

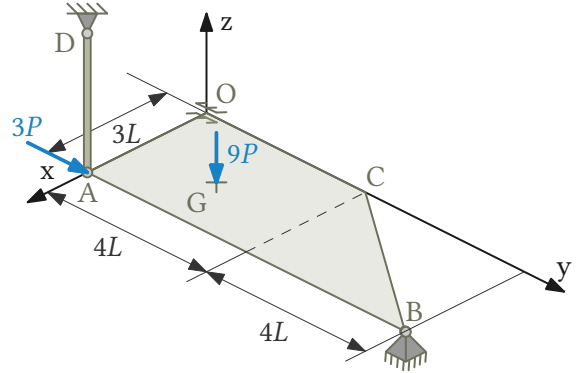


PME 3100 – Mecânica I – Reoferecimento 2025 – Prova de Recuperação – 17 de Julho de 2025

Instruções gerais e formulário estão no caderno de respostas. Se sair antes do término, entregue esta folha ao aplicador.

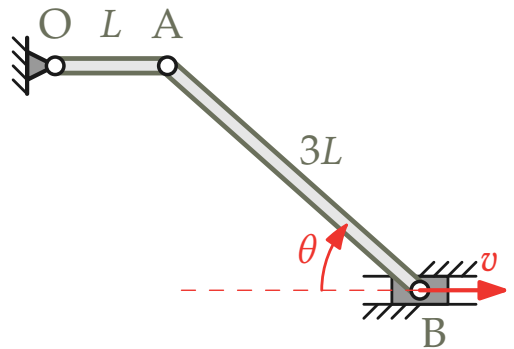
Questão 1 (3,5 pontos). A figura ao lado mostra uma placa plana OABC contida no plano horizontal Oxy e sustentada por um anel em O, uma articulação em B e uma barra esbelta e de massa desprezível em A. A placa tem peso $9P$ e sobre ela age uma força $3P\hat{j}$ em A. Considerando a configuração do sistema mostrada na figura, pede-se:

- (0,6) obter o vetor posição $G - O$ do centro de massa G da placa.
- (0,8) O DCL da placa.
- (1,2) O sistema de equações que permite o cálculo das forças de reações sobre a placa plana na condição de equilíbrio estático, utilizando o ponto B como polo para cálculo dos momentos.
- (0,9) A partir do sistema de equações, obtenha as componentes das forças de reação sobre a placa.



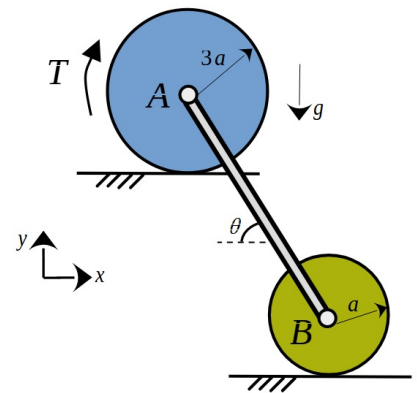
Questão 2 (3,0 pontos). No mecanismo mostrado na figura, a barra OA, de comprimento L , gira ao redor da articulação fixa O. A extremidade A da barra OA está articulada à barra AB, de comprimento $3L$, cuja extremidade B está articulada a um bloco que desliza por uma guia horizontal com velocidade v , constante. Para o instante mostrado na figura, no qual a barra OA está na horizontal, pede-se:

- (0,5) Esboçar a construção geométrica para a determinação do Centro Instantâneos de Rotação (CIR) da barra AB.
- (0,8) A velocidade angular $\vec{\omega}_1$ da barra AB.
- (0,4) A velocidade $\vec{v}_A$ do ponto A.
- (0,5) A velocidade angular $\vec{\omega}_2$ da barra OA.
- (0,8) A aceleração angular $\vec{\alpha}_2$ da barra OA.



Questão 3 (3,5 pontos). A figura ilustra um sistema mecânico composto por uma barra homogênea AB de peso desprezível e comprimento $5a$, que conecta dois discos homogêneos que podem rolar sem escorregar sob superfícies horizontalmente fixas. O disco com centro em A possui massa $3m$ e raio $3a$, e aquele com centro em B tem massa m e raio a . O sistema parte do repouso na posição indicada na figura, e sob a ação de um binário de magnitude conhecida T aplicado no disco com centro em A, o sistema inicia-se seu movimento. Assim, considerando o instante em que o sistema inicia seu movimento e que $\cos \theta = \frac{3}{5}$ e $\sin \theta = \frac{4}{5}$, pede-se:

- (0,9) O diagram de corpo livre do disco com centro em A, do disco com centro em B e da barra AB.
- (0,6) Admitindo $\vec{a}_1 = -\alpha_1\vec{k}$ e $\vec{a}_2 = -\alpha_2\vec{k}$ como vetores de aceleração angular dos discos com centro em A e B, respectivamente, obtenha a relação entre α_1 e α_2 .
- (0,3) Escrever o vetor aceleração absoluta do centro de massa de cada disco em função de α_1 .
- (0,6) As equações escalares obtidas com a aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular ao disco de centro em A.
- (0,6) As equações escalares obtidas com a aplicação dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular ao disco de centro em B.
- (0,5) Formular o sistema de equações obtidos com a aplicação dos teoremas da dinâmica para este sistema e destacar as respectivas incógnitas (Não é necessário resolver o sistema de equações).





Questão 1 – Resolução

a) Concebendo, conforme figura ao lado, a placa OABC como a subtração de duas placas:

(i) uma retangular, de área $A_1 = 24L^2$ e centro de massa $G_1 = \left(\frac{3L}{2}, 4L, 0\right)$;

(ii) uma triangular que será subtraída da anterior, de área $A_2 = 6L^2$ e centro de massa $G_2 = \left(L, 8L - \frac{4L}{3}, 0\right)$;

temos, da hipótese de homogeneidade:

$$(G - O) = \frac{A_1(G_1 - O) - A_2(G_2 - O)}{A_1 - A_2} = \frac{24L^2 \left(\frac{3L}{2}\vec{i} + 4L\vec{j}\right) - 6L^2 \left(L\vec{i} + \frac{20L}{3}\vec{j}\right)}{18L^2}$$

$$(G - O) = \frac{5}{3}L\vec{i} + \frac{28}{9}L\vec{j} \Rightarrow \boxed{(G - O) = \frac{5}{3}L\vec{i} + \frac{28}{9}L\vec{j}}$$

(0,3) para cada componente não nula correta

b) Os diagramas são apresentados na figura ao lado.

(0,8) para o DCL da placa.

Desconto de (0,3) por erro identificado no diagrama.

c) A partir do DCL da placa, obtemos a resultante de momentos com respeito ao polo B:

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= (G - B) \wedge (-9P\vec{k}) + (A - B) \wedge (T\vec{k} + 3P\vec{j}) + (O - B) \wedge (O_x\vec{i} + O_z\vec{k}) \\ &= L \left(-\frac{4}{3}\vec{i} - \frac{44}{9}\vec{j} \right) \wedge (-9P\vec{k}) - 8L\vec{j} \wedge (T\vec{k} + 3P\vec{j}) + L(-3\vec{i} - 8\vec{j}) \wedge (O_x\vec{i} + O_z\vec{k}) \\ &= (44LP - 8LT - 8LO_z)\vec{i} + (-12LP + 3LO_z)\vec{j} + (8LO_x)\vec{k} \end{aligned}$$

Assim, as condições de equilíbrio da placa podem ser descritas como (0,2 para cada equação correta):

$$\vec{M}_B = \vec{0} : \begin{cases} 44LP - 8LT - 8LO_z = 0 & (1) \\ -12LP + 3LO_z = 0 & (2) \\ 8LO_x = 0 & (3) \end{cases} \quad \vec{R} = \vec{0} : \begin{cases} O_x + B_x = 0 & (4) \\ B_y + 3P = 0 & (5) \\ B_z + O_z + T - 9P = 0 & (6) \end{cases}$$

d) Das equações (2), (3) e (5), obtemos, respectivamente (0,1 cada):

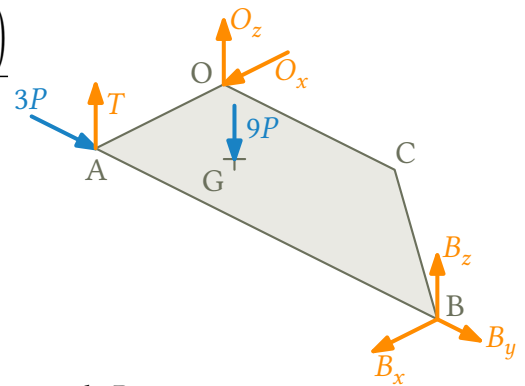
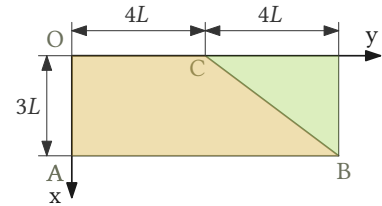
$$\boxed{O_z = 4P} \quad \boxed{O_x = 0} \quad \boxed{B_y = -3P}$$

Substituindo os resultados nas equações (1) e (4), obtemos (0,2 cada):

$$\boxed{T = \frac{3P}{2}} \quad \boxed{B_x = 0}$$

Por fim, substituindo os resultados na equação (6) obtemos (0,2):

$$\boxed{B_z = \frac{7P}{2}}$$





Questão 2 – Resolução

a) Veja figura ao lado, onde o CIR é indicado pelo ponto I no plano do movimento. (0,5)

b) Aplicando a expressão do campo de velocidades à barra AB, tem-se:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_I + \omega_1 \vec{k} \wedge (B - I), \quad \vec{v}_I = \vec{0}, \quad \vec{v}_B = v \vec{i}.$$

Portanto:

$$v \vec{i} = \omega_1 \vec{k} \wedge -3L \sin \theta \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_1 = \left(\frac{v}{3L \sin \theta} \right) \vec{k}} \quad (0,8)$$

c) Da equação do campo de velocidades para a barra AB:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_I + \omega_1 \vec{k} \wedge (A - I) = \omega_1 \vec{k} \wedge -3L \cos \theta \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \left(-\frac{v}{\tan \theta} \right) \vec{j}} \quad (0,4)$$

d) Aplicando a expressão do campo de velocidades à barra OA, tem-se:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \omega_2 \vec{k} \wedge (A - O), \quad \vec{v}_O = \vec{0} \Rightarrow \left(-\frac{v}{\tan \theta} \right) \vec{j} = \omega_2 \vec{k} \wedge L \vec{i} = \omega_2 L \vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = \left(-\frac{v}{L \tan \theta} \right) \vec{k}} \quad (0,5)$$

e) Aplicando a expressão do campo de acelerações às barra AB e OA, respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_B + \alpha_1 \vec{k} \wedge (A - B) + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge (A - B)], \quad \vec{a}_B = \vec{0} \\ \vec{a}_A &= \alpha_1 \vec{k} \wedge 3L(-\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge 3L(-\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})] \\ \vec{a}_A &= (3L \cos \theta \omega_1^2 - 3L \sin \theta \alpha_1) \vec{i} + (-3L \sin \theta \omega_1^2 - 3L \cos \theta \alpha_1) \vec{j} \end{aligned}$$

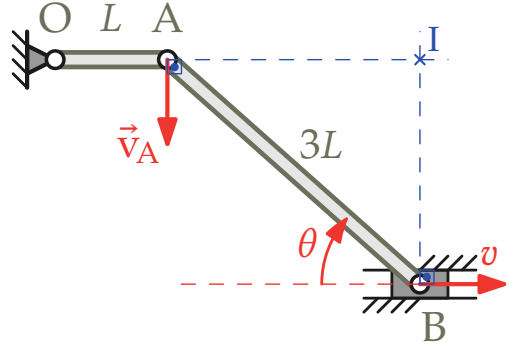
$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{a}_O + \alpha_2 \vec{k} \wedge (A - O) + \omega_2 \vec{k} \wedge [\omega_2 \vec{k} \wedge (A - O)], \quad \vec{a}_O = \vec{0} \\ \vec{a}_A &= \alpha_2 \vec{k} \wedge L \vec{i} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\omega_2 \vec{k} \wedge L \vec{i}) \\ \vec{a}_A &= (-L \omega_2^2) \vec{i} + (L \alpha_2) \vec{j} \end{aligned}$$

Igualando as componentes das expressões acima para a aceleração do ponto A, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares nas incógnitas α_1 e α_2 :

$$\begin{aligned} -3L \sin \theta \alpha_1 &= -3L \cos \theta \omega_1^2 - L \omega_2^2 \\ -3L \cos \theta \alpha_1 - L \alpha_2 &= 3L \sin \theta \omega_1^2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações acima e substituindo as expressões de ω_1 e ω_2 obtidas nos itens anteriores, obtém-se:

$$\boxed{\vec{\alpha}_1 = \frac{v^2}{9L^2} \left(\frac{3 \cos^2 \theta + \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \vec{k}} \quad (0,4) \quad \boxed{\vec{\alpha}_2 = -\frac{v^2}{3L^2} \left(\frac{3 \cos^3 \theta + 1}{\sin^3 \theta} \right) \vec{k}} \quad (0,4)$$





Questão 3 – Resolução

a) DCLs indicados a seguir. (0,3) para cada DCL completamente correto.

b) Ambos discos rolam sem escorregar, portanto:

$$\vec{a}_A = 3a\alpha_1\vec{i}, \quad \vec{a}_B = a\alpha_2\vec{i}$$

Campo de acelerações na barra AB:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \wedge (B - A) \Rightarrow$$

$$a\alpha_2\vec{i} = 3a\alpha_1\vec{i} + (\alpha_{AB}\vec{k}) \wedge (3a\vec{i} - 4a\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} a\alpha_2 = 3a\alpha_1 + 4a\alpha_{AB} \\ 0 = 3a\alpha_{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 3\alpha_1 \\ \alpha_{AB} = 0 \end{cases}$$

Portanto, a barra AB translada de maneira retilínea e,

$$\alpha_2 = 3\alpha_1 \quad (0,6)$$

c)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = 3a\alpha_1\vec{i} \quad (0,3)$$

d) TQMA (polo A):

$$\sum \vec{M}_A^{ext} = J_A \vec{\alpha}_1 \Rightarrow (-T + 3aF_{at_1})\vec{k} = \frac{3m(3a)^2}{2}(-\alpha_1\vec{k}) \Rightarrow \frac{27ma^2}{2}\alpha_1 = T - 3aF_{at_1} \quad (1) \quad (0,2)$$

TR:

$$\vec{R}_{ext} = 3m\vec{a}_A \Rightarrow \left(F_{at_1} - \frac{3}{5}F_{AB}\right)\vec{i} + \left(N_1 - 3mg + \frac{4}{5}F_{AB}\right)\vec{j} = 3m(-3a\alpha_1\vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} F_{at_1} - \frac{3}{5}F_{AB} = 9ma\alpha_1 & (2) \quad (0,2) \\ N_1 - 3mg + \frac{4}{5}F_{AB} = 0 & (3) \quad (0,2) \end{cases}$$

d) TQMA (polo B):

$$\sum \vec{M}_B^{ext} = J_B \vec{\alpha}_2 \Rightarrow -aF_{at_2}\vec{k} = \frac{ma^2}{2}(-3\alpha_1\vec{k}) \Rightarrow \frac{3ma}{2}\alpha_2 = F_{at_2} \quad (4) \quad (0,2)$$

TR:

$$\vec{R}^{ext} = m\vec{a}_B \Rightarrow \left(-F_{at_2} + \frac{3}{5}F_{AB}\right)\vec{i} + \left(N_2 - mg - \frac{4}{5}F_{AB}\right)\vec{j} = m(-3a\alpha_1\vec{i}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5}F_{AB} - F_{at_2} = -3ma\alpha_1 & (5) \quad (0,2) \\ N_2 - mg - \frac{4}{5}F_{AB} = 0 & (6) \quad (0,2) \end{cases}$$

d) Sistema de Equações (1) - (6), em termos das incógnitas α_1 , F_{at_1} , F_{at_2} , N_1 , N_2 , F_{AB} .

