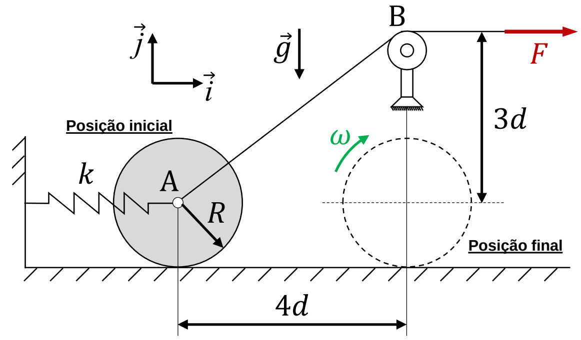
PME 3100 – MECÂNICA I – Reoferecimento 2024 – Prova P3 – 18 de Junho de 2024

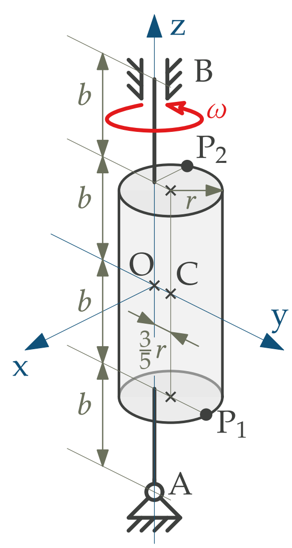
Instruções gerais e formulário estão disponíveis na folha de respostas.

Questão 1 (3,5 pontos). Um disco rígido e homogêneo de raio R de massa m, rola sem escorregar sobre um plano horizontal, conforme mostrado na figura. O disco está conectado a uma mola de rigidez k que está distendida de $\delta_0 = d$ na posição inicial, onde o disco é liberado a partir do repouso. Uma força horizontal constante de magnitude F puxa o disco por meio de um fio ideal acoplado a uma polia de massa desprezível que não oferece resistência ao movimento do fio. Admitindo que a direção da força F permanece na horizontal durante todo o movimento do disco, pede-se:



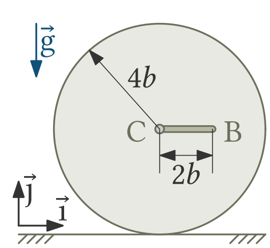
a) (1,0) o diagrama de corpo livre do disco para uma posição genérica entre sua posição inicial e final;
b) (0,5) a variação da energia cinética do disco entre as posições inicial e final, em função de sua velocidade angular ω;
c) (1,5) o trabalho realizado pelas forças aplicadas ao disco entre as posições inicial e final;
d) (0,5) a velocidade angular ω do disco na posição final.

Questão 2 (3,0 pontos). A figura ilustra um corpo rígido único de massa total $6m$, constituído por um cilindro rígido e homogêneo de centro C, raio r, comprimento $2b$ e massa $4m$, e por duas partículas materiais P_1 e P_2, cada uma de massa m. O corpo é preso a um eixo AOB, de massa desprezível, vinculado a uma base fixa por meio de uma articulação ideal em A e um anel ideal em B. O eixo AOB é paralelo ao eixo central do cilindro, distando $\frac{3}{5}r$ deste. O sistema de coordenadas Oxyz é solidário ao corpo. Admitindo que o corpo gire em torno do eixo AOB com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante, e sabendo que $(P_1 - O) = \frac{8r}{5}\vec{j} - b\vec{k}$ e $(P_2 - O) = -\frac{4r}{5}\vec{i} + b\vec{k}$ pede-se:



a) (0,4) o vetor posição $(G - O)$ do centro de massa G do corpo;
b) (0,9) o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} do corpo;
c) (0,4) a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G, expressa em função de r e ω;
d) (0,4) o diagrama de corpo livre;
e) (0,9) as equações obtidas a partir da aplicação do Teorema da Resultante ao corpo.

Questão 3 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco homogêneo de centro C, massa $4m$ e raio $4b$ que pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal fixa, e por uma barra esbelta homogênea BC, de centro G, massa m e comprimento $2b$, vinculada ao disco apenas por meio de uma articulação ideal em C. Considerando somente a configuração ilustrada, da qual o sistema parte do repouso, pede-se:

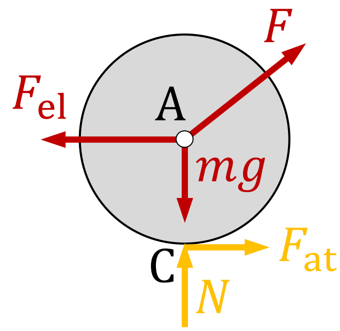


a) (0,8) expressar as acelerações $\vec{a}_C$, do ponto C, e $\vec{a}_G$, do ponto G, em função das acelerações angulares $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1\vec{k}$, do disco, e $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2\vec{k}$, da barra;
b) (0,8) esboçar separadamente os diagramas de corpo livre do disco e da barra;
c) (0,8) aplicar a equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular à barra, com polo C, para determinar sua aceleração angular $\vec{\alpha}_2$;
d) (1,1) determinar a aceleração angular $\vec{\alpha}_1$ do disco e as componentes da força de contato sobre o disco, aplicadas pela superfície horizontal fixa.

Resolução comentada

Questão 1 (3,5 pontos)

a) Veja figura ao lado.
(1,0) para o diagrama correto; (0,5) se apenas uma força estiver incorreta; e (0,0) se duas ou mais forças estiverem incorretas.



b) Como o disco parte do repouso na posição inicial ($T_1 = 0$), a variação de sua energia cinética entre as posições inicial e final é dada por:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = \frac{3mR^2\omega^2}{4}}$$

(0,5) para a expressão correta.

c) O trabalho total realizado pelas forças externas aplicadas ao disco entre as posições inicial e final é dado por:

$$W^{\text{ext}}_{1\to2} = W^{\text{N}}_{1\to2} + W^{\text{Fat}}_{1\to2} + W^{\text{P}}_{1\to2} + W^{\text{Fel}}_{1\to2} + W^{\text{F}}_{1\to2}$$

onde

$$\boxed{W^{\text{N}}_{1\to2} = 0} \quad \text{(A força normal é sempre perpendicular à direção do movimento)}$$

$$\boxed{W^{\text{Fat}}_{1\to2} = 0} \quad \text{(O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal)}$$

$$\boxed{W^{\text{P}}_{1\to2} = 0} \quad \text{(A posição do centro de massa do disco na vertical é constante)}$$

$$W^{\text{Fel}}_{1\to2} = -\Delta V_{\text{el}} = V^1_{\text{el}} - V^2_{\text{el}} = \frac{kd^2}{2} - \frac{k(d+4d)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W^{\text{Fel}}_{1\to2} = -12kd^2}$$

$$W^{\text{F}}_{1\to2} = F\Delta L = F(5d - 3d) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W^{\text{F}}_{\text{A}\to\text{C}} = 2Fd}$$

sendo ΔL o deslocamento da extremidade do fio em que a força é aplicada entre as posições inicial e final do disco. Portanto, o trabalho total é dado por:

$$\boxed{W^{\text{ext}}_{1\to2} = 2Fd - 12kd^2}$$

(0,3) para termo do trabalho correto.

d) Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) entre as posições inicial e final, tem-se:

$$\Delta T = W^{\text{ext}}_{1\to2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3mR^2\omega^2}{4} = 2Fd - 12kd^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8d(F-6kd)}{3mR^2}}}$$

(0,5) para a expressão correta.

Questão 2 (3,0 pontos)

a) O cilindro tem massa $4m$ e centro de massa C, e cada uma partículas materiais P_1 e P_2 tem massa m. Assim:

$$(G-O) = \frac{4m(C-O) + m(P_1-O) + m(P_2-O)}{4m+m+m}$$
$$= \frac{4m\left(\frac{3r}{5}\vec{j}\right) + m\left(\frac{8r}{5}\vec{j} - b\vec{k}\right) + m\left(-\frac{4r}{5}\vec{i} + b\vec{k}\right)}{6m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(G-O) = -\frac{2r}{15}\vec{i} + \frac{2r}{3}\vec{j}}$$

(0,2) por cada componente correta.

b) Considerando que o sólido rígido é constituído por um cilindro rígido e homogêneo e pelas partículas materiais P_1 e P_2, o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} do corpo são calculados, como segue:

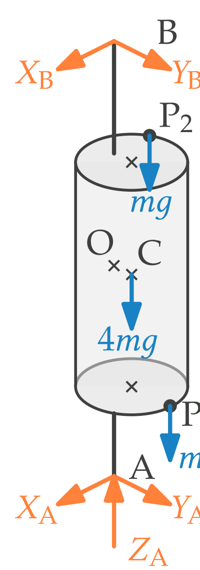
$$J_{Oz} = \left[\frac{1}{2}(4m)r^2 + (4m)\left(\frac{3r}{5}\right)^2\right] + m\left(\frac{8r}{5}\right)^2 + m\left(\frac{4r}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oz} = \frac{166mr^2}{25}}$$

$$J_{Oxz} = (0 + 4mx_C z_C) + mx_{P_1}z_{P_1} + mx_{P_2}z_{P_2} = [0 + 4m(0)(0)] + m(0)(-b) + m\left(-\frac{4r}{5}\right)(b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oxz} = -\frac{4mrb}{5}}$$

$$J_{Oyz} = (0 + 4my_C z_C) + my_{P_1}z_{P_1} + my_{P_2}z_{P_2} = \left[0 + 4m\left(\frac{3r}{5}\right)(0)\right] + m\left(\frac{8r}{5}\right)(-b) + m(0)(b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Oyz} = -\frac{8mrb}{5}}$$

(0,3) por cada resposta correta.

c) Aplicando a expressão do campo de acelerações para o corpo rígido, tem-se:



$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)], \quad \vec{a}_O = \vec{0}, \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$
$$= \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \left(-\frac{2r}{15}\vec{i} + \frac{2r}{3}\vec{j}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = \frac{2\omega^2 r}{15}\vec{i} - \frac{2\omega^2 r}{3}\vec{j}}$$

(0,2) pela aplicação correta da equação do campo de acelerações, (0,2) pela resposta correta.

d) Diagrama de corpo livre indicado na figura ao lado. (0,4) pelo diagrama correto.

e) Pelo Teorema da Resultante (TR), obtém-se:

$$6m\vec{a}_G = \vec{R}^{ext} \quad \Rightarrow \quad 6m\left(\frac{2\omega^2 r}{15}\vec{i} - \frac{2\omega^2 r}{3}\vec{j}\right) = (X_A + X_B)\vec{i} + (Y_A + Y_B)\vec{j} + (Z_A - 6mg)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} X_A + X_B &= \dfrac{4m\omega^2 r}{5} \\ Y_A + Y_B &= -4m\omega^2 r \\ Z_A &= 6mg \end{cases}}$$

(0,3) por cada equação correta.

Questão 3 (3,5 pontos)

a) A condição de rolamento sem escorregamento implica que o ponto de contato I do disco com a pista horizontal fixa tenha velocidade instantânea nula. Assim, pode-se obter as expressões para $\vec{v}_C$ e $\vec{a}_C$, válidas para qualquer instante de tempo (enquanto houver rolamento sem escorregamento):

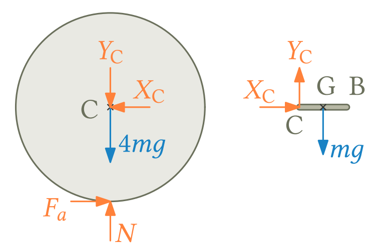
$$\vec{v}_C = \vec{v}_I + \vec{\omega}_1 \wedge (C - I) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (4b\vec{j}) = -4b\omega_1 \vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_C = -4b\alpha_1 \vec{i}}$$

Aplicando agora a equação de campo de acelerações à barra BC, considerando o sistema em repouso ($\vec{\omega}_2 = \vec{0}$):

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_2 \wedge (G - C) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (G - C)] = -4b\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{k} \wedge (b\vec{i}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = -4b\alpha_1 \vec{i} + b\alpha_2 \vec{j}}$$

(0,4) por cada resposta correta.

b) Diagramas de corpo livre indicados na figura ao lado.
(0,4) por cada diagrama correto.



c) A equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular aplicada à barra, com polo C é:

$$m(G - C) \wedge \vec{a}_C + J_{Cz}^{\text{barra}} \vec{\alpha}_2 = \vec{M}_C^{\text{barra}}$$

$$m(b\vec{i}) \wedge (-4b\alpha_1 \vec{i}) + \left[\frac{1}{12} m(2b)^2 + mb^2\right] \alpha_2 \vec{k} = -mgb\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{3g}{4b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_2 = -\frac{3g}{4b}\vec{k}}$$

(0,4) pela aplicação correta da equação do TQMA + (0,4) pela resposta correta.
Obs.: para o cálculo do momento de inércia J_{Cz}, usamos a expressão: $J_{Cz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2)$.

d) Aplicando as equações do Teorema da Resultante à barra, obtemos:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}^{\text{barra}} \quad \Rightarrow \quad m\left(-4b\alpha_1 \vec{i} + b\alpha_2 \vec{j}\right) = X_C \vec{i} + (Y_C - mg)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_C = -4mb\alpha_1 & (1) \\ Y_C = \dfrac{1}{4} mg & (2) \end{cases}$$

Aplicando as equações do Teorema da Resultante ao disco, obtemos:

$$(4m)\vec{a}_C = \vec{R}^{\text{disco}} \quad \Rightarrow \quad (4m)\left(-4b\alpha_1 \vec{i}\right) = (F_a - X_C)\vec{i} + (N - Y_C - 4mg)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_a = -20mb\alpha_1 & (3) \\ N = \dfrac{17}{4} mg & (4) \end{cases}$$

Aplicando a equação do Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao disco, com polo C, obtemos:

$$J_{Cz}^{\text{disco}} \vec{\alpha}_1 = \vec{M}_C^{\text{disco}} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}(4m)(4b)^2\right] \alpha_1 \vec{k} = F_a (4b)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}_1 = \vec{0}}$$

Assim, voltando às equações (3) e (4), obtemos:

$$\boxed{F_a = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{N = \frac{17}{4} mg}$$

(0,5) pelo equacionamento correto + (0,2) por cada resposta correta.