ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME310 Mecânica I – 2024 – Prova 2 – 15 de outubro de 2024

Instruções gerais e formulário estão disponíveis no caderno de respostas.
Permanência mínima: 45 min. Duração: 120 min. Entregue esta folha ao aplicador caso saia da sala antes do término.

1ª Questão (3,0 pontos). Um ponto móvel M descreve a trajetória
$(M-O)=\vec{r}=(\cos\theta+2\cos 2\theta)\vec{i}+(\sin\theta-2\sin 2\theta)\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}$
com lei horária dada por $\theta(t)=\pi t$.

<u>Para o instante</u> $\boxed{t=1\,\text{s}}$, **<u>pede-se</u>**:

a – (0,5 ponto) a velocidade $\vec{v}$ de M expressa na base $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

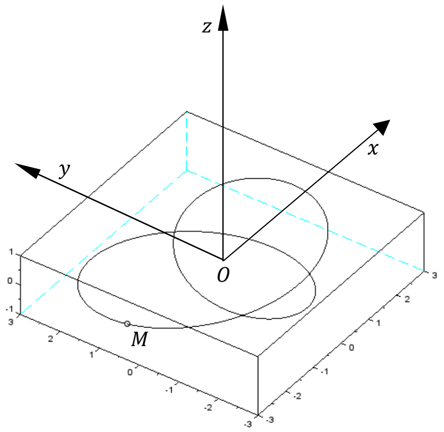
b – (0,5 ponto) a aceleração $\vec{a}$ de M expressa na base $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

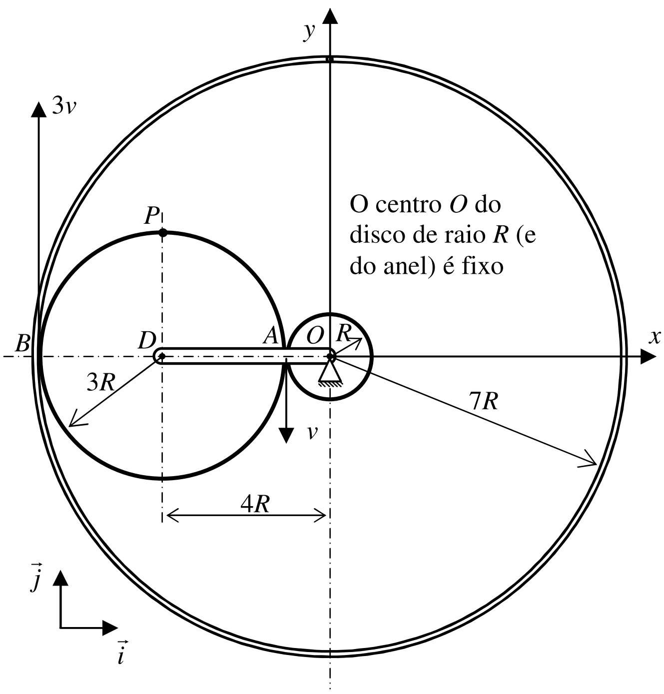
c – (0,5 ponto) o versor $\vec{t}$ tangente à trajetória na posição de M.

d – (0,5 ponto) a expressão intrínseca da velocidade $\vec{v}$ de M.

e – (0,5 ponto) o raio de curvatura ρ da trajetória na posição de M.

f – (0,5 ponto) a expressão intrínseca da aceleração $\vec{a}$ de M.





2ª Questão (3,5 pontos) – A figura mostra um disco de centro D e raio $3R$ em contato sem escorregamento com um disco de raio R e centro O e um anel de raio $7R$, de centro O. A barra OD une os centros D e O por meio de articulações. **<u>No instante mostrado na figura</u>**, o ponto A do disco de raio R tem velocidade $\vec{v}_A=-v\vec{j}$, e o ponto B do anel tem velocidade $\vec{v}_B=3v\vec{j}$, com v conhecida e constante.

<u>Neste instante determine</u>:

a – (1,0 ponto) A posição do Centro Instantâneo de Rotação (*CIR*) do disco de centro D (graficamente), e a velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D.

b – (1,0 ponto) O vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco de centro D, e a velocidade $\vec{v}_P$ do ponto P, sabendo que, nesse instante, $(P-D)=3R\vec{j}$.

c – (0,5 ponto) O vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra OD.

d – (1,0 ponto) A aceleração $\vec{a}_D$ do ponto D e a aceleração $\vec{a}_P$ do ponto P.

3ª Questão (3,5 pontos). A placa quadrada $ABCD$, de lado $2L$, gira em torno do eixo Ax com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1=-\omega_1\vec{i}$, sendo $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ a base do sistema de eixos $Axyz$ ligados à placa. Articulada ao centro O da placa e restrita a mover-se em seu plano, há uma barra delgada OP, de comprimento $2L$. Essa barra tem velocidade angular $\vec{\omega}_2=\dot{\varphi}\vec{k}=\omega_2\vec{k}$ e aceleração angular $\vec{\alpha}_2=\ddot{\varphi}\vec{k}=\alpha_2\vec{k}$.

Expressando as respostas na base $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$, **<u>pede-se, no instante em que</u>** $\boxed{\varphi=\pi}$:

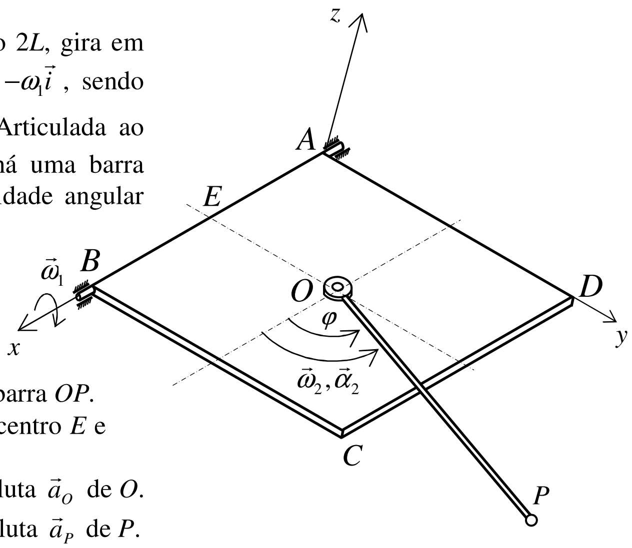
a – (0,5 ponto) O vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$ da barra OP.

b – (0,5 ponto) O vetor aceleração rotacional $\vec{\alpha}$ absoluta da barra OP.

Notando que o ponto O descreve uma trajetória circular de centro E e raio L, em um plano normal ao eixo eixo Ax, pede-se:

c – (1,0 ponto) a velocidade absoluta $\vec{v}_O$ e a aceleração absoluta $\vec{a}_O$ de O.

d – (1,5 ponto) a velocidade absoluta $\vec{v}_P$ e a aceleração absoluta $\vec{a}_P$ de P.



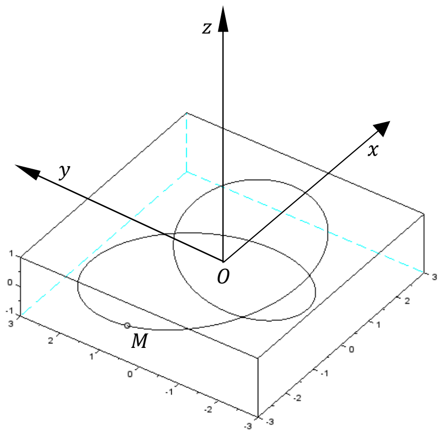
Houve erro de digitação, os valores corretos são:
Item (b): 1,0 ponto
Item (d): 1,0 ponto

GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos). Um ponto móvel M descreve a trajetória

$$(M-O)=\vec{r}=(\cos\theta+2\cos 2\theta)\vec{i}+(\sin\theta-2\sin 2\theta)\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}$$

com lei horária dada por $\theta(t)=\pi t$.



Para o instante $\boxed{t=1\,\mathrm{s}}$, **pede-se**:

a – (0,5 ponto) a velocidade $\vec{v}$ de M expressa na base $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

b – (0,5 ponto) a aceleração $\vec{a}$ de M expressa na base $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$.

c – (0,5 ponto) o versor $\vec{t}$ tangente à trajetória na posição de M.

d – (0,5 ponto) a expressão intrínseca da velocidade $\vec{v}$ de M.

e – (0,5 ponto) o raio de curvatura ρ da trajetória na posição de M.

f – (0,5 ponto) a expressão intrínseca da aceleração $\vec{a}$ de M.

RESOLUÇÃO

a – Cálculo da velocidade $\vec{v}$ de M

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\pi\left[(-\sin\theta-4\sin 2\theta)\vec{i}+(\cos\theta-4\cos 2\theta)\vec{j}-\cos\theta\,\vec{k}\right]$$

No instante t = 1 s, $\theta(t)=\pi$ de modo que:

$$\vec{v}=\pi\left[(-\sin\pi-4\sin 2\pi)\vec{i}+(\cos\pi-4\cos 2\pi)\vec{j}-\cos\pi\,\vec{k}\right]$$

Ou seja, $\boxed{\vec{v}=\pi\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)}$

b – Cálculo da aceleração de $\vec{a}$ de M

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\pi^2\left[(-\cos\theta-8\cos 2\theta)\vec{i}+(-\sin\theta+8\sin 2\theta)\vec{j}+\sin\theta\,\vec{k}\right]$$

No instante t = 1 s tem-se:

$$\vec{a}=\pi^2\left[(-\cos\pi-8\cos 2\pi)\vec{i}+(-\sin\pi+8\sin 2\pi)\vec{j}+\sin\pi\,\vec{k}\right]$$

Ou seja, $\boxed{\vec{a}=-7\pi^2\,\vec{i}}$

c – Cálculo do versor tangente $\vec{t}$ à trajetória no instante t = 1 s

$$\vec{t}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{\pi\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)}{\left|\pi\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)\right|}\Rightarrow\boxed{\vec{t}=\frac{\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)}{\sqrt{26}}}$$

d – Em coordenadas intrínsecas, a velocidade de M, no instante t = 1 s se expressa como:

$$\boxed{\vec{v}=\pi\sqrt{26}\,\vec{t}}$$

e – Cálculo do raio de curvatura ρ da trajetória na posição de M

$$\rho=\frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v}\wedge\vec{a}|}=\frac{\left|\pi\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)\right|^3}{\left|\pi\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)\wedge\left(-7\pi^2\,\vec{i}\right)\right|}=\frac{\left|\pi\sqrt{26}\right|^3}{\left|7\pi^3\left(-5\vec{k}-\vec{j}\right)\right|}=\frac{\left|\pi\sqrt{26}\right|^3}{7\pi^3\sqrt{26}}\Rightarrow\boxed{\rho=\frac{26}{7}}$$

f – Expressão intrínseca da aceleração de M

$$\vec{a}=a_t\vec{t}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Projetando-se a aceleração de M na direção do versor tangente à trajetória tem-se, para o instante t = 1 s:

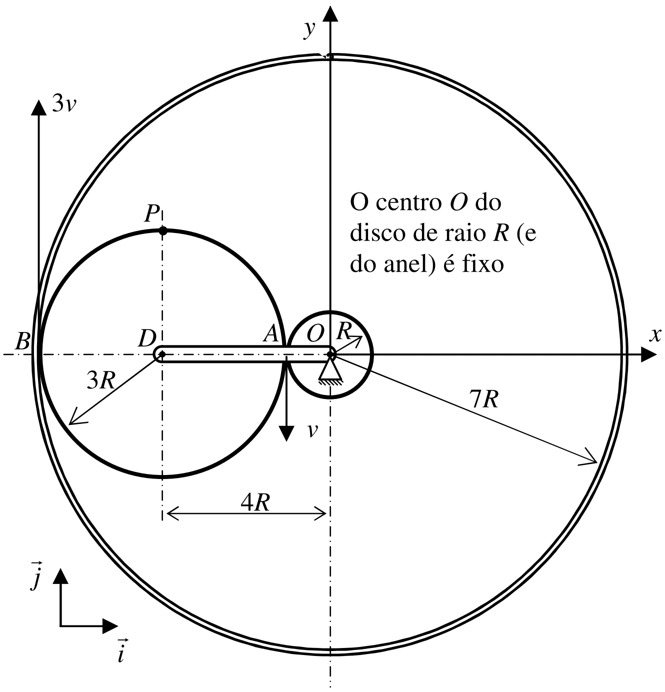
$$a_t=\vec{a}\cdot\vec{t}=-7\pi^2\,\vec{i}\cdot\frac{\left(-5\,\vec{j}+\vec{k}\right)}{\sqrt{26}}=0$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{\left(\pi\sqrt{26}\right)^2}{\frac{26}{7}}=7\pi^2$$

$$\boxed{\vec{a}=7\pi^2\,\vec{n}}$$

Observação:
Cada item vale (0,5). Em caso de erros algébricos simples, desconta-se (0,25) do item em que ocorreu o erro, não havendo acúmulo de descontos para os itens subseqüentes.

GABARITO



2ª Questão (3,5 pontos) – A figura mostra um disco de centro D e raio $3R$ em contato sem escorregamento com um disco de raio R e centro O e um anel de raio $7R$, de centro O. A barra OD une os centros D e O por meio de articulações. **<u>No instante mostrado na figura</u>**, o ponto A do disco de raio R tem velocidade $\vec{v}_A = -v\,\vec{j}$, e o ponto B do anel tem velocidade $\vec{v}_B = 3v\,\vec{j}$, com v conhecida e constante.

<u>Neste instante determine</u>:

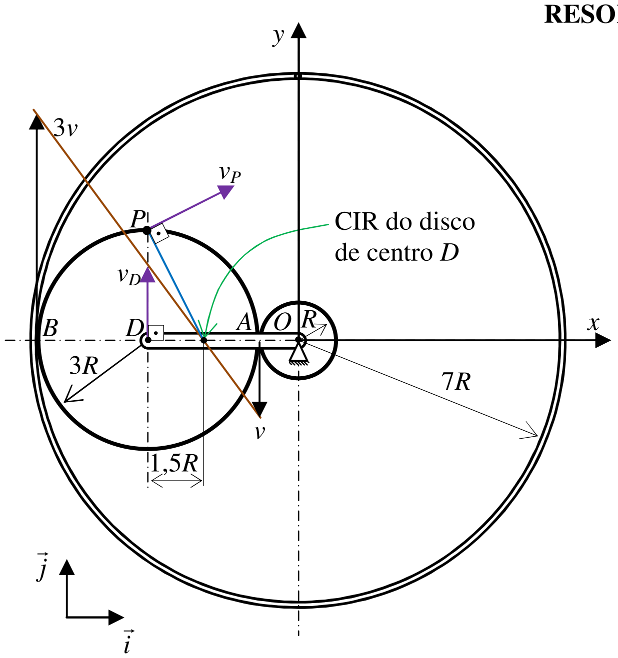
a – (1,0 ponto) A posição do Centro Instantâneo de Rotação (CIR) do disco de centro D (graficamente), e a velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D.

b – (1,0 ponto) O vetor de rotação $\vec{\omega}$ do disco de centro D, e a velocidade $\vec{v}_P$ do ponto P, sabendo que, nesse instante, $(P-D)=3R\,\vec{j}$.

c – (0,5 ponto) O vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra OD.

d – (1,0 ponto) A aceleração $\vec{a}_D$ do ponto D e a aceleração $\vec{a}_P$ do ponto P.

RESOLUÇÃO



a) As coordenadas do CIR do disco de centro D são:

$$\boxed{(CIR-O)=-2{,}5R\,\vec{i}}$$

(obs.: basta a figura)

Por semelhança de triângulos, temos que

$$\boxed{\vec{v}_D = v\,\vec{j}}$$

b) Observando a figura e usando a regra da mão direita, e sabendo que se trata de movimento plano, o vetor de rotação tem direção e sentido $-\vec{k}$. Usando o CIR:

$$|\vec{v}_D| = |\vec{\omega}|\cdot|D-CIR| \Rightarrow v=\omega\frac{3}{2}R \Rightarrow \omega=\frac{2v}{3R}$$

$$\boxed{\vec{\omega}=-\frac{2v}{3R}\vec{k}}$$

Usando o campo de velocidades do disco de centro D:

$$\vec{v}_P=\vec{v}_D+\vec{\omega}\wedge(P-D)=v\,\vec{j}-\frac{2v}{3R}\vec{k}\wedge 3R\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_P=v\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)}$$

c) Observando a figura, temos que: $|\vec{v}_D|=|\vec{\Omega}|\cdot|D-O| \Rightarrow v=\Omega 4R \Rightarrow \Omega=\frac{v}{4R} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}=-\frac{v}{4R}\vec{k}}$

d) Observando que o ponto D realiza um movimento circular uniforme de raio $4R$ e centro O, temos somente a parcela normal da aceleração, que aponta na direção de $\vec{i}$. Portanto: $\boxed{\vec{a}_D=\frac{v^2}{4R}\vec{i}}$

Usando o campo de acelerações do disco de centro D:

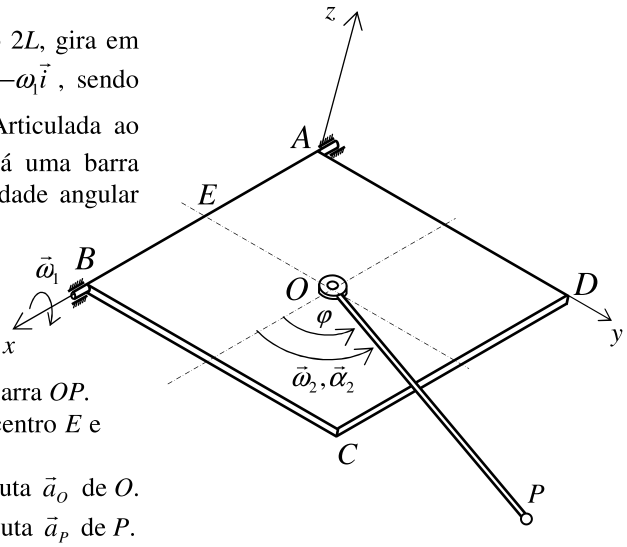
$$\vec{a}_P=\vec{a}_D+\vec{\alpha}\wedge(P-D)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(P-D)]$$

Sabemos que $\vec{\omega}=-\frac{2v}{3R}\vec{k}$, como v é constante, e a direção de $\vec{k}$ não se altera, o vetor aceleração angular do disco de centro D é nulo: $\vec{\alpha}=\vec{0}$.

$$\vec{a}_P=\frac{v^2}{4R}\vec{i}+\vec{0}\wedge(-3R\vec{i})+\left(-\frac{2v}{3R}\right)\vec{k}\wedge\left[\left(-\frac{2v}{3R}\right)\vec{k}\wedge(3R\,\vec{j})\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_P=\frac{v^2}{4R}\vec{i}-\frac{4v^2}{3R}\vec{j}}$$

GABARITO

3ª Questão (3,5 pontos). A placa quadrada *ABCD*, de lado $2L$, gira em torno do eixo *Ax* com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1 = -\omega_1 \vec{i}$, sendo $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ a base do sistema de eixos *Axyz* ligados à placa. Articulada ao centro *O* da placa e restrita a mover-se em seu plano, há uma barra delgada *OP*, de comprimento $2L$. Essa barra tem velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega_2 \vec{k}$ e aceleração angular $\vec{\alpha}_2 = \ddot{\varphi}\vec{k} = \alpha_2 \vec{k}$.



Expressando as respostas na base $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$, **pede-se, no instante em que** $\boxed{\varphi = \pi}$:

a – (0,5 ponto) O vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$ da barra *OP*.

b – (1,0 ponto) O vetor aceleração rotacional $\vec{\alpha}$ absoluta da barra *OP*.

Notando que o ponto *O* descreve uma trajetória circular de centro *E* e raio *L*, em um plano normal ao eixo eixo *Ax*, pede-se:

c – (1,0 ponto) a velocidade absoluta $\vec{v}_O$ e a aceleração absoluta $\vec{a}_O$ de *O*.

d – (1,0 ponto) a velocidade absoluta $\vec{v}_P$ e a aceleração absoluta $\vec{a}_P$ de *P*.

RESOLUÇÃO

a – Sendo $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ os vetores rotação de arrastamento e rotação relativa da barra, respectivamente, tem-se:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}}$$

b – Composição de movimentos – vetor aceleração angular:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$

Notando que o vetor aceleração rotacional de arrastamento da barra é nulo e que o vetor aceleração rotacional relativa é $\vec{\alpha}_{rel} = \vec{\alpha}_2 = \ddot{\varphi}\vec{k} = \alpha_2 \vec{k}$, tem-se: $\vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2 = \alpha_2 \vec{k} - \omega_1 \vec{i} \wedge \omega_2 \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \alpha_2 \vec{k} + \omega_1 \omega_2 \vec{j}}$

c – Notando que *Oz* é a direção da tangente à trajetória de *O*, conclui-se, de imediato, que $\boxed{\vec{v}_O = -\omega_1 L \vec{k}}$

Alternativamente, poderíamos ter calculado $\vec{v}_O$ utilizando a equação do campo de velocidades para a placa, ou seja:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_E + \vec{\omega}_1 \wedge (O - E) = \vec{0} - \omega_1 \vec{i} \wedge L\vec{j} = -\omega_1 L \vec{k} = -\omega_1 L \vec{k}$$

Como $\vec{\omega}_1$ é contante, a componente tangencial da aceleração de *O* é nula, de modo que $\vec{a}_O$ apresenta apenas a componente centrípeta, de módulo $a_O = \omega_1^2 L$ e direção dada pelo versor de $(E - O)$. Assim, resulta que $\boxed{\vec{a}_O = -\omega_1^2 L \vec{j}}$.

d – Composição de movimentos - velocidade

$$\left.\begin{aligned}
\vec{v}_P &= \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel} \\
\vec{v}_{P,arr} &= \vec{v}_{O\,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = -\omega_1 L \vec{k} - \omega_1 \vec{i} \wedge \left(-2L\vec{i}\right) = -\omega_1 L \vec{k} \\
\vec{v}_{P,rel} &= \vec{v}_{O,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge \left(-2L\vec{i}\right) = -2\omega_2 L \vec{j}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v}_P = -\omega_1 L \vec{k} - 2\omega_2 L \vec{j}$$

Alternativamente, pelo campo de velocidades da barra: $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) = -\omega_1 L \vec{k} + \left(-\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left(-2L\vec{i}\right)$

$$\boxed{\vec{v}_P = -\omega_1 L \vec{k} - 2\omega_2 L \vec{j}}$$

Composição de movimentos - acelerações

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,rel} + 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel}$$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_{O\,arr} + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)\right] = -\omega_1^2 L \vec{j} + \vec{0} - \omega_1 \vec{i} \wedge \left[-\omega_1 \vec{i} \wedge \left(-2L\vec{i}\right)\right] = -\omega_1^2 L \vec{j}$$

$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{a}_{O\,rel} + \vec{\alpha}_{rel} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{rel} \wedge \left[\vec{\omega}_{rel} \wedge (P - O)\right] = \vec{0} + \alpha_2 \vec{k} \wedge \left(-2L\vec{i}\right) + \omega_2 \vec{k} \wedge \left[\omega_2 \vec{k} \wedge \left(-2L\vec{i}\right)\right] = -2\alpha_2 L \vec{j} + 2\omega_2^2 L \vec{i}$$

$$2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\left(-\omega_1 \vec{i}\right) \wedge \left(-2\omega_2 L \vec{j}\right) = 4\omega_1 \omega_2 L \vec{k}$$

$$\vec{a}_P = -\omega_1^2 L \vec{j} - 2\alpha_2 L \vec{j} + 2\omega_2^2 L \vec{i} + 2\omega_1 \omega_2 L \vec{k} \Rightarrow \vec{a}_P = 2\omega_2^2 L \vec{i} - \left(\omega_1^2 L + 2\alpha_2 L\right)\vec{j} + 4\omega_1 \omega_2 L \vec{k}$$

Alternativamente, pelo campo de acelerações da barra:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P - O)\right] = -\omega_1^2 L \vec{j} + \left(\alpha_2 \vec{k} + \omega_1 \omega_2 \vec{j}\right) \wedge \left(-2L\vec{i}\right) + \left(-\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left[\left(-\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{k}\right) \wedge \left(-2L\vec{i}\right)\right]$$

$$\vec{a}_P = -\omega_1^2 L \vec{j} - 2\alpha_2 L \vec{j} + 2\omega_1 \omega_2 L \vec{k} + 2\omega_1 \omega_2 L \vec{k} + 2\omega_2^2 L \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = 2\omega_2^2 L \vec{i} - \left(\omega_1^2 L + 2\alpha_2 L\right)\vec{j} + 4\omega_1 \omega_2 L \vec{k}}$$