,0 pontos) Questão 1 – A barra *ABCDEG* mostrada na figura é vinculada em *A* por um apoio simples, em *B* por uma articulação e em *E* por um anel. São aplicadas na barra as forças $(-F\vec{j}+F\vec{k},\ G)$ e $(F\vec{i},\ C)$, conforme indicado pela figura. Determine as reações externas utilizando o sistema de coordenadas (A,x,y,z).



Solução:

Substituindo os vínculos pelas reações que eles exercem sobre a barra temos:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +F + B_x + E_x = 0 \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F + B_y + E_y = 0 \qquad (2)$$
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow +F + A_z + B_z = 0 \qquad (3)$$

Momentos em relação ao ponto *B*:

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow +Fa + F2a - E_y a = 0 \qquad (4)$$
$$\sum M_{By} = 0 \Rightarrow +F2a + A_z 2a + E_x a = 0 \qquad (5)$$
$$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow -Fa + F2a - E_x 2a = 0 \qquad (6)$$

De (4): $E_y a = +Fa + F2a \Rightarrow \boxed{E_y = 3F}$ (7)

De (6): $E_x 2a = -Fa + F2a \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{F}{2}}$ (8)

De (5) e (8): $A_z 2a = -F2a - E_x a = -F2a - \frac{F}{2}a \Rightarrow \boxed{A_z = -\frac{5F}{4}}$ (9)

De (1) e (8): $B_x = -F - E_x = -F - \frac{F}{2} \Rightarrow \boxed{B_x = -\frac{3F}{2}}$ (10)

De (2) e (7): $B_y = +F - E_y = +F - 3F \Rightarrow \boxed{B_y = -2F}$ (11)

De (3) e (9): $B_z = -F - A_z = -F + \frac{5F}{4} \Rightarrow \boxed{B_z = \frac{F}{4}}$ (12)

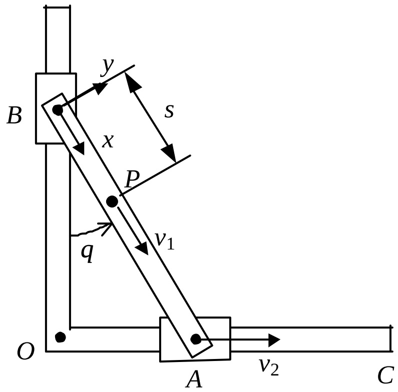
(3,5 pontos) Questão 2 – Um ponto P se desloca sobre a barra AB (de comprimento l) com velocidade v_1, constante, em relação à barra. A extremidade A da barra se desloca sobre o trilho fixo OC com velocidade constante v_2.

a) Determine graficamente o CIR da barra.

Em função de q, s, v_1 e v_2, e expressando as respostas na base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) do sistema (B,x,y,z) móvel com a barra:

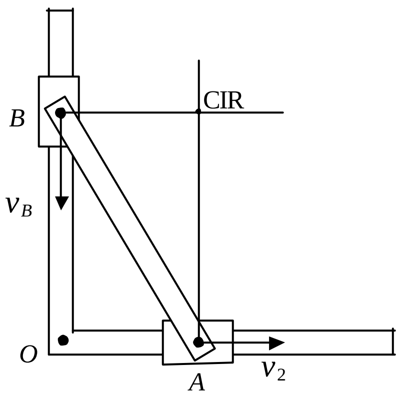
b) Determine o vetor velocidade $\vec{v}_B$ do ponto B e o vetor de rotação $\vec{w}$ da barra.

c) Determine o vetor velocidade $\vec{v}_P$ do ponto P.



Solução:

a)



b) Na base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ as velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ são expressas por:

$$\vec{v}_A = v_2\left(\text{sen}q\ \vec{i} + \cos q\ \vec{j}\right)$$
$$\vec{v}_B = v_B\left(\cos q\ \vec{i} - \text{sen}q\ \vec{j}\right)$$

Aplicando Poisson entre $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{w} \times \vec{r}_{A/B}$$
$$v_2\left(\text{sen}q\ \vec{i} + \cos q\ \vec{j}\right) = v_B\left(\cos q\ \vec{i} - \text{sen}q\ \vec{j}\right) + w\,\vec{k} \times l\,\vec{i}$$
$$v_2\,\text{sen}q\ \vec{i} + v_2\cos q\ \vec{j} = v_B\cos q\ \vec{i} - v_B\,\text{sen}q\ \vec{j} + w\,l\,\vec{j}$$

Portanto:

$$v_2\,\text{sen}q = v_B\cos q \Rightarrow v_B = \frac{v_2\,\text{sen}q}{\cos q} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \frac{v_2\,\text{sen}q}{\cos q}\left(\cos q\ \vec{i} - \text{sen}q\ \vec{j}\right)}$$

$$v_2\cos q = -v_B\,\text{sen}q + w\,l \Rightarrow v_2\cos q = -\left(\frac{v_2\,\text{sen}q}{\cos q}\right)\text{sen}q + w\,l \Rightarrow w\,l\cos q = v_2\cos^2 q + v_2\,\text{sen}^2 q$$

Logo: $\boxed{\vec{w} = \dfrac{v_2}{l\cos q}\vec{k}}$

c) $\vec{v}_P = \vec{v}_{P,\text{rel}} + \vec{v}_{P,\text{arr}}$

$$\vec{v}_{P,\text{rel}} = v_1\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{P,\text{arr}} = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{P/A} = v_2\left(\text{sen}q\ \vec{i} + \cos q\ \vec{j}\right) + \frac{v_2}{l\cos q}\vec{k} \times (l-s)\left(-\vec{i}\right) \Rightarrow$$

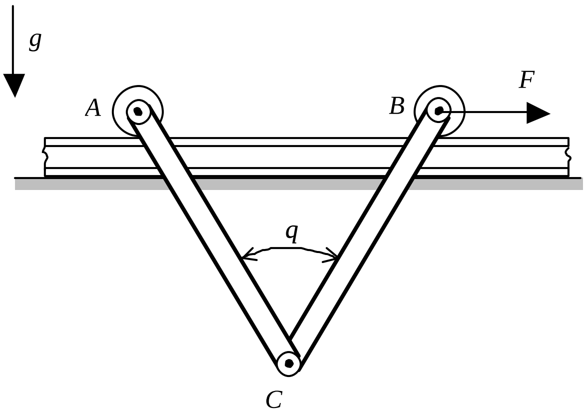
$$\vec{v}_{P,\text{arr}} = v_2\,\text{sen}q\ \vec{i} + v_2\left[\cos q + \frac{v_2(-l+s)}{l\cos q}\right]\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \left(v_1 + v_2\,\text{sen}q\right)\vec{i} + v_2\left[\cos q + \frac{v_2(-l+s)}{l\cos q}\right]\vec{j}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

(3,5 pontos) Questão 3 – As barras da figura são uniformes e iguais, têm massa m e estão articuladas entre si na extremidade inferior C, sem atrito. As barras se apóiam em um trilho por meio de roletes em cada extremidade superior. Estes roletes têm massa desprezível e deslizam sem atrito sobre o trilho. O conjunto é acelerado por uma força constante F, e sabe-se que, a partir de um certo instante, o ângulo q permanece constante. Considerando este instante, determine:



a) A aceleração do conjunto.

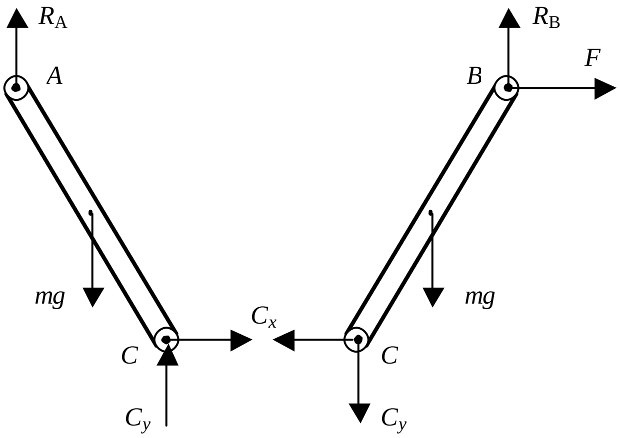
b) O ângulo q (constante).

c) As reações nas barras em C.

d) As reações verticais R_A e R_B nos roletes.

Solução:

Diagrama de corpo livre:



Barra *AC*:

TMB:

$$\begin{cases} C_x = ma & (1) \\ R_A + C_y - mg = 0 & (2) \end{cases}$$

TMA:

$$-R_A \operatorname{sen}\frac{q}{2} + C_y \operatorname{sen}\frac{q}{2} + C_x \cos\frac{q}{2} = 0 \qquad (3)$$

Barra *BC*:

TMB:

$$\begin{cases} F - C_x = ma & (4) \\ R_B - C_y - mg = 0 & (5) \end{cases}$$

TMA:

$$R_B \operatorname{sen}\frac{q}{2} - F\cos\frac{q}{2} + C_y \operatorname{sen}\frac{q}{2} - C_x \cos\frac{q}{2} = 0 \qquad (6)$$

Somando (1) e (4): $2ma = F \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{F}{2m}} \quad \Rightarrow \quad$ De (1): $C_x = ma \;\Rightarrow\; \boxed{C_x = \dfrac{F}{2}}$

Subtraindo (3) de (6): $(R_A + R_B)\text{sen}\dfrac{q}{2} = F\cos\dfrac{q}{2} + 2C_x\cos\dfrac{q}{2} = F\cos\dfrac{q}{2} + F\cos\dfrac{q}{2} = 2F\cos\dfrac{q}{2}$

$$\Rightarrow tg\frac{q}{2} = \frac{2F}{(R_A + R_B)} \Rightarrow tg\frac{q}{2} = \frac{F}{mg} \Rightarrow \boxed{q = 2arctg\frac{F}{mg}}$$

Somando (2) e (5): $(R_A + R_B) = 2mg$

Somando (3) e (6): $(R_B - R_A)\text{sen}\dfrac{q}{2} + 2C_y\,\text{sen}\dfrac{q}{2} - F\cos\dfrac{q}{2} = 0$

Subtraindo (2) de (5): $(R_B - R_A) = 2C_y \Rightarrow 2C_y\,\text{sen}\dfrac{q}{2} + 2C_y\,\text{sen}\dfrac{q}{2} - F\cos\dfrac{q}{2} = 0 \Rightarrow$

$$C_y = \frac{F}{4tg\dfrac{q}{2}} \Rightarrow C_y = \frac{F}{4\dfrac{F}{mg}} \Rightarrow \boxed{C_y = \frac{mg}{4}}$$

Usando este resultado em (5): $R_B - \dfrac{mg}{4} - mg = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = \dfrac{5mg}{4}}$

Usando em (2): $R_A + \dfrac{mg}{4} - mg = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \dfrac{3mg}{4}}$