ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

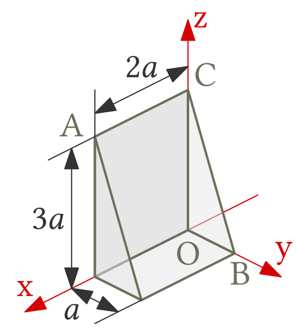
PME 3100 – MECÂNICA I – 2024 – Prova 1 – 10 de Setembro de 2024

Instruções gerais e formulário estão disponíveis no caderno de respostas.

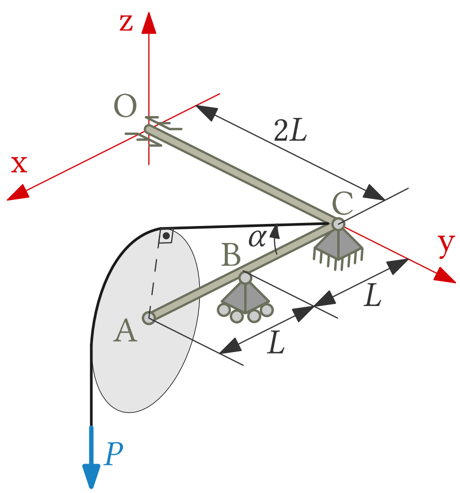
Permanência mínima: 45 min. Duração: 120 min. Entregue esta folha ao aplicador caso saia da sala antes do término.

Questão 1 (3,0 pontos). Sobre a cunha mostrada na figura, é aplicado um sistema $\mathcal{S}$ formado por três forças $(\vec{F}_1, A)$, $(\vec{F}_2, B)$ e $(\vec{F}_3, C)$ e um binário de momento $\vec{M}$ com:

$$\vec{F}_1 = F(3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}) \qquad \vec{F}_2 = -F\vec{k} \qquad \vec{F}_3 = F\vec{\jmath} \qquad \vec{M} = Fa(9\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$$

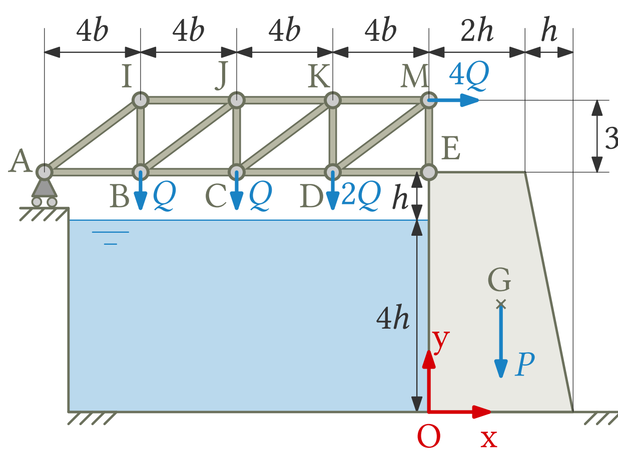


a) (1,0) Determine a resultante e o momento do sistema $\mathcal{S}$ em relação ao polo O.
b) (0,5) Determine o momento do sistema $\mathcal{S}$ com respeito ao eixo $\overrightarrow{OA}$.
c) (0,5) Verificar se o sistema $\mathcal{S}$ é redutível a uma única força.
d) (0,5) Calcular o vetor momento mínimo do sistema $\mathcal{S}$.
e) (0,5) Obter um sistema equivalente a $\mathcal{S}$ com resultante aplicada em B.



Questão 2 (3,0 pontos). A barra rígida e homogênea ABCO mostrada figura tem peso desprezível e é mantida no plano Oxy por meio de um apoio simples em B, uma articulação em C e um anel de eixo paralelo a Oy em O. A polia de raio $2L \sin\alpha$ e peso desprezível disposta no plano paralelo a Oxz suporta uma carga P por um fio inextensível conectado ao ponto C da barra. Admitindo que todos os vínculos são ideais, pede-se:
a) (0,5) Fazer o diagrama de corpo livre da polia e determinar as forças que a mantém em equilíbrio estático.
b) (2,0) Fazer o diagrama de corpo livre da barra e determinar as reações vinculares que a mantém em equilíbrio estático.
c) (0,5) Redesenhar o diagrama de corpo livre da barra, representando as componentes de reação calculadas nos itens anteriores (com direções e sentidos corretos).

Questão 3 (4,0 pontos)



Parte I – Ponte. Na figura é ilustrado um modelo de uma ponte de travessia sobre um pequeno reservatório, submetida aos carregamentos $(-Q\vec{\jmath}, B)$, $(-Q\vec{\jmath}, C)$, $(-2Q\vec{\jmath}, D)$ e $(4Q\vec{\imath}, M)$. Neste modelo, os vínculos são ideais e as barras têm peso desprezível. Pede-se:
a) (1,0) Esboçar o diagrama de corpo livre da ponte e determinar as reações em A e E.
b) (1,0) Determinar as forças nas barras EM e BC, informando se são de tração ou compressão;

Parte II – Barragem. A barragem homogênea contendo o reservatório tem peso P e está apoiada, com atrito, sobre o solo. Considere as dimensões indicadas na figura. O comprimento da barragem, na direção *ortogonal ao plano* da figura, tem valor L. A fim de se obter os dados iniciais para uso futuro no projeto estrutural e geotécnico, pede-se:
c) (0,5) Determinar a coordenada x_G do centro de massa da barragem no sistema Oxy;
d) (1,0) Esboçar o DCL da barragem e determinar as componentes de força reativas no contato com o solo.
Para simplificar seus cálculos, adote $\gamma = \dfrac{P}{16h^2L}$ como peso específico do fluido.
e) (0,5) Obter o valor mínimo do coeficiente de atrito estático μ entre o solo e a barragem para que não ocorra escorregamento. Obter também o valor de μ para o caso em que Q possa ser desprezado em comparação à P.

Questão 1

a) Resultante do sistema $\mathcal{S}$:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R} = 3F\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\right)} \qquad (0{,}5)$$

Momento do sistema $\mathcal{S}$ com respeito ao polo O:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= (A - O) \wedge \vec{F}_1 + (B - O) \wedge \vec{F}_2 + (C - O) \wedge \vec{F}_3 + \vec{M} \\ &= a(2\vec{\imath} + 3\vec{k}) \wedge F(3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}) + a\vec{\jmath} \wedge F(-\vec{k}) + 3a\vec{k} \wedge F\vec{\jmath} + Fa\left(9\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\right) \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_O = 10aF(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})} \end{aligned} \qquad (0{,}5)$$

b) Momento do sistema $\mathcal{S}$ com respeito ao eixo $\overrightarrow{OA}$:

$$M_{OA} = \vec{M}_O \cdot \frac{(A - O)}{|A - O|} = 10aF(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) \cdot \frac{a(2\vec{\imath} + 3\vec{k})}{a\sqrt{2^2 + 3^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{OA} = \frac{10}{\sqrt{13}} aF} \qquad (0{,}5)$$

c) O sistema $\mathcal{S}$ possui resultante $\vec{R} \neq \vec{0}$ e invariante escalar:

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 10aF(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) \cdot 3F\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 30aF^2 \neq 0}$$

O sistema $\mathcal{S}$, portanto, <u>não é redutível</u> a uma única força. (0,5)

d) Momento mínimo do sistema $\mathcal{S}$:

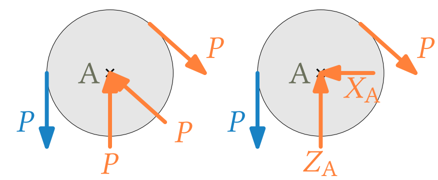
$$\vec{M}_{min} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\vec{R} = \frac{30aF^2}{(3F)^2(1^2 + 2^2)} 3F\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_{min} = 2aF\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\right)} \qquad (0{,}5)$$

e) O sistema $\mathcal{S}$ pode ser reduzido um sistema equivalente $\mathcal{S}'$ formado por uma força $(\vec{R}, B)$ e um binário de momento $\vec{M}_B$, com:

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= \vec{M}_O + (O - B) \wedge \vec{R} = 10aF(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}) + (-a\vec{\jmath}) \wedge 3F\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\right) \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_B = aF(-10\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} + 13\vec{k})} \end{aligned} \qquad (0{,}5)$$

Questão 2

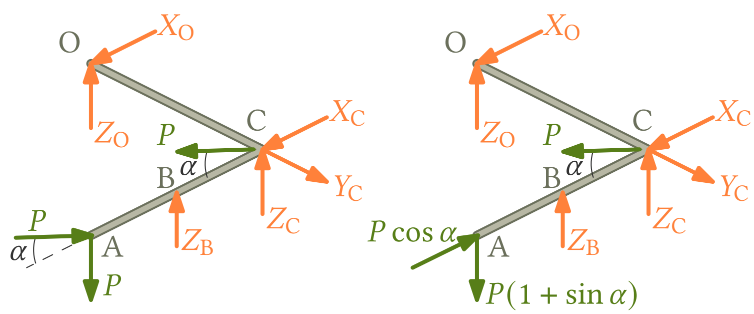
a) Ambos os diagramas apresentados na figura ao lado são considerados soluções válidas para o item (0,5).
Para o DCL da direita, no entanto, é ainda necessária a determinação dos valores de X_A e Z_A, o que pode ser feito pelas condições de equilíbrio:



$$R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad X_A - P\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_A = P\cos\alpha}$$

$$R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A - P - P\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_A = P(1+\sin\alpha)}$$

b) Ambos os diagramas apresentados na figura ao lado são considerados soluções válidas (0,5).
Do equilíbrio de momentos quanto ao polo C:



$$M_{Cx} = 0 \;\Rightarrow\; -2LZ_O = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Z_O = 0} \quad (0{,}25)$$

$$M_{Cy} = 0 \;\Rightarrow\; 2LP(1+\sin\alpha) - LZ_B = 0$$

$$\Rightarrow\; \boxed{Z_B = 2P(1+\sin\alpha)} \quad (0{,}25)$$

$$M_{Cz} = 0 \;\Rightarrow\; 2LX_O = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{X_O = 0} \quad (0{,}25)$$

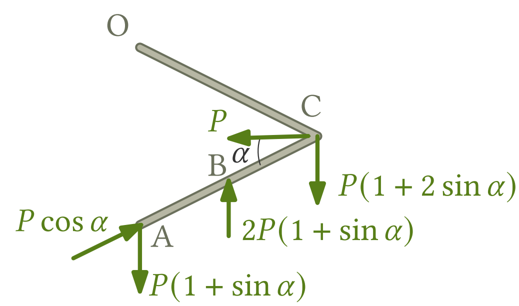
Do equilíbrio de forças:

$$R_x = 0 \;\Rightarrow\; X_O + X_C + P\cos\alpha - P\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{X_C = 0} \qquad (0{,}25)$$

$$R_y = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Y_C = 0} \qquad (0{,}25)$$

$$R_z = 0 \;\Rightarrow\; Z_O + Z_B + Z_C + P\sin\alpha - P(1+\sin\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Z_C = -P(1+2\sin\alpha)} \qquad (0{,}25)$$

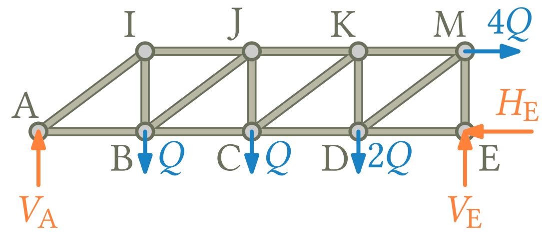
c) O DCL ao lado apresenta as componentes de reação calculadas no item anterior nas direções e sentidos corretos (0,5).



Questão 3

Parte I – Ponte

a) O DCL correto está apresentado na figura ao lado (0,5).
A partir do mesmo, fazendo o equilíbrio de momentos no pólo E e igualando a zero para equilíbrio estático (0,3):



$$4b\left(-4V_A + 3Q + 2Q + 2Q - \frac{3}{4}4Q\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = Q}$$

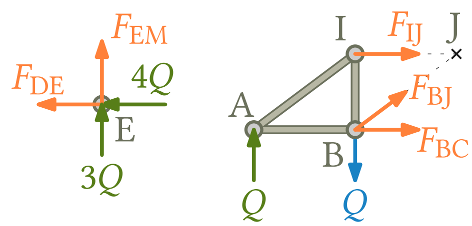
Com isso, o equilíbrio na direção vertical fornece (0,1):

$$V_A + V_E - 4Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_E = 3Q}$$

E por fim, o equilíbrio na direção horizontal fornece (0,1):

$$\boxed{H_E = 4Q}$$

b) Para a força na barra EM, o caminho mais simples é a utilização do método dos nós aplicado ao nó E. Já para a barra BC, um corte passando pelas barras BC, BJ e IJ torna simples a determinação da força. Os DCL de ambos os casos são apresentados ao lado (0,3 cada).
Fazendo o equilíbrio do nó E têm-se (0,1):



$$\boxed{F_{EM} = -3Q}$$

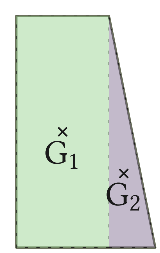
O resultado negativo associado ao DCL utilizado permite dizer que a força é de compressão na barra.
Olhando agora para o DCL do quadro ABI, o equilíbrio de momentos em J fornece (0,3):

$$3bF_{BC} + 4bQ - 8bQ = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{BC} = \frac{4Q}{3}}$$

O resultado positivo associado ao sentido utilizado no DCL indica que a barra está sob tração.

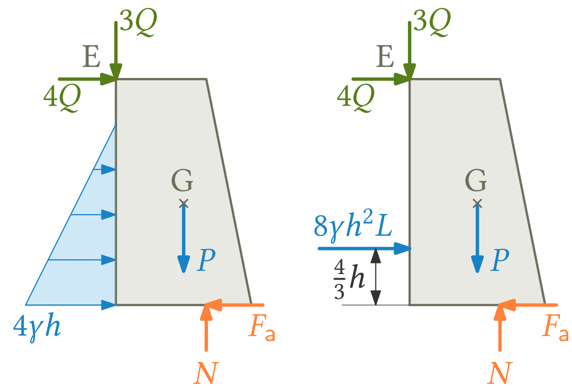
Parte II – Barragem

c) Considerando a homogeneidade da barragem, adote-se a divisão feita na figura ao lado, compondo sua seção transversal como a soma de um retangulo e um triangulo.
No sistema dado, $x_{G1} = h$ e $x_{G2} = \frac{7}{3}h$. A área do retangulo é $A_1 = 10h^2$, enquanto que a área do triangulo é $A_2 = \frac{5}{2}h^2$. Desta forma (0,5):



$$x_G = \frac{(10h^2)(h) + \left(\frac{5h^2}{2}\right)\left(\frac{7h}{3}\right)}{10h^2 + \frac{5h^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_G = \frac{19h}{15}}$$

d) O DCL está exibido na imagem ao lado. Na esquerda com o carregamento de pressão hidrostática distribuído, e na direita com a força hidrostática equivalente aplicada em cota apropriada. (0,3)
O cálculo do valor da força utilizada é (0,3):



$$F_h = \frac{1}{2}(4\gamma h)(4h)L = 8\gamma h^2 L$$

O equilíbrio na direção horizontal, juntamente com a informação do enunciado de que $\gamma = \frac{P}{16h^2L}$, fornece (0,2):

$$F_a = 4Q + 8\gamma h^2 L \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_a = 4Q + \frac{P}{2}}$$

Por sua vez o equilíbrio vertical fornece (0,2):

$$\boxed{N = 3Q + P}$$

e) Para a obtenção do coeficiente de atrito mínimo condizente com o não escorregamento basta fazer (0,3):

$$|F_a| \leq \mu |N| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu \geq \frac{8Q + P}{6Q + 2P}}$$

Para o caso em que Q é desprezível face à P, toma-se o limite $Q \to 0$ de forma que: $\boxed{\mu \geq \frac{1}{2}}$ (0,2).