ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

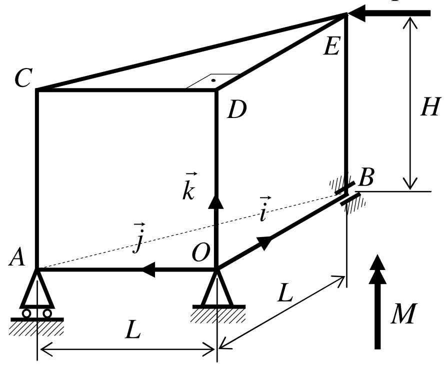
Mecânica I PME 3100 Prova nº Rec. Data 18 / 02 / 2025

Duração da Prova: 120 minutos

Não é permitido o porte de calculadoras, "tablets", celulares e dispositivos similares.

Questão 1 (3,0 pontos): O prisma reto, homogêneo, de altura H, de **massa m** e **peso desprezível**, tem seu topo formado por um triângulo isósceles e retângulo CDE, de catetos de comprimento L. No vértice A temos um apoio simples, sobre o plano $O\vec{i}\,\vec{j}$, no vértice O temos uma articulação simples, e no vértice B temos um anel curto, cujo eixo é paralelo ao versor $\vec{i}$. Neste prisma é aplicado um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$, e no vértice E é aplicada uma força $\vec{F} = F\vec{j}$.

Sólido *ACDOBE* no formato de prisma reto

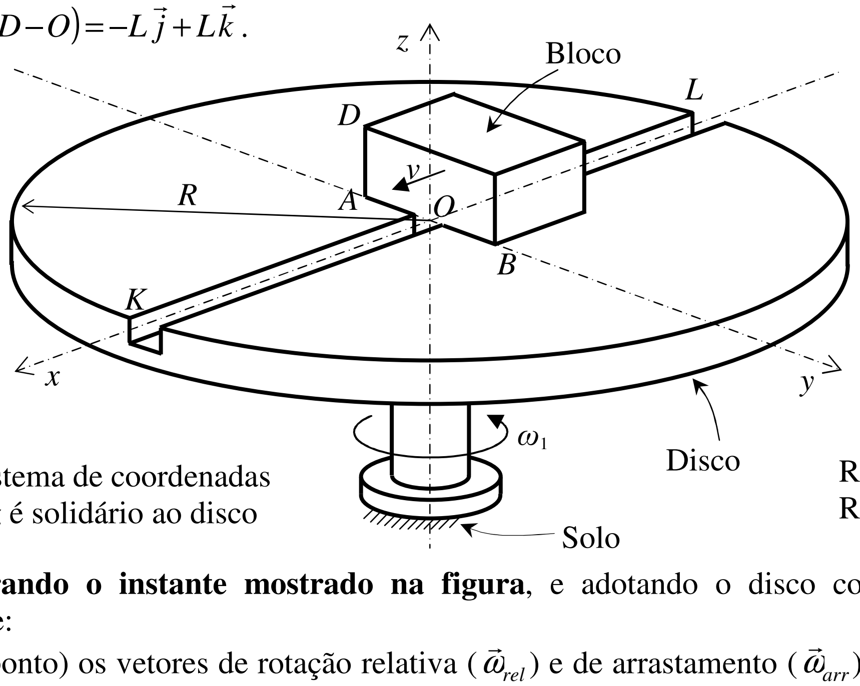


a – (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de corpo livre do prisma. Observe que o sistema **não** está sujeito à aceleração da gravidade.

b – (1,5 ponto) Escreva as equações de equilíbrio e calcule as reações vinculares.

c – (0,5 ponto) Determine as coordenadas do centro de massa G do prisma.

Questão 2 (3,0 pontos): No sistema mostrado, o bloco tem seu movimento em relação ao disco limitado por uma ranhura KL, de modo que sua velocidade em relação ao disco é $\vec{v} = v\vec{i}$, com v positivo e constante. O disco, de centro O e raio R, tem sua face plana paralela ao plano Oxy. Em relação ao solo, o vetor de rotação do disco é $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$ (no instante mostrado na figura), e o seu vetor aceleração angular é $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$. No instante mostrado na figura, o vértice D do bloco ocupa a posição $(D-O) = -L\vec{j} + L\vec{k}$.



O sistema de coordenadas *Oxyz* é solidário ao disco

Referencial fixo: solo
Referencial móvel: disco

Considerando o instante mostrado na figura, e adotando o disco como referencial móvel, determine:

a – (0,5 ponto) os vetores de rotação relativa ($\vec{\omega}_{rel}$) e de arrastamento ($\vec{\omega}_{arr}$) do bloco, bem como o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{bl}$) do bloco;

b – (1,0 ponto) as velocidades relativa ($\vec{v}_{D,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{D,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_D$) do ponto D;

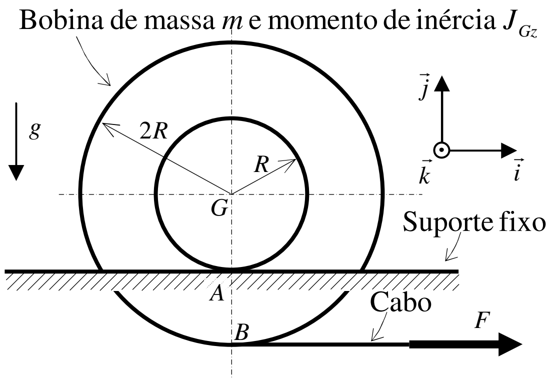
c – (1,5 ponto) as acelerações relativa ($\vec{a}_{D,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{D,arr}$) e complementar (de Coriolis, $\vec{a}_{D,com}$) do ponto D;

Questão 3 (4,0 pontos): Considere uma bobina homogênea com um cabo enrolado conforme mostrado na figura. O raio de enrolamento é $2R$, e o raio de rolamento é R. A massa da bobina é m, seu momento de inércia em relação ao seu centro de massa G é J_{Gz}. Não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo, e nem entre a bobina e o cabo. No instante inicial o sistema está em repouso e é aplicada no cabo uma força $\vec{F} = F\vec{i}$, com $F > 0$, conhecida. Nesse instante inicial:

a – (1,0 ponto) desenhe o diagrama de corpo livre da bobina;

b – (0,5 ponto) usando relações cinemáticas, determine a relação entre a componente escalar a_{Gx} da aceleração do centro de massa da bobina na direção $\vec{i}$ e a componente escalar α do vetor aceleração angular da bobina na direção $\vec{k}$;

c – (1,0 ponto) usando os teoremas da Resultante e da Quantidade de Movimento Angular, determine a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa da bobina em função de F e dos parâmetros do sistema, e verifique se o cabo irá enrolar ou desenrolar;



d – (0,5 ponto) determine o máximo valor de F tal que não haja escorregamento, considerando que o coeficiente de atrito entre a bobina e o suporte fixo é μ.

Para o item a seguir, considere que não há escorregamento, e suponha um instante posterior, quando a velocidade do ponto B é $\vec{v}_B = v\vec{i}$, com $v > 0$. Nesse instante posterior:

e – (0,5 ponto) localize o CIR da bobina, e, a partir dessa informação, determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da bobina, em função de v e dos parâmetros do sistema;

f – (0,5 ponto) determine a energia cinética T da bobina, em função de v e dos parâmetros do sistema.

GABARITO

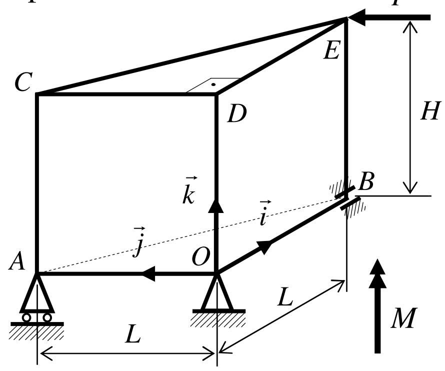
Questão 1 (3,0 pontos): O prisma reto, homogêneo, de altura H, de **massa m** e **peso desprezível**, tem seu topo formado por um triângulo isóceles e retângulo CDE, de catetos de comprimento L. No vértice A temos um apoio simples, sobre o plano $O\vec{i}\,\vec{j}$, no vértice O temos uma articulação simples, e no vértice B temos um anel curto, cujo eixo é paralelo ao versor $\vec{i}$. Neste prisma é aplicado um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$, e no vértice E é aplicada uma força $\vec{F} = F\vec{j}$.

a – (1,0 ponto) Desenhe o diagrama de corpo livre do prisma. Observe que o sistema **não** está sujeito à aceleração da gravidade.

b – (1,5 ponto) Escreva as equações de equilíbrio e calcule as reações vinculares.

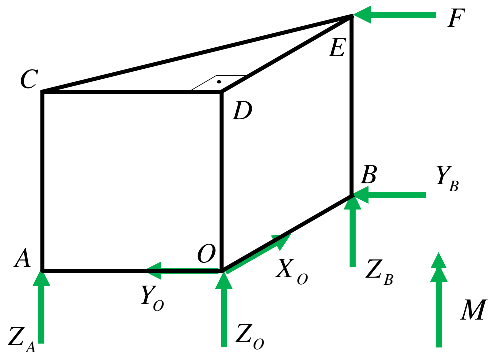
c – (0,5 ponto) Determine as coordenadas do centro de massa G do prisma.

Sólido $ACDOBE$ no formato de prisma reto



Solução

a) Diagrama de corpo livre:



b) Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_O = 0} \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B + Y_O + F = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A + Z_B + Z_O = 0 \qquad (3)$$

Escolhendo o polo O:

$$\sum M_{Ox} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A L - FH = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_A = \frac{FH}{L}} \qquad (4)$$

$$\sum M_{Oy} = 0 \quad \Rightarrow \quad -Z_B L = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_B = 0} \qquad (5)$$

$$\sum M_{Oz} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_B L + FL + M = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_B = -F - \frac{M}{L}} \qquad (6)$$

Substituindo (6) em (2):

$$-F - \frac{M}{L} + Y_O + F = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_O = \frac{M}{L}}$$

Substituindo (5) e (4) em (3):

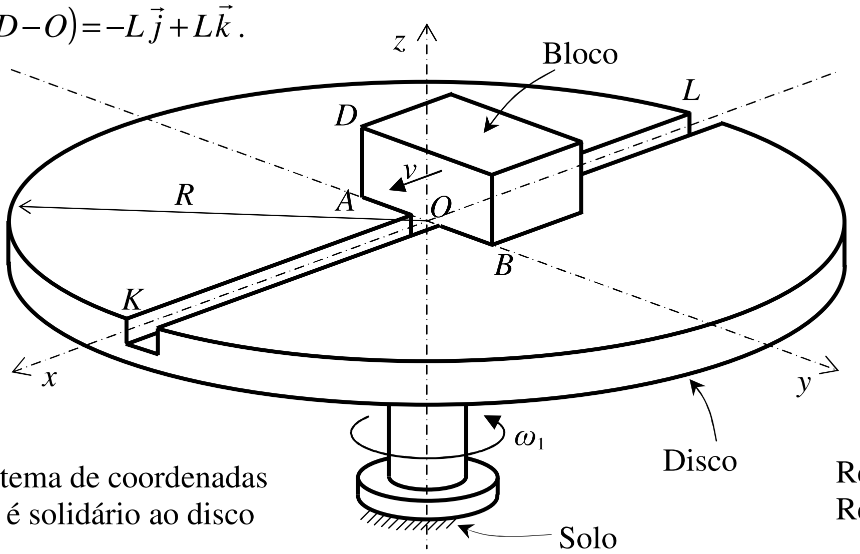
$$\frac{FH}{L} + 0 + Z_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_O = -\frac{FH}{L}}$$

c) Sendo um prisma reto, as coordenadas x e y de seu centro de massa coincidem com as coordenadas do centro de massa da figura plana que compõe a base (triângulo: 1/3 da altura) e pela simetria, a coordenada z está a meia altura da base:

$$\boxed{G - O = \frac{L}{3}\vec{i} + \frac{L}{3}\vec{j} + \frac{H}{2}\vec{k}}$$

GABARITO

Questão 2 (3,0 pontos): No sistema mostrado, o bloco tem seu movimento em relação ao disco limitado por uma ranhura *KL*, de modo que sua velocidade em relação ao disco é $\vec{v}=v\vec{i}$, com *v* positivo e constante. O disco, de centro *O* e raio *R*, tem sua face plana paralela ao plano *Oxy*. Em relação ao solo, o vetor de rotação do disco é $\vec{\omega}_1=\omega_1\vec{k}$ (no instante mostrado na figura), e o seu vetor aceleração angular é $\vec{\alpha}=\alpha\vec{k}$. No instante mostrado na figura, o vértice *D* do bloco ocupa a posição $(D-O)=-L\vec{j}+L\vec{k}$.



O sistema de coordenadas *Oxyz* é solidário ao disco

Referencial fixo: solo
Referencial móvel: disco

Considerando o instante mostrado na figura, e adotando o disco como referencial móvel, determine:

a – (0,5 ponto) os vetores de rotação relativa ($\vec{\omega}_{rel}$) e de arrastamento ($\vec{\omega}_{arr}$) do bloco, bem como o vetor aceleração angular absoluto ($\vec{\alpha}_{bl}$) do bloco;

b – (1,0 ponto) as velocidades relativa ($\vec{v}_{D,rel}$), de arrastamento ($\vec{v}_{D,arr}$) e absoluta ($\vec{v}_D$) do ponto *D*;

c – (1,5 ponto) as acelerações relativa ($\vec{a}_{D,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{D,arr}$) e complementar (de Coriolis, $\vec{a}_{D,com}$) do ponto *D*;

Solução

a) Observando a figura e o enunciado:

$\boxed{\vec{\omega}_{rel}=\vec{0}}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{\vec{\omega}_{arr}=\omega_1\vec{k}}$

Composição de movimentos: $\vec{\alpha}_{abs}=\vec{\alpha}_{rel}+\vec{\alpha}_{arr}+\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{\omega}_{rel}$

$\vec{\alpha}_{bl}=\vec{0}+\alpha\vec{k}+\omega_1\vec{k}\wedge 0\Rightarrow\boxed{\vec{\alpha}_{bl}=\alpha\vec{k}}$

b) Conforme o enunciado, devemos adotar o disco como referencial móvel. Notando que o movimento relativo do bloco é de translação: $\boxed{\vec{v}_{D,rel}=v\vec{i}}$

Movimento de arrastamento: $\vec{v}_{D,arr}=\vec{v}_O+\vec{\omega}_1\wedge(D=O)=\vec{0}+\omega_1\vec{k}\wedge\left(-L\vec{j}+L\vec{k}\right)\Rightarrow\boxed{\vec{v}_{D,arr}=\omega_1 L\vec{i}}$

Composição de movimentos: $\vec{v}_D=\vec{v}_{D,arr}+\vec{v}_{D,rel}\Rightarrow\boxed{\vec{v}_D=(\omega_1 L+v)\vec{i}}$

c) Movimento relativo: conforme o enunciado, *v* é constante, logo temos $\boxed{\vec{a}_{D,rel}=\vec{0}}$

Movimento de arrastamento: $\vec{a}_{D,arr}=\vec{a}_{O,arr}+\vec{\alpha}\wedge(D-O)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(D-O)]$

$\vec{a}_{D,arr}=\vec{0}+\alpha\vec{k}\wedge\left(-L\vec{j}+L\vec{k}\right)+\omega_1\vec{k}\wedge\left[\omega_1\vec{k}\wedge\left(-L\vec{j}+L\vec{k}\right)\right]\Rightarrow\boxed{\vec{a}_{D,arr}=\alpha L\vec{i}+\omega_1^2 L\vec{j}}$

Aceleração complementar: $\vec{a}_{D,com}=2\vec{\omega}_{arr}\wedge\vec{v}_{D,rel}=2\omega_1\vec{k}\wedge v\vec{i}\Rightarrow\boxed{\vec{a}_{D,com}=2\omega_1 v\vec{j}}$

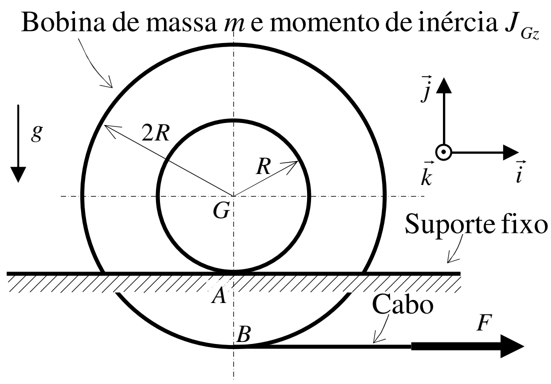
GABARITO

Questão 3 (4,0 pontos): Considere uma bobina homogênea com um cabo enrolado conforme mostrado na figura. O raio de enrolamento é $2R$, e o raio de rolamento é R. A massa da bobina é m, seu momento de inércia em relação ao seu centro de massa G é J_{Gz}. Não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo, e nem entre a bobina e o cabo. No instante inicial o sistema está em repouso e é aplicada no cabo uma força $\vec{F} = F\vec{i}$, com $F > 0$, conhecida. Nesse instante inicial:

a – (1,0 ponto) desenhe o diagrama de corpo livre da bobina;

b – (0,5 ponto) usando relações cinemáticas, determine a relação entre a componente escalar a_{Gx} da aceleração do centro de massa da bobina na direção $\vec{i}$ e a componente escalar α do vetor aceleração angular da bobina na direção $\vec{k}$;

c – (1,0 ponto) usando os teoremas da Resultante e da Quantidade de Movimento Angular, determine a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa da bobina em função de F e dos parâmetros do sistema, e verifique se o cabo irá enrolar ou desenrolar;



d – (0,5 ponto) determine o máximo valor de F tal que não haja escorregamento, considerando que o coeficiente de atrito entre a bobina e o suporte fixo é μ.

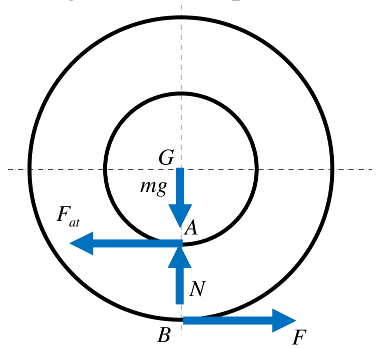
Para o item a seguir, considere que não há escorregamento, e suponha um instante posterior, quando a velocidade do ponto B é $\vec{v}_B = v\vec{i}$, com $v > 0$. Nesse instante posterior:

e – (0,5 ponto) localize o CIR da bobina, e, a partir dessa informação, determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da bobina, em função de v e dos parâmetros do sistema;

f – (0,5 ponto) determine a energia cinética T da bobina, em função de v e dos parâmetros do sistema.

Solução

a) Diagrama de corpo livre



b) Cinemática (rola sem escorregar):

$$a_{Gx} = -\alpha R$$

c) Teorema da Resultante:

$$ma_{Gx} = \sum F_x \Rightarrow ma_{Gx} = F - F_{at}$$

$$ma_{Gy} = \sum F_y \Rightarrow m0 = N - mg \Rightarrow N = mg$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular:

$$J_{Gz}\alpha = M_{Gz} \Rightarrow J_{Gz}\alpha = F2R - F_{at}R$$

Portanto, como $\alpha = -\dfrac{a_{Gx}}{R}$: $J_{Gz}\left(-\dfrac{a_{Gx}}{R}\right) = F2R - F_{at}R \Rightarrow \dfrac{J_{Gz}}{R^2}a_{Gx} = -2F + F_{at}$

Somando com: $ma_{Gx} = +F - F_{at}$

Resulta em: $\left(m + \dfrac{J_{Gz}}{R^2}\right)a_{Gx} = -F \Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = -\dfrac{F}{m + \dfrac{J_{Gz}}{R^2}}\vec{i}}$

GABARITO

Como consequência: $\alpha = \dfrac{F}{\left(m + \dfrac{J_{Gz}}{R^2}\right)R}\vec{k}$. Como o sistema parte do repouso e o vetor aceleração angular é no sentido positivo de $\vec{k}$, a bobina irá girar no sentido anti-horário, ou seja, o cabo irá **desenrolar**.

d) Usando a equação:

$$ma_{Gx} = F - F_{at} \Rightarrow F_{at} = F - m\left(-\dfrac{F}{m + \dfrac{J_{Gz}}{R^2}}\right) \Rightarrow F_{at} = \left(1 + \dfrac{m}{m + \dfrac{J_{Gz}}{R^2}}\right)F \Rightarrow$$

$$F_{at} = \left(1 + \dfrac{mR^2}{mR^2 + J_{Gz}}\right)F \le \mu N$$

No limite do escorregamento temos que $F_{at} = \mu N$:

$$\mu N = \left(1 + \dfrac{mR^2}{mR^2 + J_{Gz}}\right)F_{\max} \Rightarrow \mu mg = \left(1 + \dfrac{mR^2}{mR^2 + J_{Gz}}\right)F_{\max} \Rightarrow \boxed{F_{\max} = \dfrac{\mu mg}{\left(1 + \dfrac{mR^2}{mR^2 + J_{Gz}}\right)}}$$

Considerando que não há escorregamento e supondo um instante posterior, quando a velocidade do ponto B é $\vec{v}_B = v\vec{i}$, com $v > 0$:

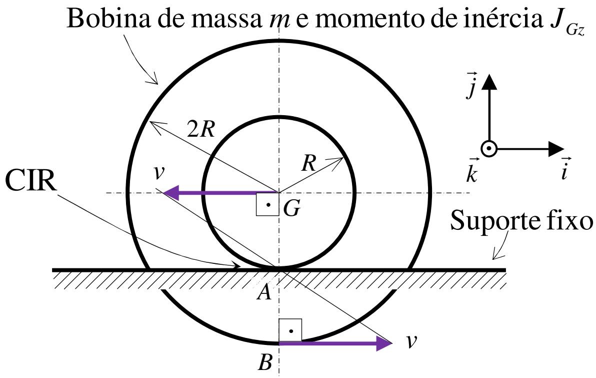
e) O CIR da bobina é o ponto A, já que não há escorregamento, e o suporte é fixo.

Pela semelhança de triângulos, temos:

$\vec{v}_G = -v\vec{i}$

E pela propriedade do CIR:

$\vec{\omega} = \dfrac{v}{R}\vec{k}$



f) Enegia cinética da bobina

Como a bobina tem massa m e momento de inércia J_{Gz} em relação ao centro de massa, e considerando o resultado do item anterior:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\left(\frac{v}{R}\right)^2$$