



**PME 2100 – MECÂNICA A – Terceira Prova – 11 de novembro de 2009**

**Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de calculadoras)**

**1ª Questão (3,5 pontos):**

Um sólido é composto de uma barra homogênea  $OA$  de massa  $m$ , comprimento  $L$  e diâmetro desprezível, e de uma massa concentrada  $2m$  fixa na extremidade  $A$ .

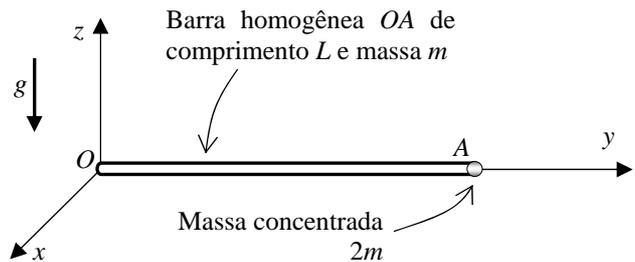
Determine:

a) A localização do baricentro  $G$  do sólido.

b) O momento de inércia  $J_{Gz}$  do sólido (em relação ao baricentro  $G$ ), sabendo que o momento de inércia apenas da barra, em relação ao eixo  $Oz$ , é  $J_{Oz\text{barra}} = mL^2/3$ .

c) A Quantidade de Movimento Angular (ou Momento Angular)  $\vec{H}_G$  do sólido, em relação ao polo  $G$ , com um vetor rotação  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ , considerando o sistema de coordenadas  $Oxyz$  solidário ao corpo.

d) A derivada do Momento Angular em relação ao tempo,  $\dot{\vec{H}}_G$ , no caso em que o vetor rotação tenha a direção de um eixo fixo paralelo a  $Oz$ .



**Solução:**

a) Como o diâmetro é desprezível:  $x_G = z_G = 0$

$$y_G = (m \cdot L/2 + 2m \cdot L) / (m + 2m) \Rightarrow y_G = 5L/6 \quad \underline{1,0}$$

b) Momento do sólido em relação ao eixo  $Oz$ :

$$J_{Oz} = J_{Oz\text{BARRA}} + 2mL^2 = \frac{mL^2}{3} + 2mL^2 \Rightarrow J_{Oz} = \frac{7mL^2}{3}$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Oz} = J_{Gz} + 3m \left( \frac{5L}{6} \right)^2 \Rightarrow J_{Gz} = \frac{7mL^2}{3} - \frac{75mL^2}{36} = \frac{12 \cdot 7mL^2}{12 \cdot 3} - \frac{75mL^2}{36} = \frac{84 - 75}{36} \cdot mL^2 \Rightarrow J_{Gz} = \frac{mL^2}{4} \quad \underline{1,0}$$

c) Para um sólido, usando um polo  $C$ , temos:

$$\vec{H}_C = m(\vec{G} - \vec{C}) \wedge \vec{v}_C + [J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z] \vec{i} + [-J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z] \vec{j} + [-J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z] \vec{k} \quad \underline{0,5}$$

No sólido considerado, o diâmetro é desprezível e, portanto, as coordenadas  $x$  e  $z$  são nulas, o que anula os respectivos produtos de inércia e o momento de inércia  $J_y$ .

Assim, para o polo  $G$  temos  $J_x = J_z = J_{Gz} = mL^2/4$  e obtemos:

$$\vec{H}_G = \frac{mL^2}{4} (\omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k}) \quad \underline{0,5}$$

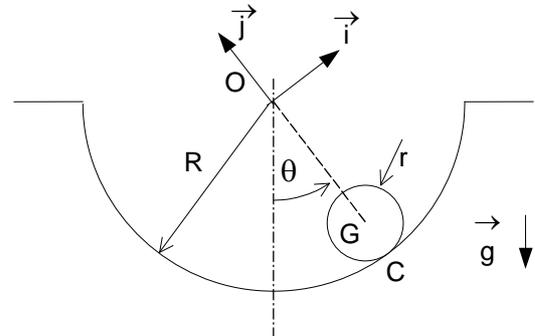
d) Com  $\omega_x = \omega_y = 0$  e  $\vec{k}$  fixo, temos:

$$\dot{\vec{H}}_G = \frac{mL^2}{4} \dot{\omega}_z \vec{k} \quad \underline{0,5}$$



**2ª Questão (3.0 pontos):** Um disco homogêneo de massa  $m$  e raio  $r$  rola sem escorregar em uma superfície cilíndrica fixa de raio  $R$ . Pede-se:

- Determine a energia cinética do disco em função de sua velocidade angular  $\omega$ , em uma posição genérica  $\theta$ . O momento de inércia do disco em relação ao seu centro de massa é  $J_G = mR^2/2$ .
- Sabendo que o disco é liberado do repouso na posição onde  $\theta = \theta_0$ , determine sua velocidade angular  $\bar{\omega}$  e a velocidade  $\bar{v}_G$  de seu centro de massa em função de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .
- Determine a relação entre a velocidade angular  $\omega$  do disco e  $\dot{\theta}$ .
- Determine a aceleração angular  $\dot{\omega}$  em função de  $\theta$ .



**Solução:**

a)  $T = mv_G^2/2 + J_G\omega^2/2 = \underline{0.5}$

$= m(\omega r)^2/2 + (mr^2/2)\omega^2/2 \Rightarrow T = 3mr^2\omega^2/4 \underline{0.5}$

b) TEC para o disco:  $\Delta T = \tau$

$3mr^2\omega^2/4 - 0 = mg(R-r)(\cos\theta - \cos\theta_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^2 = 4g(R-r)(\cos\theta - \cos\theta_0)/(3r^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\omega} = \sqrt{\frac{4g(R-r)(\cos\theta - \cos\theta_0)}{3r^2}} \vec{k} \underline{0.5}$

$\vec{v}_G = -\omega r \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_G = -\sqrt{\frac{4g(R-r)(\cos\theta - \cos\theta_0)}{3}} \vec{i} \underline{0.5}$

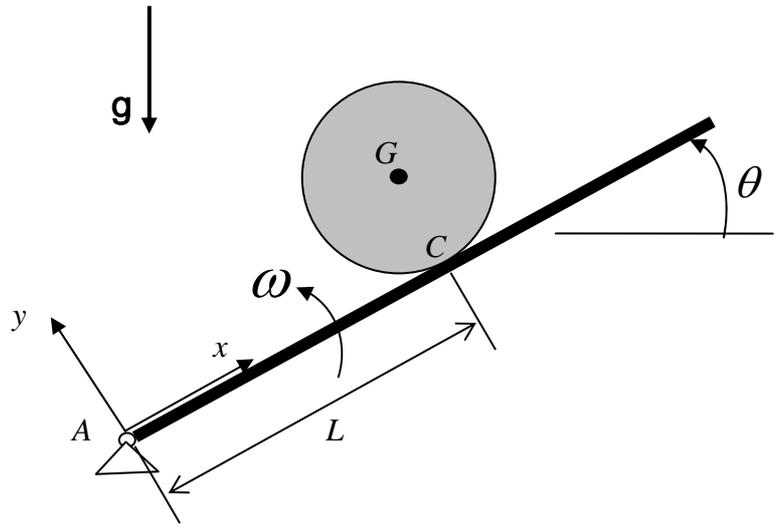
c)  $v_G = \omega r = \dot{\theta}(R-r) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{r}{R-r}\omega \underline{0.5}$

d) derivando a expressão de  $\omega^2$  em relação ao tempo:

$2\omega\dot{\omega} = -\frac{4g}{3r^2}(R-r)\sin\theta\dot{\theta}$ , portanto:  $\dot{\omega} = -\frac{2g}{3r}\sin\theta \underline{0.5}$



**3ª Questão (3,5 pontos):** Um cilindro homogêneo de massa  $m$  e raio  $R$  é mantido fixo sobre uma barra de massa desprezível que gira ao redor da articulação  $A$  com velocidade angular  $\omega = \dot{\theta}$  constante no sentido anti-horário; o ponto  $C$  de contato do disco com a barra está a uma distância  $L$  da articulação  $A$ . No instante em que a barra forma um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com a horizontal, o cilindro é solto e começa a rolar sem escorregar. Adotando o sistema de coordenadas  $(A, x, y, z)$  solidário à barra, pede-se:



a) Em relação a um referencial móvel solidário à barra, obtenha as expressões das acelerações  $\vec{a}_{G,rel}$ ,  $\vec{a}_{G,arr}$ ,  $\vec{a}_{G,comp}$  e  $\vec{a}_G$  do centro de massa do cilindro em função dos dados do problema e da aceleração angular  $\dot{\Omega}$  absoluta do cilindro no instante considerado ( $\theta = 30^\circ$ );

b) O diagrama de corpo livre do cilindro;

c) O vetor de aceleração rotacional  $\dot{\Omega}$  do cilindro no instante considerado ( $\theta = 30^\circ$ );

d) As forças que a barra aplica no cilindro no instante considerado ( $\theta = 30^\circ$ );

$$\text{Dado } J_{z,G} = \frac{mR^2}{2};$$

### SOLUÇÃO

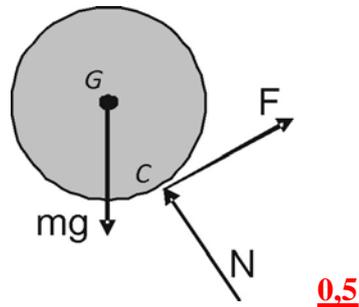
$$\begin{aligned} \vec{v}_{G,rel} &= \vec{v}_{C,rel} + (\vec{\Omega} - \vec{\omega}) \wedge (G - C) = (\Omega - \omega) \vec{k} \wedge R \vec{j} = -(\Omega - \omega) R \vec{i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{a}_{G,rel} &= -(\dot{\Omega} - \dot{\omega}) R \vec{i}; \text{ com } \omega = \text{cte, temos } \vec{a}_{G,rel} = -\dot{\Omega} R \vec{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{G,arr} &= \vec{a}_{A,arr} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)] = \omega^2 \vec{k} \wedge [\vec{k} \wedge (L \vec{i} + R \vec{j})] = \\ &= -\omega^2 (L \vec{i} + R \vec{j}), \text{ no instante considerado.} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{G,comp} = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{G,rel} = \vec{0} \text{ no instante inicial, pois a velocidade relativa é nula nesse instante.}$$

$$\text{Portanto, a aceleração absoluta será } \vec{a}_G = -(\dot{\Omega} R + \omega^2 L) \vec{i} - \omega^2 R \vec{j} \quad \mathbf{1,0}$$

b)



c) TMA:

$$\vec{H}_G = J_{Gz} \dot{\Omega} \vec{k} \Rightarrow \dot{H}_{Gz} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\Omega} \vec{k} = \vec{M}_G^{ext} = F \cdot R \vec{k} \Rightarrow F = m R \dot{\Omega} / 2 \quad (\text{I})$$

TMB:

$$m \vec{a}_G = F \vec{i} + N \vec{j} + mg(-\sin 30^\circ \vec{i} - \cos 30^\circ \vec{j}) \quad (\text{II})$$

Na direção x:  $-m(\dot{\Omega} R + \omega^2 L) = F - mg \cdot (\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow -m(\dot{\Omega} R + \omega^2 L) = m R \dot{\Omega} / 2 - mg / 2 \Rightarrow \dot{\Omega} = g / 3R - 2\omega^2 L / (3R) \quad \underline{1.5}$$

d) Substituindo  $\dot{\Omega}$  na expressão (I) vem:  $F = \frac{m}{6}(g - 2\omega^2 L)$

Usando a expressão (II) em y, vem:

$$-m\omega^2 R = N - \frac{mg\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N = \frac{mg\sqrt{3}}{2} - m\omega^2 R \quad \underline{0.5}$$



**4ª Questão OPCIONAL (1,0 ponto):** Dado um sistema de pontos materiais  $P_i$ ,  $i=1..N$ , de massas  $m_i$  e velocidades  $\vec{v}_i$ , e sabendo que o momento angular de um ponto material  $P_i$ , em relação a um polo  $O$  qualquer, é dado por  $\vec{H}_{Oi} = (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$ , deduza a expressão do Teorema do Momento Angular para o sistema de pontos materiais,  $\dot{\vec{H}}_O = m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$ , onde  $m$  é a massa total do sistema e sabendo que o sistema de forças internas é equivalente a zero.

SOLUÇÃO:

Temos:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_O &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \right] = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \vec{a}_i = \\ &= [\sum_i m_i \vec{v}_i] \wedge \vec{v}_O + \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}\end{aligned}$$