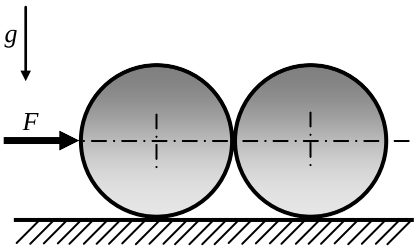
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Segunda Prova – 19 de outubro de 2010

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido o uso de calculadoras)



QUESTÃO 1 (3,0 pontos): Sabendo que os dois discos têm o mesmo raio R e o mesmo peso mg, e que o coeficiente de atrito tem o mesmo valor μ em todos os contatos, pede-se:

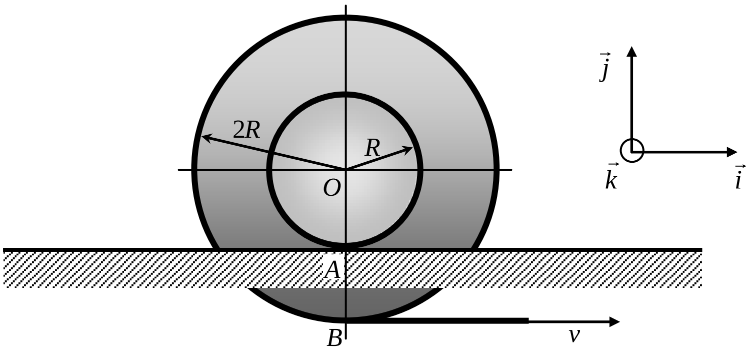
a) desenhar o diagrama de corpo livre de cada disco;

b) calcular todas as forças na situação de equilíbrio;

c) determinar o valor mínimo de μ para que o equilíbrio seja possível.

d) para esse valor mínimo de μ calcular o máximo valor de F compatível com o equilíbrio.

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): Considere uma bobina com um cabo enrolado conforme mostrado na figura. O raio de enrolamento é $2R$ e o raio de rolamento é R. Sabendo que não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo e que o cabo é tracionado horizontalmente com velocidade constante v, pede-se:



a) o CIR e o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da bobina;

b) a velocidade $\vec{v}_O$ e a aceleração $\vec{a}_O$ do centro geométrico O da bobina;

c) a aceleração $\vec{a}_A$ do ponto A da bobina;

d) dizer se o cabo está se enrolando ou desenrolando. Justifique.

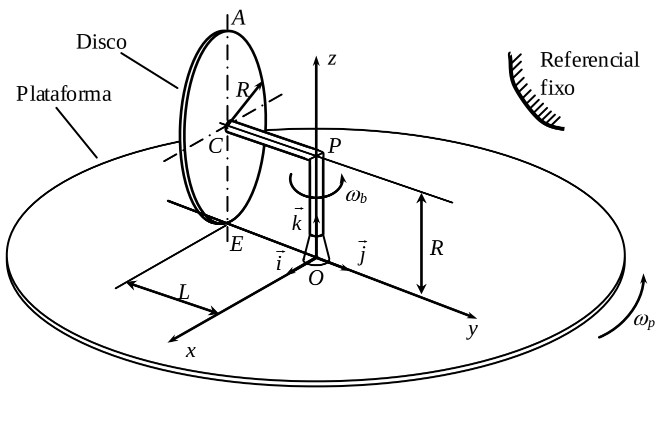
QUESTÃO 3 (3,5 pontos): O disco está conectado pelo seu centro C à peça CPO por um mancal, de tal forma que possa girar em torno do segmento CP mantendo sua face plana sempre perpendicular a este segmento. O eixo Oy está sempre na direção do segmento OE, sendo que não há escorregamento no ponto de contato E entre o disco e a plataforma. O sistema de coordenadas $Oxyz$ é solidário à peça CPO. Em relação ao referencial fixo, os vetores de rotação da plataforma e da peça CPO são, respectivamente, $\vec{\omega}_p = \omega_p \vec{k}$, constante, e $\vec{\omega}_b = \omega_b \vec{k}$, constante. Os pontos P e O pertencem ao eixo Oz e são fixos.

O segmento CP é paralelo à face plana da plataforma e a esta, por sua vez, é perpendicular ao eixo Oz. No instante mostrado na figura, o segmento CA (comprimento R), é paralelo ao eixo Oz. Adotando a peça CPO como referencial móvel, determine:

a) O vetor de rotação relativa $\vec{\omega}_{d,rel}$ e o vetor de rotação absoluta $\vec{\omega}_d$ do disco.

b) As acelerações relativa $\vec{a}_{A,rel}$, de Coriolis $\vec{a}_{A,Cor}$ e absoluta $\vec{a}_A$ do ponto A do disco.

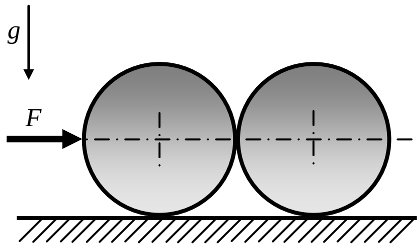
c) A relação entre ω_b e ω_p para que a velocidade absoluta do ponto A seja zero no instante mostrado na figura.



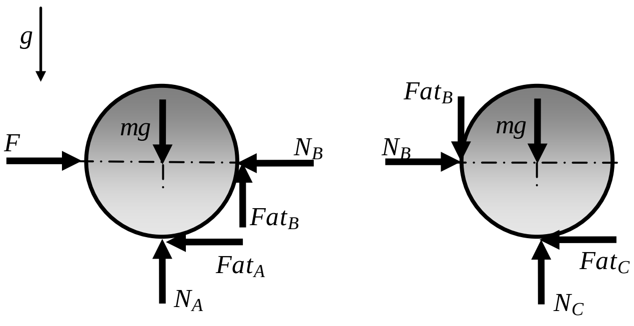
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



QUESTÃO 1 (3,0 pontos): Sabendo que os dois discos têm o mesmo raio R e o mesmo peso mg, e que o coeficiente de atrito tem o mesmo valor μ em todos os contatos, pede-se:
a) desenhar o diagrama de corpo livre de cada disco;
b) calcular todas as forças na situação de equilíbrio;
c) determinar o valor mínimo de μ para que o equilíbrio seja possível.
d) para esse valor mínimo de μ calcular o máximo valor de F compatível com o equilíbrio.



(0,5)

No segundo disco, para equilibrar a normal em B, a força de atrito em C deve ser para a esquerda.
Sendo assim, para equilibrar momentos em torno do centro do segundo disco, a força de atrito em B deve ser para baixo.
Conclui-se então, pelo equilíbrio de momentos em torno do centro do primeiro disco, que a força de atrito em A deve ser para a esquerda.

No primeiro disco:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \therefore N_B + F_{at\,A} = F & (1) \\ \Sigma F_y = 0 \therefore N_A + F_{at\,B} = mg & (2) \\ \Sigma M_z = 0 \therefore F_{at\,A} = F_{at\,B} & (3) \end{cases}$$

No segundo disco: (0,5)

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \therefore N_B = F_{at\,C} & (4) \\ \Sigma F_y = 0 \therefore N_C - F_{at\,B} = mg & (5) \\ \Sigma M_z = 0 \therefore F_{at\,B} = F_{at\,C} & (6) \end{cases}$$

Assim, de (3) e (6): $F_{at\,A} = F_{at\,B} = F_{at\,C} = F_{at}$
Substituindo (4) em (1): $F_{at\,C} + F_{at\,A} = 2F_{at} = F$

Logo: $F_{at} = \dfrac{F}{2}$
Substituindo em (2), (4) e (5): (0,5)

$$N_A = mg - \frac{F}{2} \qquad N_B = \frac{F}{2} \qquad N_C = mg + \frac{F}{2}$$

Lei de Coulomb em A:
$F_{atA} \leq \mu N_A$

$$\frac{F}{2} \leq \mu\left(mg - \frac{F}{2}\right) \Rightarrow \mu \geq \frac{F}{2mg - F} \quad (\text{se } F < 2mg)$$

Lei de Coulomb em B:
$F_{atB} \leq \mu N_B$

$$\frac{F}{2} \leq \mu \frac{F}{2} \Rightarrow \mu \geq 1$$ (0,5)

Lei de Coulomb em C:
$F_{atC} \leq \mu N_C$

$$\frac{F}{2} \leq \mu\left(mg + \frac{F}{2}\right) \Rightarrow \mu \geq \frac{F}{2mg + F}$$

Logo $\boxed{\mu_{mín} = máx\left\{1, \dfrac{F}{2mg - F}\right\}}$ (0,5)

Assim:

i) se $0 < F \leq mg \Rightarrow \boxed{\mu_{mín} = 1}$

ii) se $mg < F < 2mg \Rightarrow \boxed{\mu_{mín} = \dfrac{F}{2mg - F}}$ (0,5)

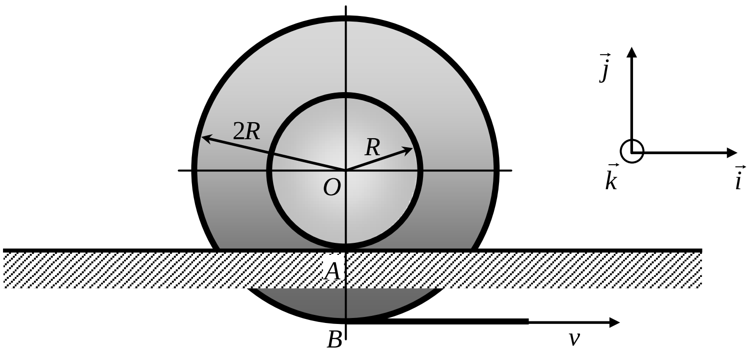
iii) se $F \geq 2mg \Rightarrow$ não há equilíbrio

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): Considere uma bobina com um cabo enrolado conforme mostrado na figura. O raio de enrolamento é $2R$ e o raio de rolamento é R. Sabendo que não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo e que o cabo é tracionado horizontalmente com velocidade constante v, pede-se:



a) o CIR e o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da bobina;
b) a velocidade $\vec{v}_O$ e a aceleração $\vec{a}_O$ do centro geométrico O da bobina;
c) a aceleração $\vec{a}_A$ do ponto A da bobina;
d) dizer se o cabo está se enrolando ou desenrolando. Justifique.

Não há escorregamento, então: $\vec{v}_A = \vec{0}$, logo

$\boxed{CIR \equiv A}$ (0,5)

$$\vec{v}_B = v\vec{i} = \omega\vec{k} \wedge (B - CIR) = \omega\vec{k} \wedge \left(-R\vec{j}\right)$$

$$v\vec{i} = \omega R\vec{i} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow$$

$\boxed{\vec{\omega} = \frac{v}{R}\vec{k}}$ (0,5)

$$\vec{v}_O = \omega\vec{k} \wedge (O - CIR) = \omega\vec{k} \wedge \left(R\vec{j}\right) \Rightarrow$$

$\vec{v}_O = -\omega R\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_O = -v\vec{i}}$ (0,5)

Como O se translada horizontalmente com v constante: $\boxed{\vec{a}_O = \vec{0}}$ (0,5)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$$

Com $\vec{a}_O = \vec{0}$ e $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$,

$$\vec{a}_A = \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(-R\vec{j}\right)\right] = \omega^2 R\vec{j} \Rightarrow$$

$\boxed{\vec{a}_A = \frac{v^2}{R}\vec{j}}$ (0,5)

O cabo está desenrolando já que sua extremidade desloca-se para a direita enquanto o carretel gira em sentido anti-horário com o seu centro deslocando-se para a esquerda. (1,0)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

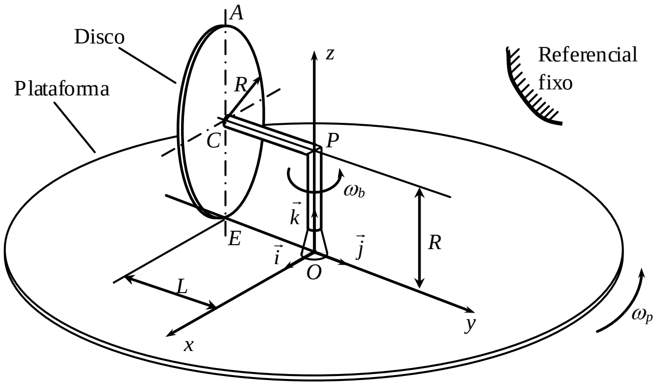
QUESTÃO 3 (3,5 pontos): O disco está conectado pelo seu centro *C* à peça *CPO* por um mancal, de tal forma que possa girar em torno do segmento *CP* mantendo sua face plana sempre perpendicular a este segmento. O eixo *Oy* está sempre na direção do segmento *OE*, sendo que não há escorregamento no ponto de contato *E* entre o disco e a plataforma. O sistema de coordenadas *Oxyz* é solidário à peça *CPO*. Em relação ao referencial fixo, os vetores de rotação da plataforma e da peça *CPO* são, respectivamente, $\vec{\omega}_p = \omega_p \vec{k}$, constante, e $\vec{\omega}_b = \omega_b \vec{k}$, constante. Os pontos *P* e *O* pertencem ao eixo *Oz* e são fixos.

O segmento *CP* é paralelo à face plana da plataforma e a esta, por sua vez, é perpendicular ao eixo *Oz*. No instante mostrado na figura, o segmento *CA* (comprimento *R*), é paralelo ao eixo *Oz*. Adotando a peça *CPO* como referencial móvel, determine:

a) O vetor de rotação relativa $\vec{\omega}_{d,rel}$ e o vetor de rotação absoluta $\vec{\omega}_d$ do disco.

b) As acelerações relativa $\vec{a}_{A,rel}$, de Coriolis $\vec{a}_{A,Cor}$ e absoluta $\vec{a}_A$ do ponto *A* do disco.

c) A relação entre ω_b e ω_p para que a velocidade absoluta do ponto *A* seja zero no instante mostrado na figura.



a) O movimento do disco é restringido pelo mancal em *C* de tal forma que, em relação à peça *CPO*, o vetor de rotação relativa possui apenas componente em $\vec{j}$, ou seja, $\vec{\omega}_{d,rel} = \omega_{d,rel}\vec{j}$. Pela definição de movimento de arrastamento, o vetor de rotação de arrastamento do disco é $\vec{\omega}_{d,arr} = \vec{\omega}_b = \omega_b \vec{k}$. Assim, o vetor de rotação absoluto do disco é:

$$\vec{\omega}_d = \vec{\omega}_{d,rel} + \vec{\omega}_{d,arr} = \omega_{d,rel}\vec{j} + \omega_b \vec{k}.$$

A velocidade absoluta do ponto *C* pode ser calculada por:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega}_b \wedge (C - P) = \omega_b \vec{k} \wedge \left(-L\vec{j}\right) \Rightarrow \vec{v}_C = \omega_b L \vec{i}$$

A velocidade absoluta do ponto *E* pertencente ao disco pode ser calculada por:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{\omega}_d \wedge (E - C) = \omega_b L \vec{i} + \left(\omega_{d,rel}\vec{j} + \omega_b \vec{k}\right) \wedge \left(-R\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{v}_E = \omega_B L \vec{i} - \omega_{d,rel} R \vec{i}$$

A velocidade absoluta do ponto E pertencente à plataforma pode ser calculada por:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_O + \vec{\omega}_p \wedge (E - O) = \omega_p \vec{k} \wedge \left(-L\vec{j}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_E = \omega_p L \vec{i}$$

Comparando (como não há escorregamento, as velocidades são iguais):

$$\omega_b L \vec{i} - \omega_{d,rel} R \vec{i} = \omega_p L \vec{i} \Rightarrow \omega_{d,rel} = \left(\omega_b - \omega_p\right)\frac{L}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_{d,rel} = \left(\omega_b - \omega_p\right)\frac{L}{R}\vec{j}}$$

Portanto: $\boxed{\vec{\omega}_d = \left(\omega_b - \omega_p\right)\frac{L}{R}\vec{j} + \omega_b \vec{k}}$ (1,0)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP 05508-970, São Paulo, SP
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

b) Aceleração relativa do ponto *A*:

$$\vec{a}_{A,rel} = \vec{a}_{C,rel} + \dot{\vec{\omega}}_{d,rel} \wedge (A - C) + \vec{\omega}_{d,rel} \wedge \left[\vec{\omega}_{d,rel} \wedge (A - C)\right] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{A,rel} = \vec{0} + \vec{0} \wedge R\vec{k} + (\omega_b - \omega_p)\frac{L}{R}\vec{j} \wedge \left[(\omega_b - \omega_p)\frac{L}{R}\vec{j} \wedge R\vec{k}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{A,rel} = -(\omega_b - \omega_p)^2 \frac{L^2}{R}\vec{k}}$$

Aceleração de Coriolis do ponto *A*: $\vec{a}_{A,Cor} = 2 \cdot \vec{\omega}_{d,arr} \wedge \vec{v}_{A,rel}$

Velocidade relativa do ponto *A*:

$$\vec{v}_{A,rel} = \vec{v}_{C,rel} + \vec{\omega}_{d,rel} \wedge (A - C) = \vec{0} + (\omega_b - \omega_p)\frac{L}{R}\vec{j} \wedge R\vec{k} \quad \Rightarrow \vec{v}_{A,rel} = (\omega_b - \omega_p)L\vec{i}$$

Como o vetor de rotação de arrastamento do disco é $\vec{\omega}_{d,arr} = \vec{\omega}_b = \omega_b \vec{k}$, temos:

$$\vec{a}_{A,Cor} = 2 \cdot \vec{\omega}_{d,arr} \wedge \vec{v}_{A,rel} = 2\omega_b \vec{k} \wedge (\omega_b - \omega_p)L\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_{A,Cor} = 2\omega_b(\omega_b - \omega_p)L\vec{j}}$$

Aceleração de arrastamento do ponto *A*:

$$\vec{a}_{A,arr} = \vec{a}_{P,arr} + \dot{\vec{\omega}}_{d,arr} \wedge (A - P) + \vec{\omega}_{d,arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{d,arr} \wedge (A - P)\right] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{A,arr} = \vec{0} + \vec{0} \wedge \left(-L\vec{j} + R\vec{k}\right) + \omega_b \vec{k} \wedge \left[\omega_b \vec{k} \wedge \left(-L\vec{j} + R\vec{k}\right)\right] = \omega_b^2 L k\vec{j}$$

Aceleração absoluta do ponto *A*:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A,rel} + \vec{a}_{A,arr} + \vec{a}_{A,Cor} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \left(3\omega_b^2 - 2\omega_b\omega_p\right)L\vec{j} - \left[(\omega_b - \omega_p)^2 \frac{L^2}{R}\right]\vec{k}} \qquad (1,5)$$

c) Velocidade absoluta do ponto *A*:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A,rel} + \vec{v}_{A,arr}$$

$$\vec{v}_{A,rel} = (\omega_b - \omega_p)L\vec{i} \qquad \vec{v}_{A,arr} = \vec{v}_C = \omega_b L\vec{i}$$

Portanto: $\vec{v}_A = \vec{v}_{A,rel} + \vec{v}_{A,arr} = (\omega_b - \omega_p)L\vec{i} + \omega_b L\vec{i} = (2\omega_b - \omega_p)L\vec{i}$

Para que $\vec{v}_A = \vec{0} \Rightarrow (2\omega_b - \omega_p)L = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_p = 2\omega_b}$ (1,0)