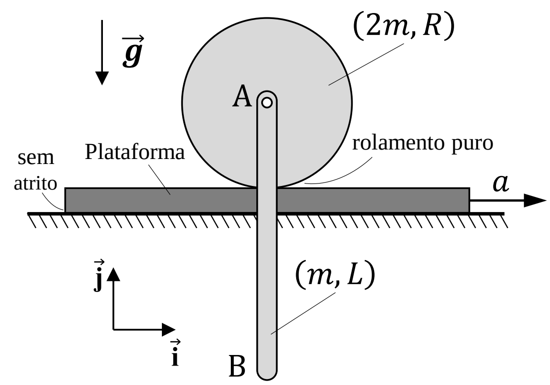
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – 2024 – Prova 3 – 26 de Novembro de 2024

Instruções gerais e formulário estão disponíveis no caderno de respostas.

Questão 1 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é formado por uma barra rígida e homogênea AB, de massa m e comprimento L, cuja extremidade A está articulada ao centro de um disco rígido e homogêneo de massa $2m$ e raio R. O disco pode *rolar sem escorregar* sobre uma plataforma horizontal, que, por sua vez, pode *deslizar sem atrito em relação ao solo*. A articulação em A é considerada ideal. O sistema encontra-se inicialmente em repouso. Em um dado momento, uma aceleração $\vec{a} = a\vec{\imath}$ é imposta à plataforma. Para o instante *imediatamente após* a imposição da aceleração, e considerando a plataforma como referencial móvel, determine, em função dos parâmetros dados:



a) Os diagramas de corpo livre do disco e da barra.

b) A aceleração *absoluta* do ponto A do *disco* em função da aceleração angular $\vec{\alpha}_B = \alpha_B\vec{k}$ da barra e da aceleração angular $\vec{\alpha}_D = \alpha_D\vec{k}$ do disco.

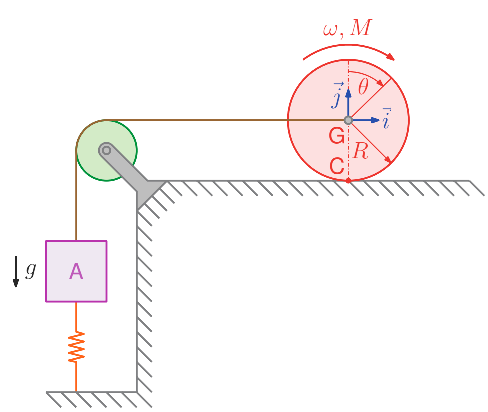
c) A aceleração *absoluta* do centro de massa da *barra* AB em função da aceleração angular $\vec{\alpha}_B = \alpha_B\vec{k}$ da barra e da aceleração angular $\vec{\alpha}_D = \alpha_D\vec{k}$ do disco.

d) As equações escalares obtidas ao aplicar o Teorema da Resultante e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular à *barra*. (Utilize o polo A para a aplicação do TQMA).

e) As equações escalares obtidas ao aplicar o Teorema da Resultante e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular ao *disco*. (Utilize o polo A para a aplicação do TQMA).

f) Organize e enumere as equações anteriores e liste as incógnitas, mostrando que o sistema assim obtido pode ser resolvido para se determinar as acelerações angulares do disco e da barra AB, bem como as reações na articulação A e no ponto de contato entre o disco e a plataforma. (**Não é necessário resolver o sistema!**).

Questão 2 (3,0 pontos). O sistema mostrado na figura ao lado consiste em um disco rígido e homogêneo de raio R e massa $2m$, que *rola sem escorregar* sobre um plano horizontal. O disco parte do repouso na posição $\theta = 0°$, quando é aplicado um binário de momento M (constante). Um fio ideal conecta o centro G do disco a um bloco A de massa m, por meio de uma polia de inércia desprezível. O bloco A está ligado a uma mola linear de constante elástica k, que se encontra inicialmente relaxada. Com base nas condições descritas, pede-se:



a) Os diagramas de corpo livre do bloco e do disco.

b) O momento de inércia do disco em relação ao eixo Cz perpendicular ao plano da figura.

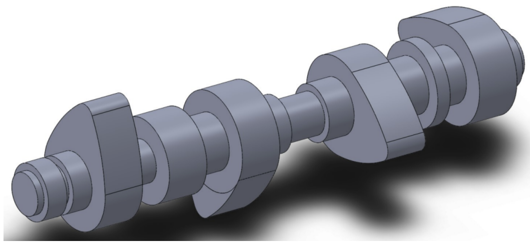
c) A energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular ω do disco.

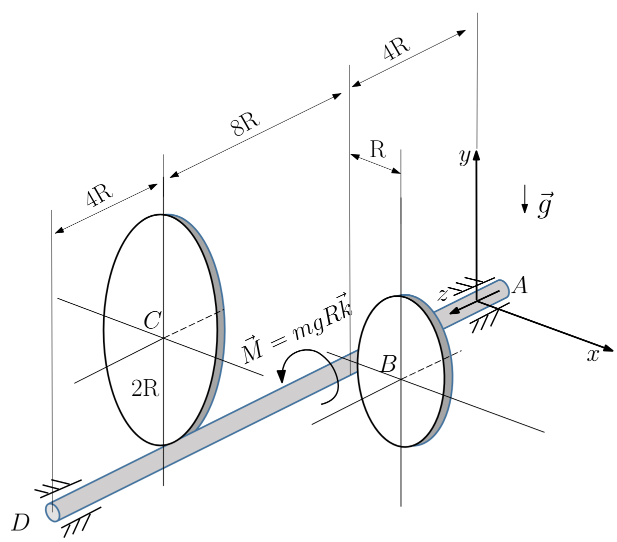
d) O *trabalho total* realizado pelos esforços atuantes no *sistema* entre o instante inicial e uma posição genérica do sistema. Para o instante inicial, considere o disco partindo do repouso em $\theta = 0°$, com a mola relaxada. Para a posição genérica, considere o disco com um ângulo $\theta > 0$, conforme indicado na figura.

e) O vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ do disco em função do ângulo θ.

Questão 3 (3,5 pontos). A figura abaixo mostra, do lado esquerdo, uma representação 3D de um eixo de comando de válvulas, importante componente de motores de combustão interna. Do lado direito, apresenta-se um ***modelo físico bastante simplificado*** da mesma peça, ***válido apenas para fins didáticos***. O modelo simplificado é composto por dois discos homogêneos: o de centro B (massa m e raio R) e o de centro C (massa $2m$ e raio $2R$). Ambos os discos estão rigidamente conectados ao eixo AD, cuja massa pode ser considerada desprezível em comparação com as massas dos discos. O eixo AD é sustentado por mancais (anéis) fixos ideais nos pontos A e D e gira com velocidade angular constante $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. O sistema de coordenadas Axyz é rigidamente fixo ao corpo rígido formado pelo conjunto eixo+discos. Considerando que, no *instante representado na figura*, a aceleração da gravidade é $\vec{g} = -g\vec{j}$ e que um binário externo ativo de momento $\vec{M} = mgR\vec{k}$ atua sobre o corpo rígido formado pelos discos e o eixo, pede-se, *para esse corpo rígido no instante mostrado*:

- **a)** O diagrama de corpo livre.
- **b)** As coordenadas do centro de massa.
- **c)** As equações escalares obtidas ao aplicar o Teorema da Resultante.
- **d)** As equações escalares obtidas ao aplicar o Teorema da Quantidade de Movimento Angular com respeito ao polo A.
- **e)** Organize e enumere as equações anteriores e liste as incógnitas, mostrando que o sistema assim obtido pode ser resolvido para se determinar as reações nos mancais. (**Não é necessário resolver o sistema!**).
- **f)** Os produtos de inércia envolvidos nas equações do item anterior.

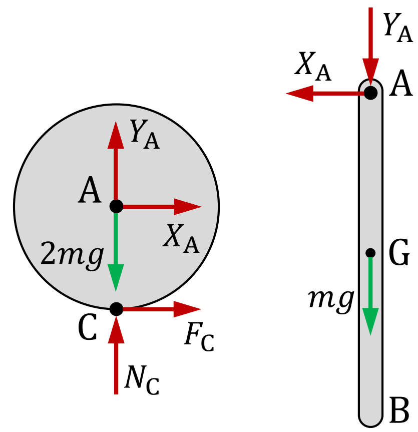




RESOLUÇÃO

Questão 1

a) Os DCLs são apresentados na figura ao lado. (0,5 para cada DCL)



b) Considerando a composição de movimentos para a aceleração do ponto A do *disco*, e admitindo a plataforma como referencial móvel ($\vec{\omega}_{arr} = \vec{\omega}_{plat} = \vec{0}$), tem-se:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{rel}} + \vec{a}_{A_{arr}} = -\alpha_D R\vec{\imath} + a\vec{\imath} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_A = (a - \alpha_D R)\vec{\imath}} \; (0,2) \qquad (1)$$

c) Aplicando a expressão do campo de acelerações para a *barra*, e considerando $\vec{\omega}_B = \vec{0}$ no instante *imediatamente após* a imposição da aceleração na plataforma, tem-se:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_B \wedge (G - A) + \vec{\omega}_B \wedge [\vec{\omega}_B \wedge (G - A)]$$

$$\vec{a}_G = (a - \alpha_D R)\vec{\imath} + \alpha_B\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\vec{\jmath}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = \left(a - \alpha_D R + \frac{\alpha_B L}{2}\right)\vec{\imath}} \; (0,3) \qquad (2)$$

d) Aplicando o TQMA à *barra* com polo em A (movimento no plano xy), obtém-se:

$$\vec{M}_A^{ext} = m(G - A) \wedge \vec{a}_A + (J_{Az}^{barra}\alpha_B)\vec{k}, \qquad J_{Az}^{barra} = \frac{mL^2}{3}$$

$$\vec{0} = m\left(-\frac{L}{2}\vec{\jmath}\right) \wedge (a - \alpha_D R)\vec{\imath} + \left(\frac{mL^2\alpha_B}{3}\right)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{mLR}{2}\right)\alpha_D - \left(\frac{mL^2}{3}\right)\alpha_B = \frac{mLa}{2}} \; (0,4) \qquad (3)$$

Aplicando o TR à *barra*, obtém-se:

$$\vec{R}^{ext} = m\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad (-X_A)\vec{\imath} + (-Y_A - mg)\vec{\jmath} = m\left(a - \alpha_D R + \frac{\alpha_B L}{2}\right)\vec{\imath}$$

$$Y_A = -mg \qquad \boxed{X_A = m\left(\alpha_D R - \frac{\alpha_B L}{2} - a\right)} \; (0,4) \qquad (4)$$

e) Aplicando o TQMA ao *disco* com polo em A (movimento no plano xy), e sendo A o centro de massa do disco, obtém-se:

$$\vec{M}_A^{ext} = 2m(A - A) \wedge \vec{a}_A + (J_{Az}^{disco}\alpha_D)\vec{k}, \qquad J_{Az}^{disco} = \frac{(2m)R^2}{2} = mR^2$$

$$(F_C R)\vec{k} = (mR^2\alpha_D)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{mR\alpha_D = F_C} \; (0,4) \qquad (5)$$

Aplicando o TR ao *disco*, obtém-se:

$$\vec{R}^{ext} = 2m\vec{a}_A \quad \Rightarrow \quad (X_A + F_C)\vec{\imath} + (Y_A + N_C - 2mg)\vec{\jmath} = 2m(a - \alpha_D R)\vec{\imath}$$

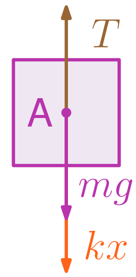
$$N_C = 2mg - Y_A = 3mg \qquad \boxed{X_A + F_C = 2m(a - \alpha_D R)} \; (0,4) \qquad (6)$$

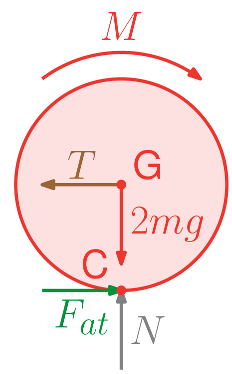
f) Para o instante *imediatamente após* a imposição da aceleração na plataforma, os teoremas da dinâmica fornecem o sistema equações lineares definidas nas Eqs. (3)–(6) acima, para as incógnitas $(\alpha_D, \alpha_B, X_A, F_C)$. A solução desse sistema de equações é (**não era necessário resolver o sistema!**): (0,4)

$$\alpha_D = \frac{9a}{13R}, \qquad \alpha_B = -\frac{6a}{13L}, \qquad X_A = -\frac{ma}{13}, \qquad F_C = \frac{9ma}{13}$$

Questão 2

a) O DCL é apresentado na figura ao lado. (0,5)





b) Aplicando o teorema dos eixos paralelos ao eixo Cz:

$$J_{Gz} = \frac{2mR^2}{2} = mR^2$$

$$\boxed{J_{Cz} = J_{Gz} + 2mR^2 = 3mR^2} \quad (0,5) \tag{1}$$

c) O sistema parte do repouso, então $T(t_i) = 0$.

O ponto C é o CIR do disco, assim $\vec{v}_C = \vec{0}$. Logo, a expressão da energia cinética fica como:

$$T = \frac{1}{2}m\left|\vec{v}_A\right|^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2$$

Aplicando a expressão do campo de velocidades:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C), \qquad \vec{v}_G = \vec{0} + (-\omega\vec{k}) \wedge (R\vec{j}) = \omega R\vec{i}$$

Velocidade do bloco A é igual em módulo à velocidade do centro do disco: $\left|\vec{v}_A\right| = \left|\vec{v}_G\right| = \omega R$. Portanto, a expressão final da energia cinética é:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}(3mR^2)\omega^2 = 2mR^2\omega^2} \quad (0,5) \tag{2}$$

d) O trabalho total dos esforços *internos* é nulo, ou seja, $W^{\text{int}} = 0$. Portanto, contribuem para o trabalho total dos esforços externos (i) a força peso do bloco, (ii) a força elástica na mola e (iii) o binário de momento aplicado ao disco.

O sistema parte do repouso no instante inicial e a mola está inicialmente relaxada. Portanto, o deslocamento do centro do disco é igual ao deslocamento do bloco que por sua vez é igual à deflexão da mola, que valem $x(t) = R\theta(t)$. Para o *instante inicial*, tem-se $\theta(t_i) = 0$ e $x(t_i) = 0$. Para *o instante final*, tem-se $\theta(t_f) = \theta$ e $x(t_f) = R\theta(t)$. Dessa forma, a expressão do trabalho total dos esforços externos fica:

$$\boxed{W^{\text{ext}} = -mgR\theta - k\frac{R^2\theta^2}{2} + M\theta} \quad (1,0) \tag{3}$$

e) Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) ao sistema, tem-se:

$$\Delta T = T(t_f) - T(t_i) = W^{\text{ext}}$$

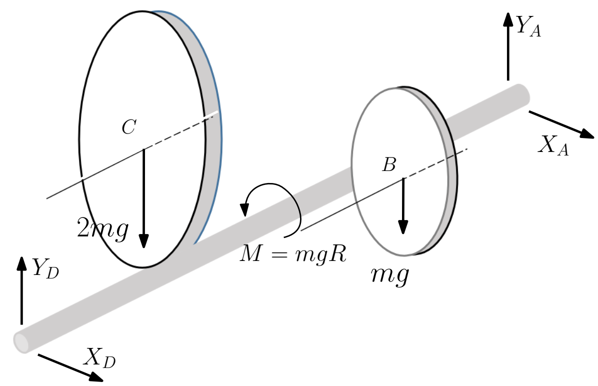
Sabendo que o sistema parte do repouso ($T(t_i) = 0$) e utilizando as expressões obtidas nos itens (c) e (d), chega-se à seguinte expressão para o vetor velocidade angular do disco:

$$2mR^2\omega^2 = -mgR\theta - k\frac{R^2\theta^2}{2} + M\theta$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\omega\vec{k} = -\sqrt{\frac{2M\theta - 2mgR\theta - kR^2\theta^2}{4mR^2}}\vec{k}} \quad (0,5) \tag{4}$$

Questão 3

a) O DCL é apresentado na figura ao lado. (0,5)



b) O centro de massa é obtido ponderando-se as contribuições de cada disco: (0,5)

$$B(R;0;4R) \quad C(0;2R;12R)$$

$$x_G = \frac{mR + 2m.0}{3m} = \boxed{\frac{R}{3}}$$

$$y_G = \frac{m.0 + 2m.2R}{3m} = \boxed{\frac{4R}{3}}$$

$$z_G = \frac{m.4R + 2m.12R}{3m} = \boxed{\frac{28R}{3}}$$

c) Teorema da Resultante: (0,5)

$$3m\,\vec{a}_G = (X_A + X_D)\vec{i} + (Y_A + Y_D - 3mg)\vec{j}$$

Determinação de $\vec{a}_G$:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}(G-A) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (G-A))$$

$$\vec{a}_G = \vec{0} + \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \frac{R}{3}(\vec{i} + 4\vec{j} + 28\vec{k})\right)$$

$$\vec{a}_G = \frac{\omega^2 R}{3}(-\vec{i} - 4\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{i}: \quad -3m\frac{\omega^2 R}{3} = X_A + X_D} \tag{1}$$

$$\boxed{\vec{j}: \quad -3m\frac{4\omega^2 R}{3} = Y_A + Y_D - 3mg} \tag{2}$$

d) TQMA cor respeito ao polo A: (1,0)

$$3m(G-A) \wedge \vec{a}_A + \frac{d}{dt}\left(\mathbb{J}_A(\vec{\omega})\right) = \vec{M}_A^{ext}$$

$$3m(G-A) \wedge \vec{0} + \frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} J_{A_x} & -J_{A_{xy}} & -J_{A_{xz}} \\ -J_{A_{yx}} & J_{A_y} & -J_{A_{yz}} \\ -J_{A_{zx}} & -J_{A_{yz}} & J_{A_z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}\right) = \vec{M}_A^{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\left(-J_{A_{xz}}\omega\vec{i} - J_{A_{yz}}\omega\vec{j} + J_A z\omega\vec{k}\right) = \vec{M}_A^{ext}$$

$$\omega\vec{k} \wedge \left(-J_{A_{xz}}\omega\vec{i} - J_{A_{yz}}\omega\vec{j} + J_A z\omega\vec{k}\right) = \vec{M}_A^{ext}$$

$$\therefore \boxed{\vec{M}_A^{ext} = J_{A_{yz}}\omega^2\vec{i} - J_{A_{xz}}\omega^2\vec{j}} \tag{3}$$

Momentos dos esforços externos com respeito ao polo A:

- Coordenadas dos polos A e D: $A(0;\ 0;\ 0)$; $\quad D(0;\ 0;\ 16R)$

$$\vec{M}_A^{ext} = (D-A) \wedge (X_D\vec{i} + Y_D\vec{j}) + (C-A) \wedge (-2mg\vec{j} + (B-A) \wedge (-mg\vec{j}) + \vec{M}$$

$$\vec{M}_A^{ext} = 16R\vec{k} \wedge (X_D\vec{i} + Y_D\vec{j}) + (2R\vec{j} + 12R\vec{k}) \wedge (-2mg\vec{j}) + (R\vec{i} + 4R\vec{k}) \wedge (-mg\vec{j}) + mgR\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^{ext} = R\left[(-16Y_D + 28mg)\vec{i} + 16X_D\vec{j}\right] \tag{4}$$

- Equações escalares:

$$\boxed{\vec{i}: \quad R(-16Y_D + 28mg) = J_{A_{yz}}\omega^2} \tag{5}$$

$$\boxed{\vec{j}: \quad 16RX_D = -J_{A_{xz}}\omega^2} \tag{6}$$

e) (0,5)

- Incógnitas: X_A; Y_A; X_D; Y_D
- Sistema de equações que permite obter as incógnitas: (1), (2), (5), (6).

f) Utiliza-se o Teorema dos Eixos paralelos: (0,5)

$$J_{A_{xz}} = J_{A_{xz}B} + J_{A_{xz}C} = (0 + m.R.4R) + (0 + 2m.0.12R) \Longrightarrow \boxed{J_{A_{xz}} = 4mR^2}$$

$$J_{A_{yz}} = J_{A_{yz}B} + J_{A_{yz}C} = (0 + m.0.4R) + (0 + 2m.2R.12R) \Longrightarrow \boxed{J_{A_{yz}} = 48mR^2}$$