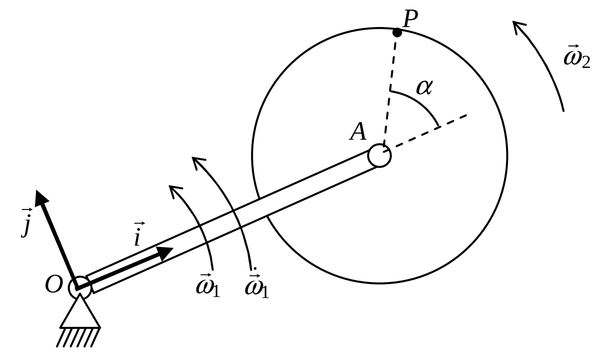
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 24 de maio de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)



1ª Questão (3,5 pontos). Em um dado instante, a haste OA, de comprimento L, tem velocidade angular ω_1 e aceleração angular $\dot{\omega}_1$. Em sua extremidade A está articulado um disco de raio R, o qual gira com velocidade angular ω_2 constante em relação à haste. Adotando a haste como referencial móvel, pede-se determinar:

(a) o vetor rotação absoluta do disco;
(b) o vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
(c) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P do disco;
(d) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto P do disco;

RESOLUÇÃO

(a) Vetor rotação absoluta do disco

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{k} = (\omega_1 + \omega_2)\vec{k}$$ **(½ ponto)**

(b) Vetor aceleração rotacional absoluta do disco

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \dot{\omega}_1\vec{k} + \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge \omega_2\vec{k} = \dot{\omega}_1\vec{k}$$ **(½ ponto)**

(c) Velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto P do disco

- $\vec{v}_{Prel} = \vec{v}_{Arel} + \omega_2\vec{k} \wedge (P - A) = \vec{0} + \omega_2\vec{k} \wedge \left(R\cos\alpha\vec{i} + R\sin\alpha\vec{j}\right) = \omega_2 R\left(-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}\right)$

$\Rightarrow \vec{v}_{Prel} = \omega_2 R\left(-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}\right)$ **(½ ponto)**

- $\vec{v}_{Parr} = \vec{v}_O + \omega_1\vec{k} \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega_1\vec{k} \wedge \left(L\vec{i} + R\cos\alpha\vec{i} + R\sin\alpha\vec{j}\right) = \omega_1 L\vec{j} + \omega_1 R\cos\alpha\vec{j} - \omega_1 R\sin\alpha\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{v}_{Parr} = \omega_1(L + R\cos\alpha)\vec{j} - \omega_1 R\sin\alpha\vec{i}$ **(½ ponto)**

- $\vec{v}_{Pabs} = \vec{v}_{Parr} + \vec{v}_{Prel} = -(\omega_1 + \omega_2)R\sin\alpha\vec{i} + \left[(\omega_1 + \omega_2)R\cos\alpha + \omega_1 L\right]\vec{j}$

(d) Acelerações relativa, de arrastamento e de Coriolis do ponto P do disco.

- $\vec{a}_{Prel} = \vec{a}_{Arel} + \omega_2\vec{k} \wedge \left[\omega_2\vec{k} \wedge (P - A)\right] = \vec{0} + \omega_2\vec{k} \wedge \left[\omega_2\vec{k} \wedge \left(R\cos\alpha\vec{i} + R\sin\alpha\vec{j}\right)\right] = \omega_2\vec{k} \wedge \omega_2 R\left(\cos\alpha\vec{j} - \sin\alpha\vec{i}\right)$

$\Rightarrow \vec{a}_{Prel} = \omega_2^2 R\left(-\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j}\right)$ **(½ ponto)**

$\vec{a}_{Parr} = \vec{a}_O + \dot{\omega}_1\vec{k} \wedge (P - O) + \omega_1\vec{k} \wedge \left[\omega_1\vec{k} \wedge (P - O)\right] = \vec{0} + \dot{\omega}_1\vec{k} \wedge \left(L\vec{i} + R\cos\alpha\vec{i} + R\sin\alpha\vec{j}\right) + \omega_1\vec{k} \wedge \left[\omega_1\vec{k} \wedge \left(L\vec{i} + R\cos\alpha\vec{i} + R\sin\alpha\vec{j}\right)\right]$

$\Rightarrow \vec{a}_{Parr} = \left(-\dot{\omega}_1 R\sin\alpha - \omega_1^2 L - \omega_1^2 R\cos\alpha\right)\vec{i} + \left(\dot{\omega}_1 L + \dot{\omega}_1 R\cos\alpha + \omega_1^2 R\sin\alpha\right)\vec{j}$ **(½ ponto)**

$\vec{a}_{PCor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{Prel} = 2\omega_1\vec{k} \wedge \omega_2 R\left(-\sin\alpha\vec{i} + \cos\alpha\vec{j}\right) = 2\omega_1\omega_2 R\left(-\cos\alpha\vec{i} - \sin\alpha\vec{j}\right)$ **(½ ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 24 de maio de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

$$\vec{a}_{Pabs} = \left(-\dot{\omega}_1 R \sin\alpha - \omega_1^2 L - \omega_1^2 R\cos\alpha - \omega_2^2 R\cos\alpha - 2\omega_1\omega_2 R\cos\alpha\right)\vec{i} + \left(\dot{\omega}_1 L + \dot{\omega}_1 R\cos\alpha + \omega_1^2 R\sin\alpha - \omega_2^2 R\sin\alpha - 2\omega_1\omega_2 R\sin\alpha\right)\vec{j}$$

(½ ponto)

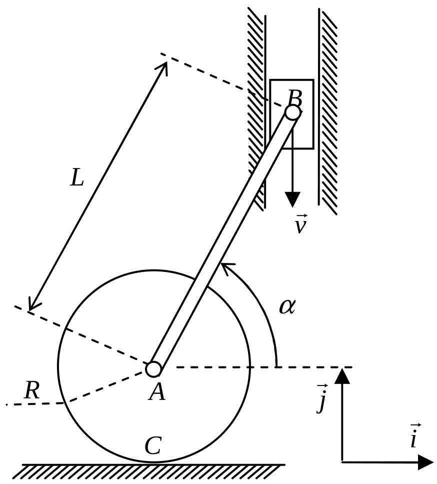
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 24 de maio de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

2ª Questão (3,5 pontos): No mecanismo da figura ao lado, um disco de raio R, articulado em seu centro A a uma barra AB de comprimento L, rola sem escorregar sobre um plano horizontal fixo. A extremidade B da barra está articulada a um bloco que desliza sobre uma guia vertical com velocidade $-v\vec{j}$ constante. Para o instante considerado na figura, pede-se:



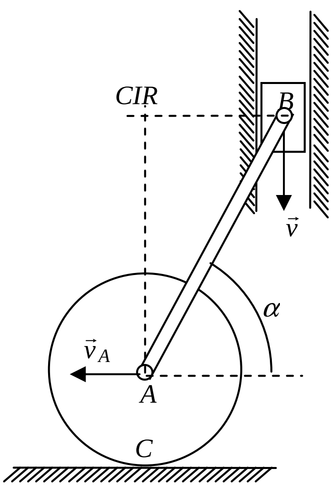
(a) o CIR da barra AB;
(b) a velocidade angular da barra AB;
(c) a velocidade do ponto A;
(d) a velocidade angular do disco;
(e) a aceleração angular da barra AB;
(f) a aceleração do ponto A;

RESOLUÇÃO

(a) Determinação do CIR da barra AB

O ponto C do disco coincide com o seu CIR e a velocidade do ponto A do disco tem a direção horizontal, ou seja:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge (A - C) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge R\vec{j} = -\omega R\vec{i}$$



Portanto são conhecidas as direções das velocidades dos pontos A e B da barra AB. O CIR da barra AB é determinado a partir da construção geométrica indicada na figura ao lado.
As coordenadas do CIR da barra, medidas a partir do ponto A, são:

$$x_{CIR} = 0$$
$$y_{CIR} = L \sin \alpha$$

(1 ponto)

(b) Determinação da velocidade angular da barra AB

O ponto I pertencente à extensão material da barra e coincidente com o seu CIR tem velocidade nula no instante considerado. Relacionando-se as velocidades dos pontos I e B, tem-se:

$$\vec{v}_B = -v\vec{j} = \vec{v}_{I \in \text{extensão material de } AB, I \equiv CIR} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge (B - I) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge L\cos\alpha\vec{i} = \omega_{AB} L\cos\alpha\vec{j}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 24 de maio de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

$$\Rightarrow \omega_{AB} = -\frac{v}{L\cos\alpha}$$ **(½ ponto)**

(c) Determinação da velocidade do ponto A

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \wedge (A-B) = -v\vec{j} - \frac{v}{L\cos\alpha}\vec{k} \wedge \left(-L\cos\alpha\vec{i} - L\sin\alpha\vec{j}\right) = -v\vec{j} + v\vec{j} - v\tan\alpha\vec{i} = -v\tan\alpha\vec{i}$$ **(½ ponto)**

(d) Determinação da velocidade angular do disco

$$\vec{v}_A = -v\tan\alpha\vec{i} = \vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge (A-C) = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge R\vec{j} = -\omega R\vec{i}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v\tan\alpha}{R}$$ **(½ ponto)**

(e) Determinação da aceleração angular da barra AB

$$\dot{\omega}_{AB} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{v}{L\cos\alpha}\right) = \frac{v(-L\sin\alpha\dot{\alpha})}{(L\cos\alpha)^2} = -\frac{v\sin\alpha}{L\cos^2\alpha}\omega_{AB} = -\frac{v\sin\alpha}{L\cos^2\alpha}\left(-\frac{v}{L\cos\alpha}\right) = \frac{v^2\sin\alpha}{L^2\cos^3\alpha}$$ **(½ ponto)**

(f) Determinação da aceleração do ponto A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_{AB} \wedge (A-B) + \vec{\omega}_{AB} \wedge [\vec{\omega}_{AB} \wedge (A-B)]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \vec{0} + \dot{\omega}_{AB}\vec{k} \wedge \left(-L\cos\alpha\vec{i} - L\sin\alpha\vec{j}\right) + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \left[\omega_{AB}\vec{k} \wedge \left(-L\cos\alpha\vec{i} - L\sin\alpha\vec{j}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = -\dot{\omega}_{AB}L\cos\alpha\vec{j} + \dot{\omega}_{AB}L\sin\alpha\vec{i} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \left[-\omega_{AB}L\cos\alpha\vec{j} + \omega_{AB}L\sin\alpha\vec{i}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \left(\dot{\omega}_{AB}L\sin\alpha + \omega_{AB}^2 L\cos\alpha\right)\vec{i} + \left(\omega_{AB}^2 L\sin\alpha - \dot{\omega}_{AB}L\cos\alpha\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \left(\frac{v^2\sin\alpha}{L^2\cos^3\alpha}L\sin\alpha + \left(-\frac{v}{L\cos\alpha}\right)^2 L\cos\alpha\right)\vec{i} + \left(\left(-\frac{v}{L\cos\alpha}\right)^2 L\sin\alpha - \frac{v^2\sin\alpha}{L^2\cos^3\alpha}L\cos\alpha\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \left(\frac{v^2\sin^2\alpha}{L\cos^3\alpha} + \frac{v^2}{L\cos\alpha}\right)\vec{i} + \left(\frac{v^2}{L\cos^2\alpha}\sin\alpha - \frac{v^2\sin\alpha}{L\cos^2\alpha}\right)\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \frac{v^2}{L\cos^3\alpha}\vec{i}$$ **(½ ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 24 de maio de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

3ª Questão (3,0 pontos). Sabendo que um ponto P se move de acordo com a equação

$$(P-O)(t)=\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+t\vec{k}\ ,$$

pede-se determinar, **para o instante t=1 seg**:

(a) a expressão intrínseca da velocidade de P ;

(b) os versores do triedro de Frenet (tangente, normal e binormal)

RESOLUÇÃO

(a) Determinação da expressão intrínseca da velocidade de P

A velocidade de P , expressa em coordenadas cartesianas, é:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\vec{k}$$

No instante $t=1$, a velocidade de P é:

$$\vec{v}(1)=e\vec{i}-e^{-1}\vec{j}+\vec{k}$$ **(½ponto)**

O módulo da velocidade de P nesse instante, é:

$$|\vec{v}(1)|=\sqrt{e^2+e^{-2}+1}=\sqrt{e^2+e^{-2}+1}$$ **(½ponto)**

A expressão intrínseca da velocidade de P , para o instante $t=1$, é:

$$\vec{v}(1)=\sqrt{e^2+e^{-2}+1}\cdot\vec{\tau}(1)$$ **(½ponto)**

(b) Determinação dos versores do triedro de Frenet

O versor tangente, no instante $t=1$, expresso em coordenadas cartesianas, é:

$$\vec{\tau}(1)=\frac{\vec{v}(1)}{|\vec{v}(1)|}=\frac{e\vec{i}-e^{-1}\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{e^2+e^{-2}+1}}$$ **(½ponto)**

A aceleração do ponto P , expressa em coordenadas cartesianas, é:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\vec{k}\right)=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}$$

No instante $t=1$, a aceleração de P , é:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Segunda Prova – 24 de maio de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

$\vec{a}(1) = e\vec{i} + e^{-1}\vec{j}$

Calculemos o produto vetorial $\vec{v}(1) \wedge \vec{a}(1)$ e o seu módulo $|\vec{v}(1) \wedge \vec{a}(1)|$:

$$\vec{v}(1) \wedge \vec{a}(1) = \left(e\vec{i} - e^{-1}\vec{j} + \vec{k}\right) \wedge \left(e\vec{i} + e^{-1}\vec{j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e & -e^{-1} & 1 \\ e & e^{-1} & 0 \end{vmatrix} = -e^{-1}\vec{i} + e\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|\vec{v}(1) \wedge \vec{a}(1)| = \sqrt{e^{-2} + e^{2} + 4}$$

O versor binormal, no instante $t = 1$, é dado por:

$$\vec{b}(1) = \frac{\vec{v}(1) \wedge \vec{a}(1)}{|\vec{v}(1) \wedge \vec{a}(1)|} = \frac{-e^{-1}\vec{i} + e\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{e^{-2} + e^{2} + 4}}$$ **(½ponto)**

O versor normal, no instante $t = 1$, é dado por:

$$\vec{n}(1) = \vec{b}(1) \wedge \vec{\tau}(1) = \frac{-e^{-1}\vec{i} + e\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{e^{-2} + e^{2} + 4}} \wedge \frac{e\vec{i} - e^{-1}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{e^{2} + e^{-2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(e^{-2} + e^{2} + 4\right)\left(e^{2} + e^{-2} + 1\right)}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -e^{-1} & e & 2 \\ e & -e^{-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(1) = \frac{1}{\sqrt{\left(e^{-2} + e^{2} + 4\right)\left(e^{2} + e^{-2} + 1\right)}} \left[\left(e + 2e^{-1}\right)\vec{i} + \left(e^{-1} + 2e\right)\vec{j} + \left(e^{-2} - e^{2}\right)\vec{k}\right]$$ **(½ponto)**