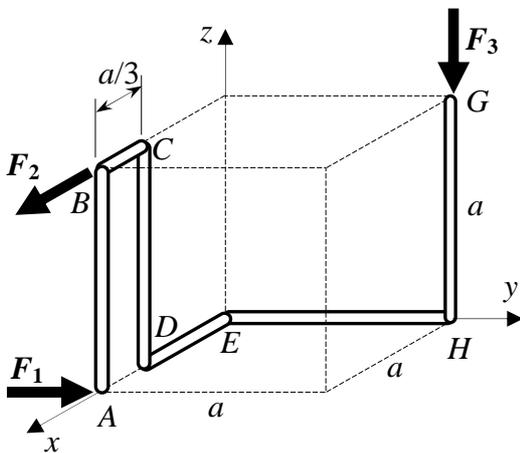




PME 2100 – MECÂNICA A – Primeira Prova – 16 de setembro de 2008

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

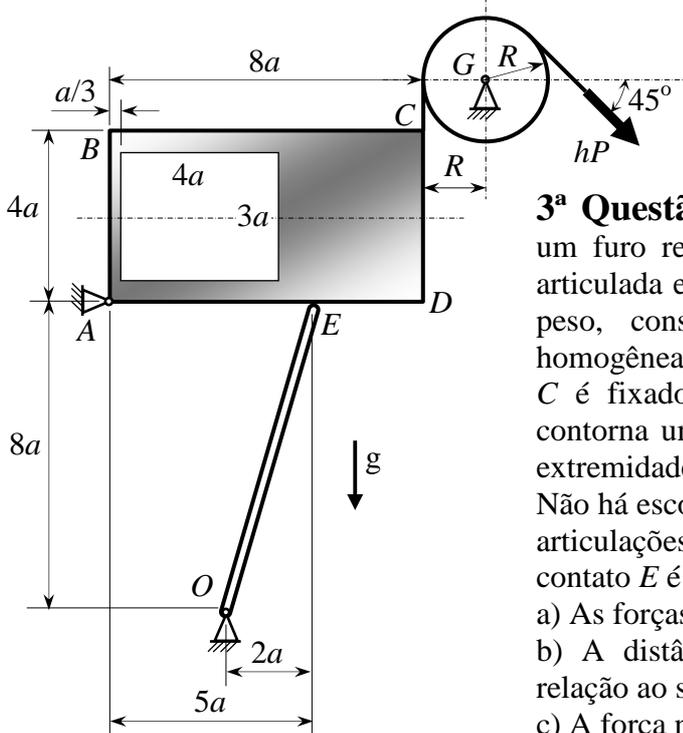
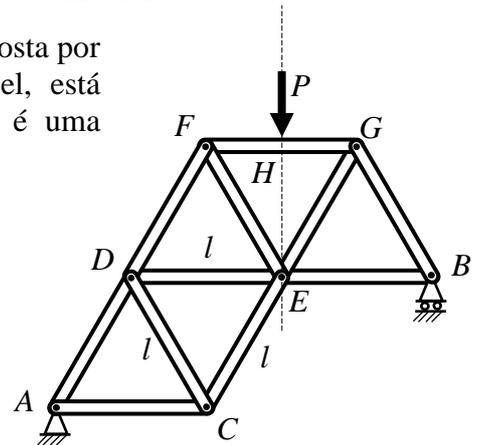


1ª Questão (3,0 pontos): A barra $ABCDEHG$ está sob a ação do sistema de forças (\vec{F}_1, A) , (\vec{F}_2, B) e (\vec{F}_3, G) . Pedese:

- A resultante \vec{R} e o momento \vec{M}_E do sistema de forças em relação ao pólo E .
- Deseja-se restringir todos os movimentos da barra vinculando-a em um único ponto. Considerando $|\vec{F}_i| = F$, para $i = 1, 2, 3$:
 - Determine o tipo de vínculo que deve ser empregado e justifique a escolha.
 - Determine a posição na qual o vínculo deve ser colocado na barra de modo a minimizar as reações vinculares que mantém a barra em equilíbrio estático.
 - Calcule essas reações vinculares.

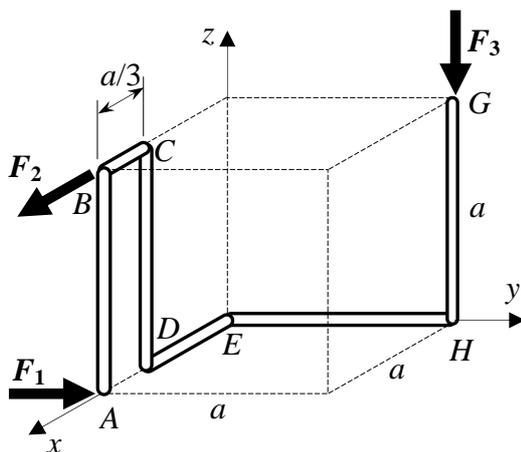
2ª Questão (3,5 pontos): Na estrutura mostrada na figura, composta por 11 barras biarticuladas de comprimento l e massa desprezível, está aplicada uma carga P em H . Sabendo que o vínculo em A é uma articulação e em B um apoio simples, determinar:

- As reações externas.
- A força na barra EB , indicando se de tração ou compressão.
- A força na barra CE , indicando se de tração ou compressão.



3ª Questão (3,5 pontos): A placa homogênea $ABCD$ tem um furo retangular, conforme mostrado na figura, estando articulada em A e apoiada com atrito na barra OE em E . Seu peso, considerando o furo retangular, é P . A barra homogênea OE tem peso P , e está articulada em O . No ponto C é fixado um fio ideal, inextensível e sem massa, que contorna uma polia de centro G , raio R e peso P . Na outra extremidade do fio é aplicada uma força de intensidade hP . Não há escorregamento entre o fio e a polia. Não há atrito nas articulações em A , O e G . O coeficiente de atrito no ponto de contato E é $\mu = 0,5$. Determine:

- As forças atuantes na polia.
- A distância do baricentro da placa furada $ABCD$ em relação ao segmento AB .
- A força normal e a força de atrito em E .
- O máximo h tal que o sistema ainda permaneça em equilíbrio.

**Mecânica A - PME 2100****GABARITO DA PROVA P1**

1ª Questão (3,0 pontos): A barra $ABCDEHG$, de massa desprezível, está sob a ação do sistema de forças (\vec{F}_1, A) , (\vec{F}_2, B) e (\vec{F}_3, G) . Pede-se:

a) A resultante \vec{R} e o momento \vec{M}_E do sistema de forças em relação ao pólo E . (0,5 pontos)

b) Deseja-se restringir todos os movimentos da barra vinculando-a em um único ponto. Considerando $|\vec{F}_i| = F$, para $i = 1, 2, 3$:

b1) Determine o tipo de vínculo que deve ser empregado e justifique a escolha. (0,5 pontos)

b2) Determine a posição na qual o vínculo deve ser colocado na barra de modo a minimizar as reações vinculares que mantém a barra em equilíbrio estático. (1 ponto)

b3) Calcule essas reações vinculares. (1 ponto)

SOLUÇÃO

a) Cálculo da resultante \vec{R} e do momento \vec{M}_E do sistema de forças em relação ao pólo E

Admitindo-se que a massa da barra seja desprezível, tem-se:

$$\vec{R} = F_1 \vec{j} + F_2 \vec{i} - F_3 \vec{k} \quad (0,2 \text{ pontos}) \quad (\text{Eq.1-1})$$

$$\vec{M}_E = (A - E) \wedge \vec{F}_1 + (B - E) \wedge \vec{F}_2 + (G - E) \wedge \vec{F}_3$$

ou seja:

$$\vec{M}_E = a \vec{i} \wedge F_1 \vec{j} + (a \vec{i} + a \vec{k}) \wedge F_2 \vec{i} + (a \vec{j} + a \vec{k}) \wedge (-F_3 \vec{k}) = a F_1 \vec{k} + a F_2 \vec{j} - a F_3 \vec{i} \quad (0,3 \text{ pontos}) \quad (\text{Eq. 1-2})$$

b) Vinculação da barra em apenas um ponto

b1) Determinação do tipo de vínculo a ser empregado.

Como todo sistema de forças pode ser reduzido a um sistema mais simples constituído por uma resultante e um binário, bastaria, em princípio, selecionar um vínculo capaz de fornecer uma reação que se contrapesasse a essa resultante e a esse binário, de modo a manter a barra em equilíbrio.

Considerando-se que engastamentos são vínculos que fornecem forças e momentos reativos, ambos de direções arbitrárias, poder-se-ia, portanto, remover todos os graus de liberdade da barra engastando-a em quaisquer de seus pontos. Escolhendo-se, por exemplo, o ponto E , verifica-se, de imediato, que as reações fornecidas pelo engastamento nessa posição seriam dadas por:



$$\vec{R}_E = -(F_1\vec{j} + F_2\vec{i} - F_3\vec{k}) \quad (\text{Eq. 1-3})$$

$$\vec{M}_E = -(aF_1\vec{k} + aF_2\vec{j} - aF_3\vec{i}) \quad (\text{Eq. 1-4})$$

Por outro lado, há que se verificar se, além do engastamento, não existe algum outro vínculo capaz de manter a barra em equilíbrio sob a ação do sistema de forças dadas. Tal seria o caso, se o referido sistema de forças fosse redutível a uma única resultante, com linha de ação coincidente com o eixo central, quando, então, bastaria utilizar um vínculo mais simples que fornecesse uma única força reativa de direção arbitrária que se contrapusesse à resultante \vec{R} .

Verifiquemos se tal pode ocorrer, analisando, para tanto, o invariante escalar I do sistema:

$$I = \vec{R} \cdot \vec{M}_E = (F_1\vec{j} + F_2\vec{i} - F_3\vec{k}) \cdot (aF_1\vec{k} + aF_2\vec{j} - aF_3\vec{i}) = a \cdot (F_1 \cdot F_2 - F_2 \cdot F_3 - F_1 \cdot F_3)$$

Como o enunciado do problema pede para admitir que $|\vec{F}_i| = F$, para $i = 1, 2, 3$, conclui-se que:

$$I = -a \cdot F^2 \neq 0 \quad (\text{Eq. 1-5})$$

de onde se depreende que o sistema de forças dado não é redutível a uma única força.

Portanto, a única vinculação por um único ponto capaz de manter em equilíbrio a barra em questão, sob efeito do carregamento dado, é constituída por um engastamento, o qual pode ser aplicado a qualquer ponto da barra. (0,5 pontos)

b2) Determinação da posição do vínculo que minimiza as reações vinculares.

Idealmente, essa posição deve se situar na intersecção (caso exista) entre a barra e o eixo central (lugar geométrico dos pólos para os quais o momento é mínimo) do sistema de forças.

Tomando-se como origem do sistema de coordenadas o pólo E e aplicando-se a equação do eixo central ao sistema de forças dado, ou seja,

$$(E' - E) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_E}{|\vec{R}^2|} + \lambda \vec{R} \quad (\text{0,5 pontos}) \quad (\text{Eq. 1-6})$$

resulta:

$$(E' - E) = \frac{1}{F^2 + F^2 + F^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F & F & -F \\ -aF & aF & aF \end{vmatrix} + \lambda(F\vec{i} + F\vec{j} - F\vec{k}) = \frac{1}{3F^2} [2aF^2\vec{i} + 2aF^2\vec{k}] + \lambda(F\vec{i} + F\vec{j} - F\vec{k})$$

de modo que:

$$(E' - E) = \frac{2}{3} a(\vec{i} + \vec{k}) + \lambda(F\vec{i} + F\vec{j} - F\vec{k}) \quad (\text{Eq. 1-7})$$

Analisando-se a equação acima, constata-se que a mesma corresponde à equação de uma reta paralela à linha de ação da resultante passando pelo ponto



$$E' = \left(\frac{2a}{3}, 0, \frac{2a}{3} \right)$$

(0,5 pontos)

o qual que pertence à barra $ABCDEF$.

Portanto, para que as reações vinculares sejam minimizadas, deve-se engastar a barra no ponto E' indicado acima.

b3) Cálculo das reações vinculares.

Admitindo-se que a barra $ABCDEF$ esteja engastada no ponto $E' = \left(\frac{2a}{3}, 0, \frac{2a}{3} \right)$ pertencente ao eixo central do sistema de forças ativas, infere-se que este engastamento deverá proporcionar:

- uma força reativa $\vec{R}_{E'}$ que anula a resultante do sistema de forças ativas, ou seja, tal que:

$$\vec{R}_{E'} = -\vec{R} = -F\vec{i} - F\vec{j} + F\vec{k} \quad (0,5 \text{ pontos}) \quad (\text{Eq. 1-8})$$

- um momento reativo $\vec{M}_{E'}$ que anula o momento mínimo do sistema de forças, ou seja:

$$\vec{M}_{E'} = -h\vec{R} \quad (\text{Eq. 1-9})$$

onde

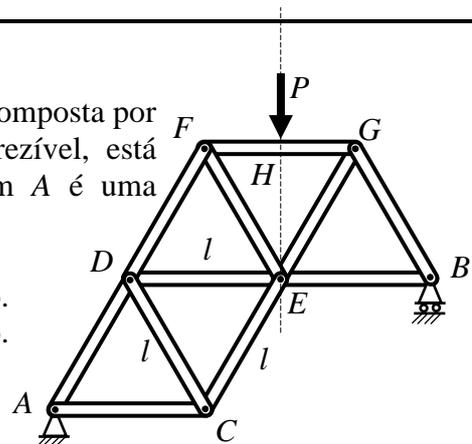
$$h = \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_E}{|\vec{R}|^2} = \frac{-aF^2}{3F^2} = -\frac{a}{3} \quad (\text{Eq. 1-10})$$

de modo que o momento reativo no engastamento será:

$$\vec{M}_{E'} = -\frac{a}{3} \cdot (F\vec{i} + F\vec{j} - F\vec{k}) \quad (0,5 \text{ pontos}) \quad (\text{Eq. 1-11})$$

2ª Questão (3,5 pontos): Na estrutura mostrada na figura, composta por 11 barras bi articuladas de comprimento l e massa desprezível, está aplicada uma carga P em H . Sabendo que o vínculo em A é uma articulação e em B um apoio simples, determinar:

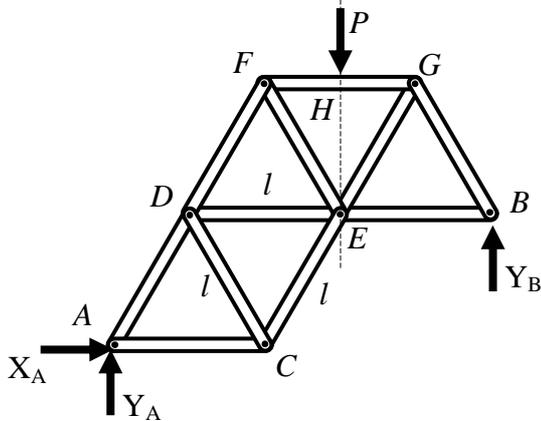
- As reações externas.
- A força na barra EB , indicando se de tração ou compressão.
- A força na barra CE , indicando se de tração ou compressão.



SOLUÇÃO

a) Cálculo das reações externas.

Para calcular as reações externas, constrói-se o diagrama de corpo livre da treliça e, em seguida, aplicam-se as equações de equilíbrio da Estática.



$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \Rightarrow X_A = 0 \quad (\text{Eq. 2-1})$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0 \Rightarrow Y_B \times \frac{5}{2} \ell - P \times \frac{3}{2} \ell = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{3}{5} P \quad (\text{Eq. 2-2})$$

$$\sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - P = 0 \Rightarrow Y_A = \frac{2}{5} P \quad (\text{Eq. 2-3})$$

(1 ponto)

Fig. 2-1: Diagrama de corpo livre da treliça.

b) Cálculo da força interna na barra EB.

Para calcular essa força, analisa-se o equilíbrio do nó B:

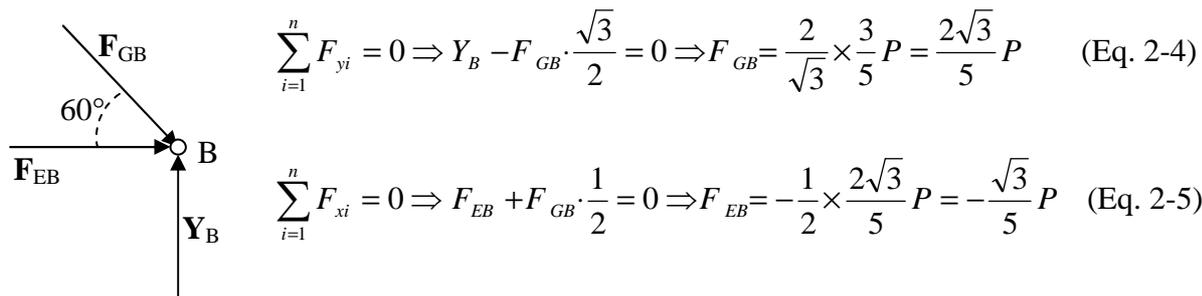


Fig. 2-2: Equilíbrio do nó B.

Como o sinal da força aplicada ao nó B pela barra GB é positivo, conclui-se que a convenção gráfica adotada é consistente – logo, a barra GB está sendo comprimida (vide Figura 2-3). Por outro lado, o sinal da força aplicada ao nó B pela barra EB é negativo, indicando que o sentido real dessa força é oposto ao que foi adotado – ou seja, a barra EB está sendo tracionada (vide Figura 2-4).



Fig. 2-3: Diagrama de corpo livre da barra EB.

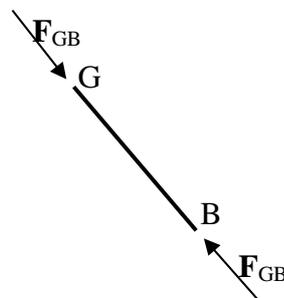


Fig. 2-4: Diagrama de corpo livre da barra GB.

(1 ponto)



c) Cálculo da força na barra *CE*.

Aplicando-se o Método das Seções, determina-se o valor dessa força, conforme ilustrado na Figura 2-5-b, que mostra o diagrama de corpo livre da estrutura *ADC* resultante do seccionamento da treliça original segundo a seção *K-K* (Figura 2-5-a) passante pelas barras *CE*, *DE* e *DF*.

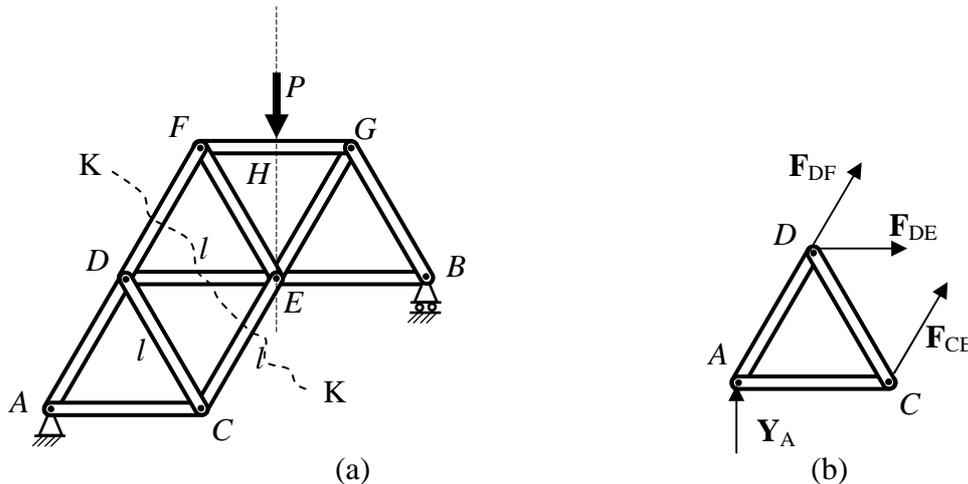
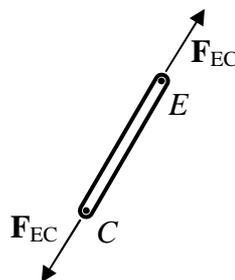


Fig. 2-5: (a) Seccionamento da treliça original; (b) Diagrama de corpo livre do corpo *ADC*.

Aplicando-se a equação de equilíbrio de momentos ao corpo *ADC*, obtém-se:

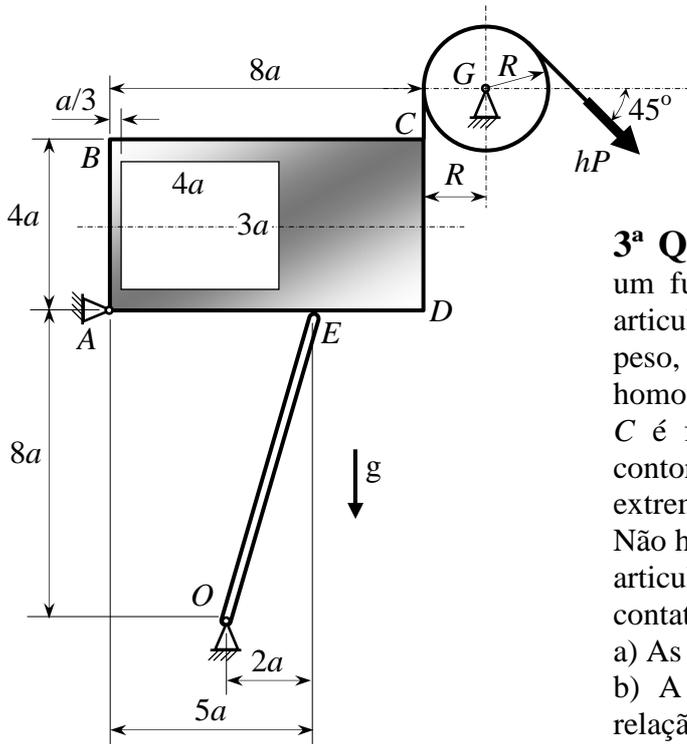
$$\sum_{i=1}^n M_{Di} = 0 \Rightarrow -Y_A \cdot \frac{\ell}{2} + F_{CE} \cdot \ell \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{2}{5}P \cdot \frac{\ell}{2} + F_{CE} \cdot \ell \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow F_{CE} = \frac{2}{5\sqrt{3}}P \quad (\text{Eq. 2-6})$$

Conclui-se, assim, que a barra *CE* está sujeita a uma força de tração de intensidade $\frac{2}{5\sqrt{3}}P$, conforme indicado no diagrama de corpo livre da Figura 2-6.



(1,5 pontos)

Fig. 2-6: Diagrama de corpo livre da barra *CE*



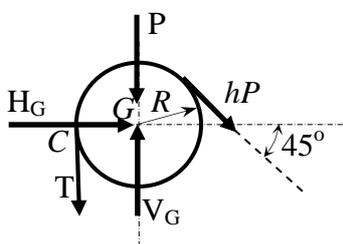
3ª Questão (3,5 pontos): A placa homogênea $ABCD$ tem um furo retangular, conforme mostrado na figura, estando articulada em A e apoiada com atrito na barra OE em E . Seu peso, considerando o furo retangular, é P . A barra homogênea OE tem peso P , e está articulada em O . No ponto C é fixado um fio ideal, inextensível e sem massa, que contorna uma polia de centro G , raio R e peso P . Na outra extremidade do fio é aplicada uma força de intensidade hP . Não há escorregamento entre o fio e a polia. Não há atrito nas articulações em A , O e G . O coeficiente de atrito no ponto de contato E é $\mu = 0,5$. Determine:

- As forças atuantes na polia.
- A distância do baricentro da placa furada $ABCD$ em relação ao segmento AB .
- A força normal e a força de atrito em E .
- O máximo h tal que o sistema ainda permaneça em equilíbrio.

SOLUÇÃO

a) Cálculo das forças atuantes na polia.

Para tanto, constrói-se o diagrama de corpo livre da polia (vide Figura 3-1), aplicando-se ao mesmo as equações de equilíbrio da Estática, ou seja:



$$\sum_{i=1}^n M_{Gi} = 0 \Rightarrow -hP \cdot R + T \cdot R = 0 \Rightarrow T = hP \quad (\text{Eq. 3-1})$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 \Rightarrow hP \frac{\sqrt{2}}{2} + H_G = 0 \quad (\text{Eq. 3-2})$$

$$\Rightarrow H_G = -\frac{\sqrt{2}}{2} hP$$

Fig. 3-1: Diagrama de corpo livre da polia.

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0 \Rightarrow V_G - P - T - hP \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow V_G - P - hP - hP \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (\text{Eq. 3-3})$$

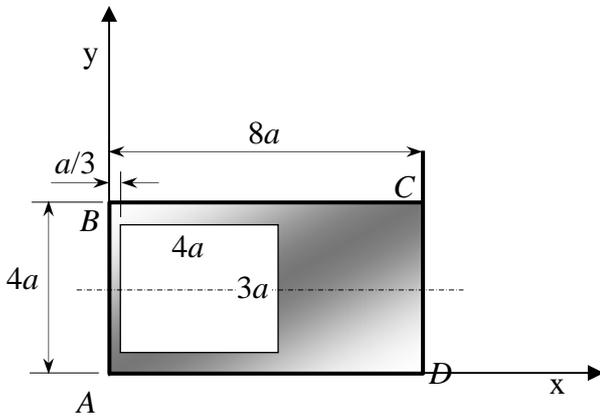
$$\Rightarrow V_G = \left[1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) h \right] P$$

(0,5 pontos)



b) Cálculo da posição do baricentro da placa.

Tomando-se por referência o sistema de coordenadas indicado na Figura 3.2, tem-se:



- Retângulo de lados (8a; 4a):
 - Área: $S_1 = 32a^2$
 - Baricentro: $G_1 = (4a, 2a)$
- Retângulo de lados (4a; 3a):
 - Área: $S_2 = -12a^2$
 - Baricentro: $G_2 = \left(\frac{a}{3} + 2a, 2a\right)$

Fig. 3.2: Geometria da placa retangular recortada.

- Baricentro da placa recortada:

$$X_G = \frac{x_{G1} \cdot S_1 + x_{G2} \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \times 32a^2 - \frac{7a}{3} \times 12a^2}{32a^2 - 12a^2} = 5a \quad (\text{Eq. 3-4})$$

$$Y_G = 2a \text{ (por simetria)} \quad (\text{Eq. 3-5})$$

Portanto, o baricentro da placa se situa na posição $G = (5a, 2a)$. (1 ponto)

c) Cálculo das forças normal e de atrito em E.

Para tanto, analisa-se o equilíbrio da placa retangular ABCD e da barra OE, aplicando-se as equações da Estática aos sistemas de forças indicados nos respectivos diagramas de corpo livre das Figuras 3.3 e 3.4.

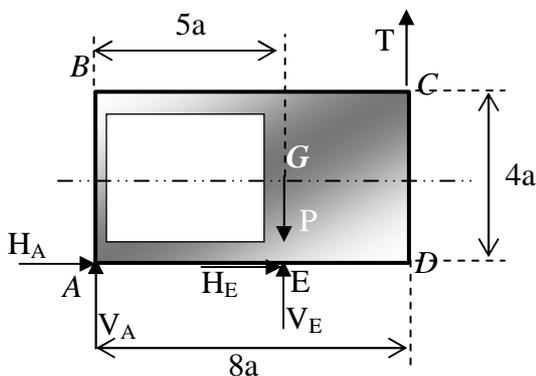


Fig. 3.3: Diagrama de corpo livre da placa ABCD.

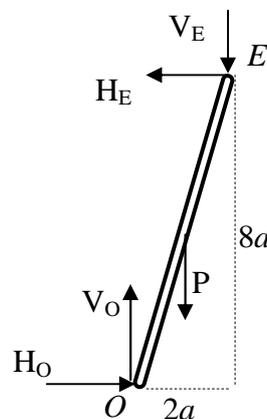


Fig. 3.4: Diagrama de corpo livre da barra OE.



Utilizando-se, para a placa $ABCD$, a equação de equilíbrio de momentos em relação ao pólo A , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0 \Rightarrow V_E \cdot 5a - P \cdot 5a + T \cdot 8a = 0 \Rightarrow V_E \cdot 5a - P \cdot 5a + hP \cdot 8a = 0 \quad (\text{Eq. 3-6})$$
$$\Rightarrow V_E = P \left(1 - \frac{8}{5}h \right)$$

Utilizando-se, para a barra OE , a equação de equilíbrio de momentos em relação ao pólo O , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n M_{Oi} = -P \cdot a - V_E \cdot 2a + H_E \cdot 8a = 0 \Rightarrow -P \cdot a - P \left(1 - \frac{8}{5}h \right) \cdot 2a + H_E \cdot 8a = 0 \quad (\text{Eq. 3-7})$$
$$\Rightarrow H_E = \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{5}h \right) P$$

(1 ponto)

d) O máximo valor de h para que o sistema permaneça em equilíbrio.

Notando-se que o vínculo em E se deve ao contacto com atrito entre a placa $ABCD$ e a barra OE , e que o sistema abandona seu estado de equilíbrio estático caso ocorra deslizamento da barra OE sobre a superfície da placa $ABCD$ causado pela superação da força de atrito máxima no ponto de contacto, conclui-se que deve ser analisada a situação em que

$$H_E = \mu \cdot V_E \quad (\text{Eq. 3-8})$$

ou seja:

$$\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{5}h \right) P = 0,5P \left(1 - \frac{8}{5}h \right) \quad (\text{Eq. 3-9})$$

Portanto, o máximo valor de h compatível com o equilíbrio será

$$h = \frac{5}{16} \quad (\text{Eq. 3-10})$$

correspondente à situação em que ocorre superação da força de atrito acompanhada pelo deslizamento da barra OE relativamente à placa retangular $ABCD$.

(1 ponto)