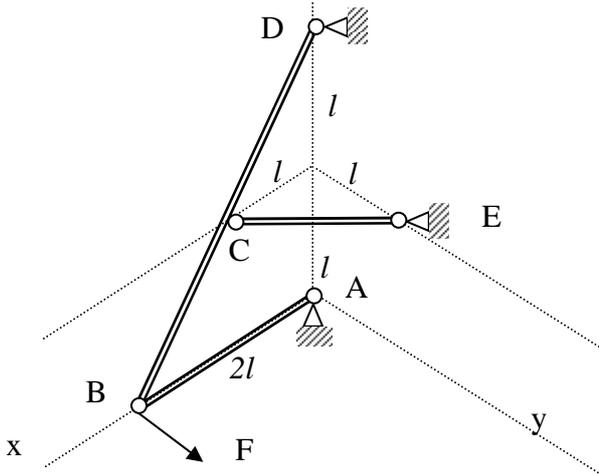




PME 2100 – MECÂNICA A – Recuperação – 03 de fevereiro de 2009

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)

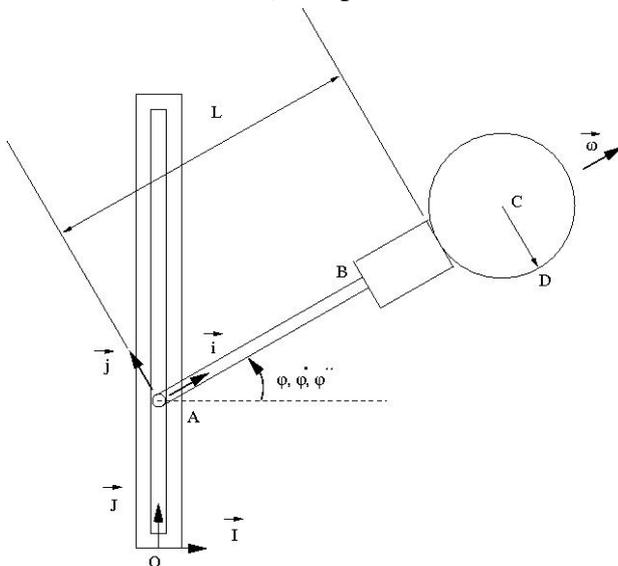
1ª Questão (3,0 pontos): Na estrutura esquematizada abaixo, a barra BD é articulada nos pontos B e D , a barra AB é articulada em A e B e a barra CE é articulada em C e E . Na articulação B encontra-se aplicada a força $F \vec{j}$. Pedem-se



(a) Os diagramas de corpo livre das barras AB , CE e BD .

(b) As forças atuantes na barra BD , nos pontos B , C e D .

2ª Questão (3,0 pontos) : A extremidade A da barra AB desliza dentro de uma guia vertical com velocidade $\vec{v}_A = v \vec{J}$ (v constante); a barra gira ao redor do eixo z (ortogonal ao plano do papel e que passa por A) com vetor de rotação $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi} \vec{K}$ e vetor de aceleração angular $\vec{\ddot{\phi}} = \ddot{\phi} \vec{K}$. Na extremidade B da barra há um motor que gira a esfera de centro C e raio R com um vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega \vec{i}$ relativo à barra, de módulo constante. O ponto D pertence à esfera e sua posição é tal que $D - C = -R \vec{j}$ no instante considerado. Adotando a barra AB como referencial móvel e expressando as grandezas vetoriais na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pedem-se:



a) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto D ;

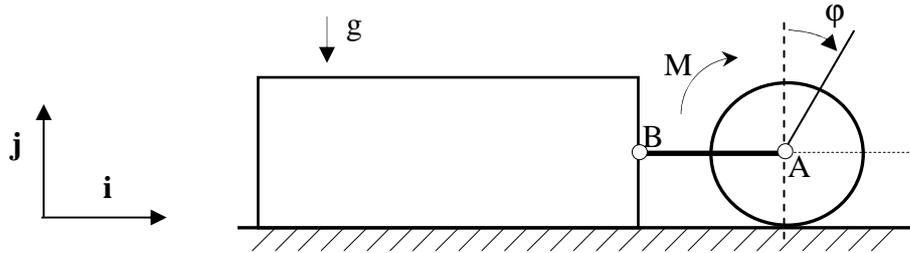
b) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto D ;

c) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto C ;

d) O vetor de aceleração angular da esfera de centro C .



3ª Questão (4,0 pontos): O sistema da figura é composto por um disco homogêneo de centro A , massa m_A e raio R unido ao bloco de massa m_B por meio de uma haste AB de massa desprezível. Admite-se que o coeficiente de atrito nos contactos entre o disco e o solo e entre o bloco e o solo seja μ , que o atrito na articulação em A seja desprezível e que o sistema parta do repouso ($\varphi = 0$ e $\dot{\varphi} = 0$) sob a ação de um binário de momento M constante. Nessas condições, pede-se:



Dado:

$$J_{A_z} = \frac{m_A R^2}{2}$$

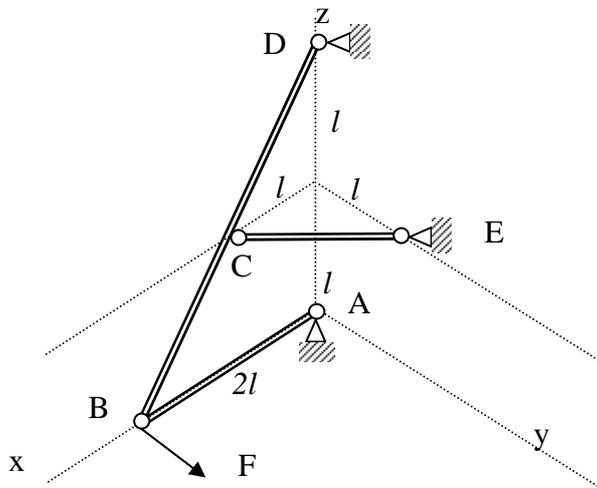
- Determinar a máxima aceleração a_A (horizontal) do ponto A que pode ser imposta ao sistema sem que haja escorregamento entre o disco e o solo, supondo que o sistema se mova para a direita.
- Determinar a expressão da aceleração horizontal a_A do ponto A e da força F_{AB} na barra AB .
- Determinar a energia cinética T do sistema e o trabalho W realizado pelos esforços atuantes no mesmo para levá-lo do estado inicial de repouso a um estado com φ e $\dot{\varphi}$ arbitrários, supondo que não haja escorregamento entre o disco e solo e lembrando que M é constante.
- Usando o resultado do item c determinar a velocidade angular $\dot{\varphi}$ do disco em função de φ .



PME 2100 – MECÂNICA A – Gabarito da Prova de Recuperação

1ª Questão: (3,0 pontos) Na estrutura esquematizada abaixo, a barra BD é articulada nos pontos B e D , a barra AB é articulada em A e B e a barra CE é articulada em C e E . Na articulação B encontra-se aplicada a força $F \vec{j}$. Pede-se:

- (a) Os diagramas de corpo livre das barras AB , CE e BD . (1,0 ponto)
- (b) As forças atuantes na barra BD , nos pontos B , C e D . (2,0 pontos)



SOLUÇÃO 1

Analisando o equilíbrio das barras AB , CE e BD , notamos que:

1. As barras AB e CE estão em equilíbrio sob a ação de duas forças aplicadas às suas extremidades. Logo, essas forças devem ser iguais e opostas, conforme indicado nos diagramas de corpo livre da Figura 1. Naturalmente, os sentidos serão determinados oportunamente, após a resolução do sistema de equações de equilíbrio.

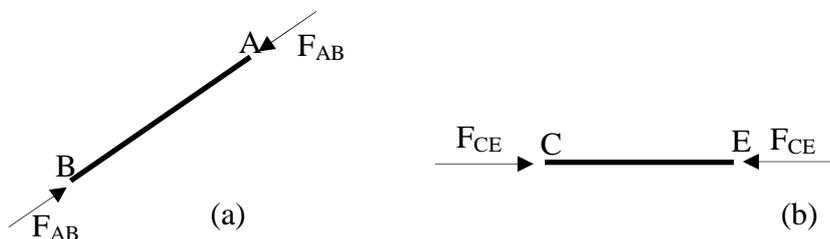


Figura 1: Diagramas de corpo livre das barras: (a) AB ; (b) CE .

2. A barra BD encontra-se em equilíbrio sob a ação de três forças aplicadas nos pontos B , C e D . Logo essas forças são, necessariamente, coplanares, e o plano em que atuam é o plano BDE , pois os 3 pontos de aplicação das forças (ou, seja, B , C , D) situam-se sobre a reta BD e a direção de uma das forças (\vec{F}_C) é conhecida (CE). Resta, portanto, apenas verificar se se trata de um sistema de forças concorrentes ou paralelas (vide Figura 2).

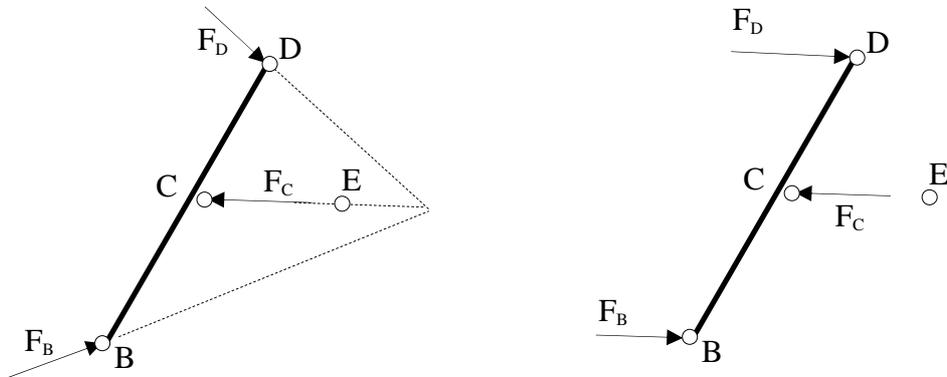


Figura 2: Análise das forças atuantes na barra BD : a) 1ª hipótese: concorrentes; b) 2ª hipótese: paralelas.

Para tanto, analisamos a articulação B (vide Figura 3) sobre a qual se aplica uma força externa \vec{F}_j contida no plano Axy . Essa força é equilibrada pelas duas forças internas atuantes nas extremidades das barras AB e BD . A primeira delas (\vec{F}_{AB}) tem a direção de AB , ou seja, \vec{i} ; portanto, \vec{F}_{AB} e \vec{F}_j encontram-se no mesmo plano Axy . Consequentemente, a terceira força (\vec{F}_B) deverá também estar no plano Axy para que o sistema de forças concorrentes $\{ \vec{F}_j, \vec{F}_{AB}, \vec{F}_B \}$ se equilibre.

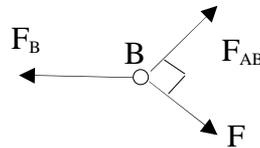


Figura 3: Equilíbrio da articulação B .

Conclui-se, assim, que a linha de ação da força \vec{F}_B se encontra na intersecção dos planos Axy e BDE . Observando a Figura 1, notamos que essa linha tem a direção de CE (ou seja, $\vec{j} - \vec{i}$).

Aplicando-se as equações de equilíbrio de forças atuantes na articulação B (vide Figura 3), resultam:

$$F_B \cos(45^\circ) = F \Rightarrow F_B = F\sqrt{2}$$

$$F_{AB} = F_B \sin(45^\circ) = F$$

A análise precedente nos permitiu concluir que o sistema de 3 forças atuantes na barra BD , ou seja, $\{ \vec{F}_B, \vec{F}_D, \vec{F}_C \}$ é um sistema de forças paralelas, conforme ilustrado na Figura 2-b.

Para calcular as magnitudes dessas forças, é suficiente aplicar as equações de equilíbrio estático no plano BDE . Todavia, uma simples inspeção da geometria do sistema (vide Figura 4) nos permite concluir que, por causa da simetria, as forças \vec{F}_B e \vec{F}_D são iguais e têm módulo $\frac{1}{2}|\vec{F}_C|$. Em outras

palavras: $F_C = 2\sqrt{2}F$

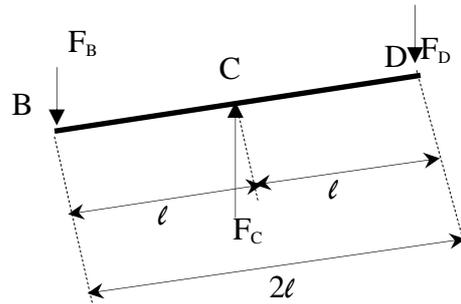


Figura 4: Forças atuantes na barra BD (plano BDE).

SOLUÇÃO 2:

Constrói-se o diagrama de corpo livre das 3 barras e, sem uma análise mais detalhada do equilíbrio da barra BD (conforme descrito na “Solução 1”), aplicam-se as equações de equilíbrio estático ao nó B (vide Figura 5) e às barras AB , CE e BD (vide Figura 6).

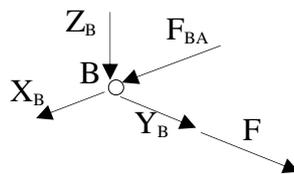


Figura 5: Equilíbrio do nó B .

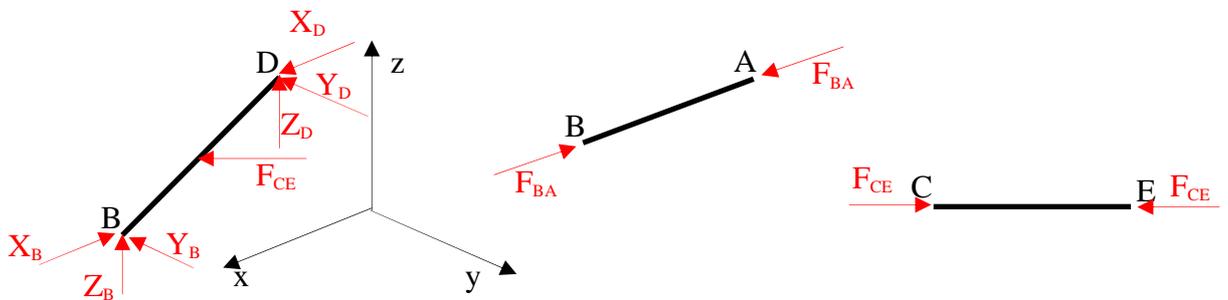


Figura 6: Diagrama de corpo livre das barras BD , AB e CE .

Considerando-se o equilíbrio do nó B , resultam as equações (1) a (3) a seguir.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_B + F_{BA} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B + F = 0 \Rightarrow Y_B = -F \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -Z_B = 0 \Rightarrow Z_B = 0 \quad (3)$$

Considerando-se o equilíbrio da barra BD , resultam as seguintes equações (4) a (9) abaixo:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -X_B + X_D + F_{CE} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -Y_B - Y_D - F_{CE} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (5)$$



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow Z_B + Z_D = 0 \Rightarrow Z_D = 0 \quad (6)$$

$$\sum M_{Bx} = 0 \Rightarrow F_{CE} \frac{\sqrt{2}}{2} \ell + Y_D 2\ell = 0 \quad (7)$$

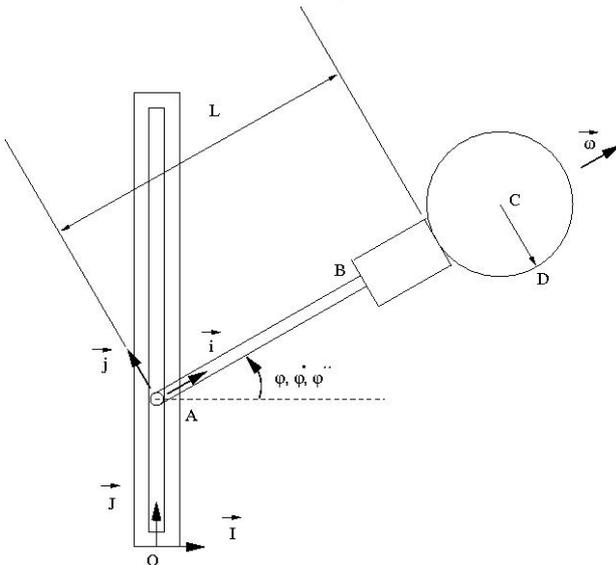
$$\sum M_{By} = 0 \Rightarrow F_{CE} \frac{\sqrt{2}}{2} \ell + X_D 2\ell = 0 \quad (8)$$

$$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow F_{CE} \frac{\sqrt{2}}{2} \ell + Y_D 2\ell = 0 \quad (9)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (1) a (9) acima, obtêm-se:

$$\begin{aligned} X_B &= F & Y_B &= -F & Z_B &= 0 \\ X_D &= -F & Y_D &= -F & Z_D &= -F \\ F_{CE} &= 2\sqrt{2}F \end{aligned}$$

2ª Questão: (3,0 pontos) A extremidade A da barra AB desliza dentro de uma guia vertical com velocidade $\vec{v}_A = v\vec{J}$ (v constante); a barra gira ao redor do eixo z (ortogonal ao plano do papel e que passa por A) com vetor de rotação $\vec{\dot{\phi}} = \dot{\phi}\vec{K}$ e vetor de aceleração angular $\vec{\ddot{\phi}} = \ddot{\phi}\vec{K}$. Na extremidade B da barra há um motor que gira a esfera de centro C e raio R com um vetor de rotação $\vec{\omega} = \omega\vec{i}$ relativo à barra, de módulo constante. O ponto D pertence à esfera e sua posição é tal que $D - C = -R\vec{j}$ no instante considerado. Adotando a barra AB como referencial móvel e expressando as grandezas vetoriais na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pedem-se:



- (1,0 ponto) As velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto D;
- (1,0 ponto) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto D;
- (0,5 ponto) As acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do ponto C;
- (0,5 ponto) O vetor de aceleração angular da esfera de centro C.

SOLUÇÃO:

Inicialmente estabelecemos a transformação geométrica entre os sistemas de coordenadas $\vec{i} \vec{j} \vec{k}$ e $\vec{I} \vec{J} \vec{K}$, ou seja:



$$\begin{cases} \vec{I} = \cos \varphi \vec{i} - \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{J} = \sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{K} = \vec{k} \end{cases}$$

Notemos que, para um observador fixo ao referencial ligado à barra AB , a esfera realiza um movimento puro de rotação em torno do eixo \vec{i} . Dessa forma, para esse observador, a velocidade do ponto D é dada por:

$$\vec{V}_{D,rel} = \vec{V}_{C,rel} + \vec{\omega} \wedge (D - C) = \vec{\omega} \wedge (-R\vec{j}) = -\omega R\vec{k}$$

Para calcular a velocidade de arrastamento do ponto D “fixamos” a esfera à barra AB , de modo a que ambas se comportem como um único corpo rígido. Com isso, tem-se:

$$\vec{V}_{D,arr} = \vec{V}_A + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge (D - A) = V\vec{j} + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge [(L + R)\vec{i} - R\vec{j}] = (V \sin \varphi + \dot{\varphi} R)\vec{i} + [V \cos \varphi + \dot{\varphi}(R + L)]\vec{j}$$

Logo, a velocidade absoluta do ponto D , será:

$$\vec{V}_{D,abs} = \vec{V}_{D,rel} + \vec{V}_{D,arr} = (V \sin \varphi + \dot{\varphi} R)\vec{i} + [V \cos \varphi + \dot{\varphi}(R + L)]\vec{j} - \omega R\vec{k}$$

Analisando-se o movimento da esfera em relação ao referencial fixo à barra AB , observamos que os pontos da esfera não situados no eixo AB realizam movimento circular uniforme ao longo do plano normal ao eixo \vec{i} , de modo que a aceleração relativa do ponto D corresponde à sua aceleração centrípeta, ou seja:

$$\vec{a}_{D,rel} = \omega^2 R\vec{j}$$

Para calcular a aceleração de arrastamento do ponto D mais uma vez “fixamos” a esfera à barra AB e aplicamos a fórmula geral da aceleração de um corpo rígido, ou seja:

$$\vec{a}_{D,arr} = \vec{a}_A + \ddot{\varphi} \wedge (D - A) + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge (\dot{\varphi} \vec{k} \wedge (D - A)) = (\ddot{\varphi} R - \dot{\varphi}^2 (R + L))\vec{i} + (\ddot{\varphi}(R + L) + \dot{\varphi}^2 R)\vec{j}$$

A aceleração complementar do ponto D será:

$$\vec{a}_{D,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{rel} = 2\dot{\varphi} \vec{k} \wedge (-\omega R\vec{k}) = \vec{0}$$

Portanto, a aceleração absoluta do ponto D será:

$$\vec{a}_{D,abs} = (\ddot{\varphi} R - \dot{\varphi}^2 (R + L))\vec{i} + (\ddot{\varphi}(R + L) + \dot{\varphi}^2 R - \omega^2 R)\vec{j}$$

Analisando-se de forma similar o movimento do ponto C , tem-se:

$$\vec{a}_{C,rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{C,arr} = \vec{a}_A + \ddot{\varphi} \vec{k} \wedge (C - A) + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge (\dot{\varphi} \vec{k} \wedge (C - A)) = \ddot{\varphi}(R + L)\vec{j} - \dot{\varphi}^2 (R + L)\vec{i}$$

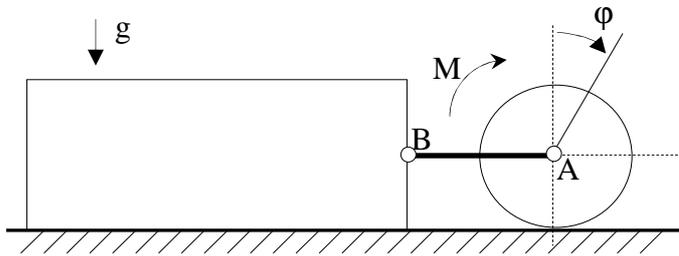
$$\vec{a}_{C,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{C,abs} = \ddot{\varphi}(R + L)\vec{j} - \dot{\varphi}^2 (R + L)\vec{i}$$

O vetor de aceleração angular da esfera é dado por:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \alpha_{Resal} = \ddot{\varphi} \vec{k} + \dot{\varphi} \vec{k} \wedge \vec{\omega} = \ddot{\varphi} \vec{k} + \dot{\varphi} \omega \vec{j}$$

3ª Questão: (4,0 pontos) O sistema da figura é composto por um disco homogêneo de centro A , massa m_A e raio R unido ao bloco de massa m_B por meio de uma haste AB de massa desprezível. Admite-se que o coeficiente de atrito nos contactos entre o disco e o solo e entre o bloco e o solo é μ , que o atrito na articulação em A é desprezível e que o sistema parta do repouso ($\varphi = 0$ e $\dot{\varphi} = 0$) sob a ação de um binário de momento M constante. Nessas condições, pede-se:



Dado:

$$J_{A_z} = \frac{m_A R^2}{2}$$

- (1,0 ponto) Determinar a máxima aceleração a_A (horizontal) do ponto A que pode ser imposta ao sistema sem que haja escorregamento entre o disco e o solo, supondo que o sistema se mova para a direita.
- (1,0 ponto) Determinar a aceleração horizontal a_A do ponto A e a força F_{AB} na barra AB.
- (1,0 ponto) Determinar a energia cinética T do sistema e o trabalho W realizado pelos esforços atuantes no mesmo para levá-lo do estado inicial de repouso a um estado com φ e $\dot{\varphi}$ arbitrários, supondo que não haja escorregamento entre o disco e solo e lembrando que M é constante.
- (1,0 ponto) Usando o resultado do item c) determinar a velocidade angular $\dot{\varphi}$ do disco em função de φ

SOLUÇÃO

Para que possamos aplicar os teoremas da Dinâmica ao sistema considerado, construiremos os diagramas de corpo livre dos dois corpos dotados de massa e inércia – o bloco e o disco (Fig. 7).

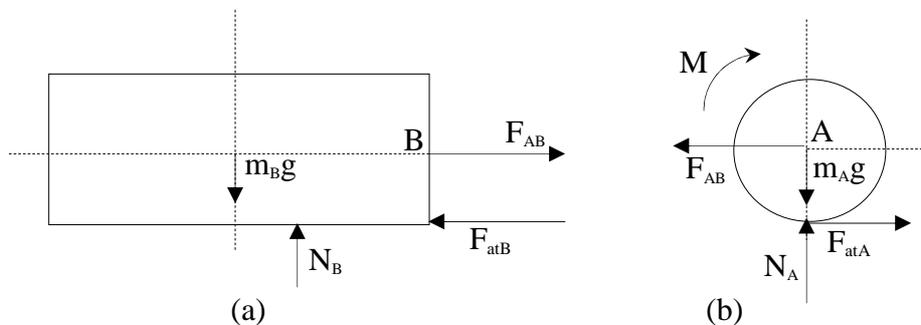


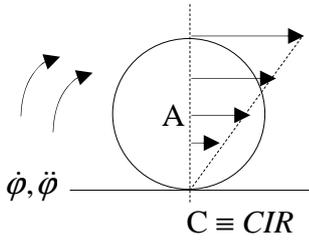
Figura 7: Diagramas de corpo livre: (a) do bloco; (b) do disco.

Notemos que a barra AB, de massa desprezível, se comporta apenas como um vínculo cinemático entre os movimentos do bloco e do disco, impondo aos pontos A e B as seguintes restrições:

$$v_A = v_B \quad (1)$$

$$a_A = a_B \quad (2)$$

Além disso, como o disco rola sem escorregar, o ponto de contacto do mesmo com o solo corresponde ao CIR (vide Fig. 8).



Portanto, o centro A do disco realiza movimento horizontal de translação com velocidade e aceleração dadas, respectivamente, por:

$$v_A = \dot{\phi}R \quad (3)$$

$$a_A = \ddot{\phi}R \quad (4)$$

Figura 8: Movimento do disco.

Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) (vide Fig. 2-a) ao movimento do bloco, obtém-se:

$$m_B a_B = F_{AB} - F_{atB} \Rightarrow F_{AB} = m_B a_B + F_{atB} \quad (5)$$

$$0 = N_B - m_B g \Rightarrow N_B = m_B g \quad (6)$$

Como o bloco encontra-se em movimento, podemos afirmar que a força de atrito atuante sobre ele é dada por:

$$F_{atB} = \mu N \Rightarrow F_{atB} = \mu m_B g \quad (7)$$

(Na equação acima, admitimos que os coeficientes de atrito estático (μ) e dinâmico (μ_d) são iguais)

Substituindo-se (7) em (5), resulta:

$$F_{AB} = m_B (a_B + \mu g) \quad (8)$$

Aplicando-se o TMB ao movimento do disco (vide Fig. 2-b), obtém-se:

$$m_A a_A = F_{atA} - F_{AB} \quad (9)$$

$$0 = N_A - m_A g \Rightarrow N_A = m_A g \quad (10)$$

Substituindo-se (8) em (9), resulta:

$$F_{atA} = m_A a_A + m_B a_B + m_B \mu g \quad (11)$$

Para que não haja escorregamento entre o disco e solo deve-se ter:

$$F_{atA} \leq \mu N_A = \mu m_A g \quad (12)$$

Substituindo-se (11) em (12), resulta:

$$a_A \leq \frac{\mu g (m_A - m_B)}{m_A + m_B} \quad (13)$$

Portanto, a máxima aceleração a_A que pode ser imposta ao sistema, sem que haja escorregamento entre o disco e o solo, é:

$$(a_A)_{\max} = \frac{\mu g (m_A - m_B)}{m_A + m_B} \quad (13-a)$$

É importante notar que as expressões (13) acima satisfazem à condição de movimento de rolamento puro do disco apenas se $m_A > m_B$.

Aplicando-se o Teorema do Momento Angular (TMA) ao movimento do disco (Fig. 2-b), obtém-se:



$$J_{A_z} \ddot{\varphi} = M - F_{atA} R \quad (14)$$

Utilizando-se as equações (4), (11) e $J_{A_z} = \frac{m_A R^2}{2}$ na equação acima (14), obtém-se:

$$\frac{m_A R^2}{2} \frac{a_A}{R} = M - (m_A a_A + m_B a_A + m_B \mu g) R,$$

de onde resulta:

$$a_A = \frac{2(M - \mu m_B g R)}{R(3m_A + 2m_B)} \quad (15)$$

Para calcular a força atuante na barra AB, utilizamos a equação (8), a equação vincular (2) e a expressão da aceleração do ponto A (equação (15)), ou seja:

$$F_{AB} = m_B (a_B + \mu g) = m_B (a_A + \mu g),$$

do que resulta:

$$F_{AB} = \frac{m_B (2M - 3m_A \mu g R)}{R(3m_A + 2m_B)} \quad (16)$$

Em uma configuração arbitrária φ do sistema, a sua energia cinética, composta pelas parcelas devidas aos movimentos do bloco e do disco, é dada por:

$$T = T_{Bloco} + T_{Disco} = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} + \frac{J_{A_z} \dot{\varphi}^2}{2} \quad (17)$$

Substituindo-se na equação acima as equações (1) e (3), bem como a expressão do momento de inércia J_{A_z} , obtém-se:

$$T = \frac{m_A (\dot{\varphi} R)^2}{2} + \frac{m_B (\dot{\varphi} R)^2}{2} + \frac{m_A R^2 \dot{\varphi}^2}{4}$$

ou seja:

$$T = \frac{(\dot{\varphi} R)^2 (3m_A + 2m_B)}{4} \quad (18)$$

Para calcularmos o trabalho realizado pelas forças e momentos atuantes no sistema, desde a configuração $\varphi=0$ até uma dada configuração φ arbitrária, notemos que:

1. As forças peso e as reações normais não realizam trabalho, uma vez que têm direção normal ao seu deslocamento;
2. A força de atrito no disco não realiza trabalho, pois a velocidade no ponto de contacto com o solo é nula.

Portanto, além do momento externo M , a única força que realiza trabalho é a força de atrito F_{atB} atuante no bloco, ou seja:

$$W = W_M + W_{F_{atB}} = M\varphi - F_{atB} \cdot d(\varphi) \quad (19)$$



onde $d(\varphi)$ é o deslocamento linear do bloco B correspondente a uma rotação φ do disco, ou seja:

$$d(\varphi) = R\varphi \quad (20)$$

Substituindo-se (7) e (20) na expressão (19) resulta:

$$W = (M - \mu m_B g R)\varphi \quad (21)$$

Finalmente, aplicando-se o Teorema da Energia Cinética (TEC) ao sistema, a partir da configuração de repouso ($\varphi=0$) até uma configuração arbitrária φ , obtém-se:

$$T - T_0 = W \Rightarrow T = W \Rightarrow \frac{(\dot{\varphi}R)^2(3m_A + 2m_B)}{4} = (M - \mu m_B g R)\varphi \quad (22)$$

De onde se extrai a expressão da velocidade angular do disco em função de φ :

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{(M - \mu m_B g R)\varphi}{3m_A + 2m_B}} \quad (23)$$