ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Primeira Prova – 15 de setembro de 2006
Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

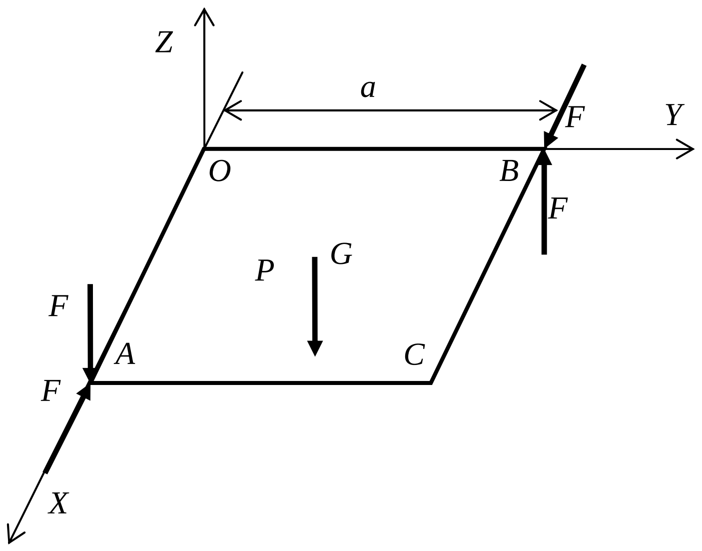
1ª Questão (3,5 pontos) A figura mostra uma placa homogênea quadrada, de peso P e lado a, sujeita à ação de forças aplicadas nos pontos A e B. Considerando os eixos (X,Y,Z), orientados pelos versores $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, pede-se:

a) A resultante $\vec{R}$ e o momento $\vec{M}_O$ do sistema de forças, este último calculado em relação ao pólo O;

b) O momento $\vec{M}_G$ do sistema de forças em relação ao centro de massa G da placa;

c) Responda e justifique: O sistema é redutível a uma única força? O sistema é redutível a um binário?

d) Com $F = P/2$, determine o lugar geométrico dos pontos E em relação aos quais o momento $\vec{M}_E$ do sistema de forças é paralelo à resultante; calcule $\vec{M}_E$.



Solução:

a) Resultante e momento em relação a O:

$$\vec{R} = (F-F)\vec{i} + (F-F)\vec{k} - P\vec{k} \quad \therefore \quad \boxed{\vec{R} = -P\vec{k}} \qquad (0{,}5)$$

$$\vec{M}_O = (A-O)\wedge\left((-F\vec{k}) + (-F\vec{i})\right) + (B-O)\wedge\left((F\vec{k}) + (F\vec{i})\right) + (G-O)\wedge(-P\vec{k}) =$$

$$= aF\vec{j} + aF\vec{i} - aF\vec{k} + \frac{a}{2}P(-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_O = a\left((F - \frac{P}{2})\vec{i} + (F + \frac{P}{2})\vec{j} - F\vec{k}\right)} \qquad (0{,}5)$$

b) Aplicando-se a fórmula de mudança de pólo:

$$\vec{M}_G = \vec{M}_O + (O-G)\wedge\vec{R} = \vec{M}_O - \frac{a}{2}(\vec{i} + \vec{j})\wedge(-P\vec{k}) = \vec{M}_O + \frac{a}{2}P(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{M}_G = aF\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)} \qquad (0{,}5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

c) O sistema:

(i)	é não-redutível a uma única força;
(ii)	é não-redutível a um binário.

(0,5)

Sim, pois:

(i)	o invariante, $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_G \cdot \vec{R} = aFP \neq 0$, é não-nulo;
(ii)	a resultante, $\vec{R} = -P\vec{k}$, é não-nula.

(0,5)

d) Solicita-se o eixo central:

$$(E-O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{\left|\vec{R}\right|^2} + \lambda\vec{R}, \text{ com } \lambda \in \Re .$$

Assim:

$$(E-O) = \frac{(-P\vec{k}) \wedge a\left((F-\frac{P}{2})\vec{i} + (F+\frac{P}{2})\vec{j} - F\vec{k} \right)}{P^2} + \beta\vec{k}, \text{ com } \beta \in \Re \text{, de onde segue,}$$

$$(E-O) = \frac{a\left(-(F-\frac{P}{2})\vec{j} + (F+\frac{P}{2})\vec{i} \right)}{P} + \beta\vec{k}, \text{ com } \beta \in \Re \text{, ou ainda,}$$

$$\boxed{(E-O) = a\left(\left(\frac{F}{P}+\frac{1}{2}\right)\vec{i} - \left(\frac{F}{P}-\frac{1}{2}\right)\vec{j} \right) + \beta\vec{k}}, \text{ com } \beta \in \Re . \qquad (0,5)$$

Com $F = P/2$ tem-se: $\boxed{(E-O) = a\vec{i} + \beta\vec{k}}$.

Cálculo do valor de $\vec{M}_E$ - pela fórmula de mudança de pólo:

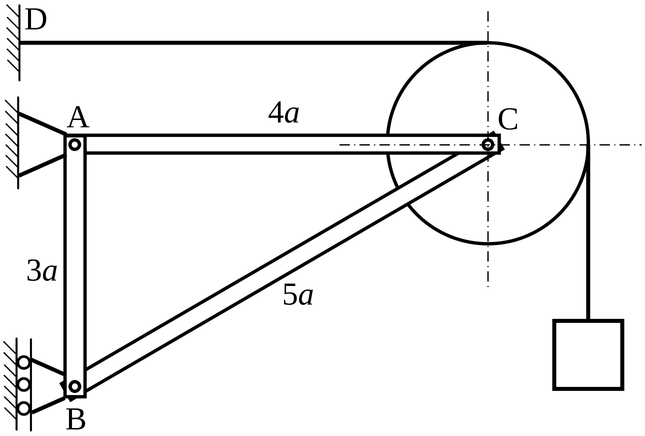
$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O-E) \wedge \vec{R}$, i.e.,

$$\vec{M}_E = a\left(\left(F-\frac{P}{2}\right)\vec{i} + \left(F+\frac{P}{2}\right)\vec{j} - F\vec{k} \right) + (-P\vec{k}) \wedge \left[a\left(\left(\frac{F}{P}+\frac{1}{2}\right)\vec{i} - \left(\frac{F}{P}-\frac{1}{2}\right)\vec{j} \right) + \beta\vec{k} \right] =$$

$$= a\left(\left(F-\frac{P}{2}\right)\vec{i} + \left(F+\frac{P}{2}\right)\vec{j} - F\vec{k} \right) + a\left(-\left(F+\frac{P}{2}\right)\vec{j} - \left(F-\frac{P}{2}\right)\vec{i} \right)$$

$\therefore$ $\boxed{\vec{M}_E = -aF\vec{k}}$. Com $F = P/2$ tem-se: $\boxed{\vec{M}_E = -\frac{aP}{2}\vec{k}}$. (0,5)

2ª Questão (3,0 pontos) Uma estrutura triangular é composta por três barras, articuladas entre si. Esta estrutura é vinculada à parede vertical por uma articulação em *A* e um apoio simples em *B* e suporta uma **polia homogênea** de raio *R* e peso ***Q***, através de uma articulação em *C*. Um fio ideal, preso à parede em *D*, e que passa pela polia, suporta um bloco de peso ***P***. As barras têm peso desprezível. Pede-se:



a) Calcule a tração no fio e as reações da estrutura triangular sobre a polia, em *C*;

b) Calcule as reações dos vínculos sobre a estrutura triangular em *A* e *B* e mostre os resultados em um diagrama de corpo livre;

c) Calcule as forças nas barras e informe explicitamente se as barras estão tracionadas ou comprimidas.

Solução:

a) (0,5)

Diagrama de corpo livre, da estrutura triangular:

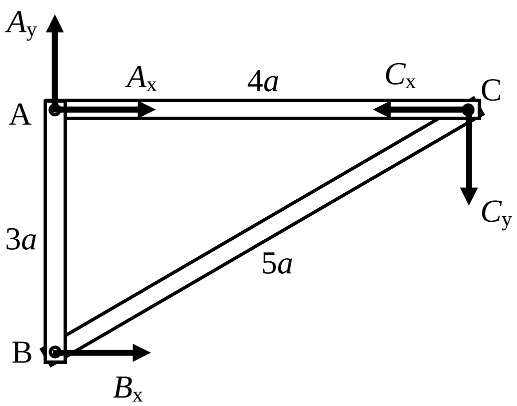
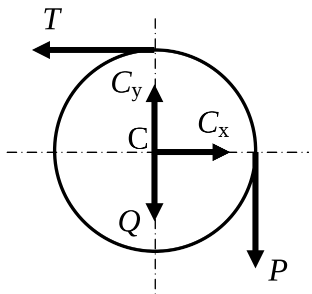


Diagrama de corpo livre da polia:



Equilíbrio dos momentos das forças na polia em relação ao pólo C:

$$M_C = T.R - P.R = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = P}$$

Equilíbrio das forças na polia:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x - T = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_x = P}$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y - Q - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_y = P + Q}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

b) (0,5)

Equilíbrio dos momentos das forças na estrutura triangular, em relação ao pólo A:

$$M_A = B_x.3a - C_y.4a = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = \frac{4}{3}C_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_x = \frac{4}{3}(P+Q)}$$

Equilíbrio das forças na estrutura triangular:

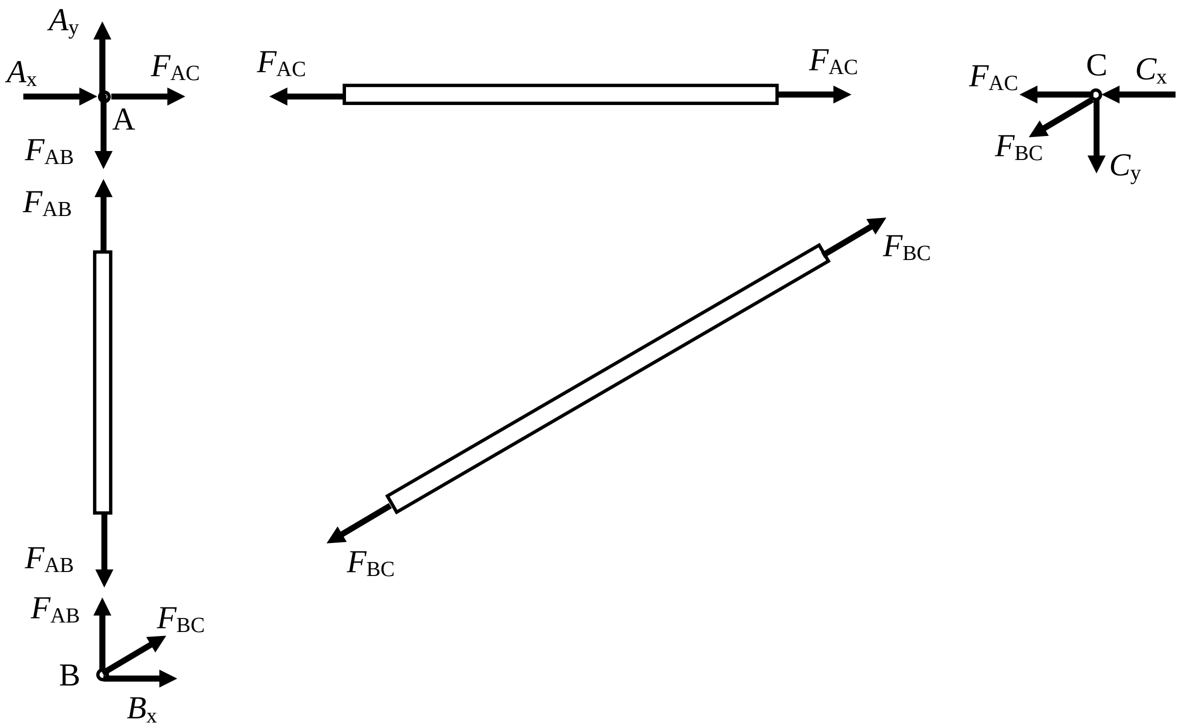
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x - C_x = 0 \Rightarrow A_x = C_x - B_x \Rightarrow A_x = P - \frac{4}{3}(P+Q) \Rightarrow \boxed{A_x = -\frac{(P+4Q)}{3}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y - C_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = C_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_y = P+Q}$$

c) (0,5)

Forças nas barras:

A estrutura triangular é uma treliça (barras de massa desprezível, articuladas nas extremidades, com forças aplicadas apenas nos nós), e, usando o método dos nós, obtemos:



Nó A:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + F_{AC} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{AC} = \frac{(P+4Q)}{3}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - F_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{AB} = P+Q}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Nó B:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} \cdot \frac{4}{5} + B_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3}(P+Q) \Rightarrow \boxed{F_{BC} = -\frac{5}{3}(P+Q)}$$

Portanto, observando as indicações da figura acima:

Barra AB: **tracionada**
Barra AC: **tracionada**
Barra BC: **comprimida**

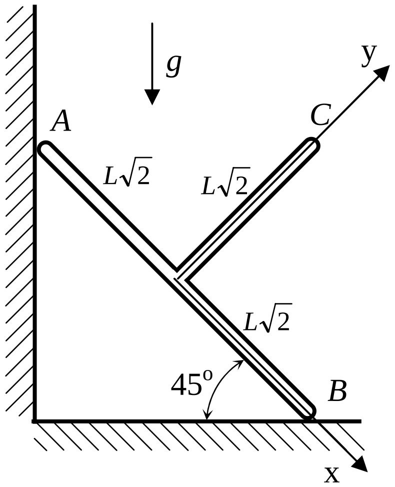
$$\boxed{F_{AC} = \frac{(P+4Q)}{3}}\;; \qquad \boxed{F_{AB} = P+Q}; \qquad \boxed{F_{BC} = -\frac{5}{3}(P+Q)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos) A estrutura em forma de T é homogênea e tem peso P. A extremidade A se apóia na parede (vertical) e a extremidade B se apóia no solo (horizontal). A parede e o solo são de materiais diferentes: o coeficiente de atrito entre a estrutura e o piso é μ e o coeficiente de atrito entre a estrutura e a parede é nulo. Pede-se:



a) Determine as coordenadas x_G e y_G do baricentro da estrutura em forma de T;

b) Calcule a força de atrito entre a estrutura e o piso no ponto B, supondo que a estrutura esteja em equilíbrio estático;

c) Verifique se $\mu = 0,5$ é suficiente para manter o equilíbrio.

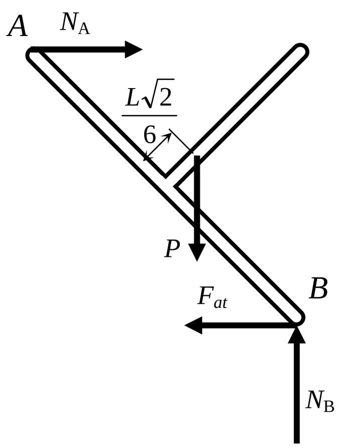
Solução:

a)

$x_G = 0$ (por simetria) (0,5)

$$y_G = \frac{\frac{m}{3}\frac{L\sqrt{2}}{2} + \frac{2m}{3}0}{\frac{m}{3} + \frac{2m}{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{6}$$ (0,5)

b) Diagrama de corpo livre (0,5)



Equações de equilíbrio: (0,5)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{at} = N_A$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = P$$

$$\sum M_{Bz} = 0 \Rightarrow N_A 2L\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = P\left(L\sqrt{2} - \frac{L\sqrt{2}}{6}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{5P}{12}$$

$$\therefore \quad \boxed{F_{at} = \frac{5}{12}P}$$ (0,5)

c) No limite:

$$F_{at} = \mu N_B = 0{,}5P > \frac{5P}{12} \qquad (0{,}5)$$

$\boxed{\text{Portanto } \mu = 0{,}5 \text{ é suficiente para manter o equilíbrio}}$. (0,5)