



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP
PSI 3212 - LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS
INTRODUÇÃO TEÓRICA - EXPERIÊNCIA 4

1º semestre de 2016

Profs. Cinthia Itiki, Inés Pereyra, Marcelo Carreno

Análise de Sinais Senoidais e Fasores

1. Relação temporal entre a tensão e a corrente em bipolos não resistivos

Considere um sinal co-senoidal $x(t)$ descrito por

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta), \quad (1)$$

em que A é a amplitude de pico e θ é a fase em radianos [rad]. A frequência angular ω em radianos por segundo [rad/s] também pode ser escrita como $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, em que f é a frequência em hertz [Hz] e T é o período em segundos [s].

A Figura 1 ilustra um sinal co-senoidal e seus parâmetros: amplitude de pico A , período T [s] e atraso temporal $-t_\theta = -\theta/\omega$ [s].

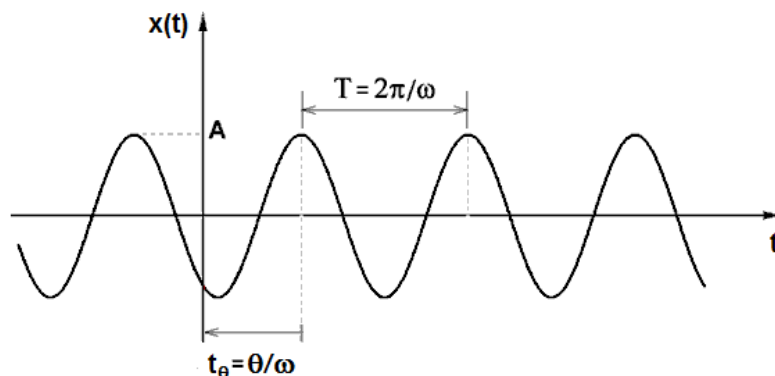


Figura 1 – Sinal co-senoidal de amplitude de pico A , frequência angular ω [rad/s] e fase θ [rad]. Observe que nesta figura a fase θ é negativa para um sinal atrasado em relação ao co-seno, ou seja, para um atraso positivo de $-t_\theta$ [s].

Para uma amplitude de pico A , o valor eficaz A_{ef} da senóide é dado por

$$A_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}, \quad (2)$$

em que t_0 é um instante de referência, por exemplo o instante $t_0=0$ [s].

Em muitos circuitos elétricos, a alimentação é um sinal co-senoidal. Se o circuito for linear, as tensões e correntes mensuradas nos bipolos não resistivos em regime permanente senoidal também serão sinais co-senoidais de mesma frequência, mas de amplitude e fase diferentes.

As relações entre as amplitudes e fases podem ser facilmente calculadas para bipolos não resistivos, ou seja, capacitores e indutores. Essas relações são apresentadas nas próximas seções.

1.1 Relação temporal entre a tensão e a corrente em capacitores ideais

Considere um capacitor ideal, cuja corrente é descrita por

$$i_c(t) = I_c \cos(\omega t + \theta) . \quad (3)$$

A tensão nesse capacitor será dada pela relação tensão-corrente

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(\tau) d\tau . \quad (4)$$

Ao se substituir a equação (3) na equação (4), obtém-se

$$v_c(t) = I_c \frac{1}{\omega C} \text{sen}(\omega t + \theta) . \quad (5)$$

Como se sabe que o seno equivale a um co-seno com fase de $-\pi/2$ rad, tem-se

$$v_c(t) = I_c \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \theta - \pi/2) . \quad (6)$$

Portanto, a amplitude de pico da tensão no capacitor é dada por

$$V_C = I_C \frac{1}{\omega C} . \quad (7)$$

Conseqüentemente, a razão entre os valores de pico da tensão e da corrente no capacitor é uma função inversamente proporcional à frequência, ou seja,

$$\frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{\omega C} . \quad (8)$$

De acordo com a equação (2), os valores eficazes da tensão e da corrente são proporcionais às respectivas amplitudes de pico. Portanto, a razão entre os valores eficazes da tensão e da corrente também é uma função inversamente proporcional à frequência, conforme a relação

$$\frac{V_{C_{ef}}}{I_{C_{ef}}} = \frac{1}{\omega C} . \quad (9)$$

Adicionalmente, ao se comparar as equações (3) e (6), observa-se que a tensão está atrasada de $\pi/2$ rad em relação à corrente. Essa defasagem de $-\pi/2$ rad corresponde a um atraso temporal de $T/4$ s, em que T é o período fundamental do co-seno. A Figura 2 ilustra o atraso da tensão em relação à corrente, para o capacitor ideal.

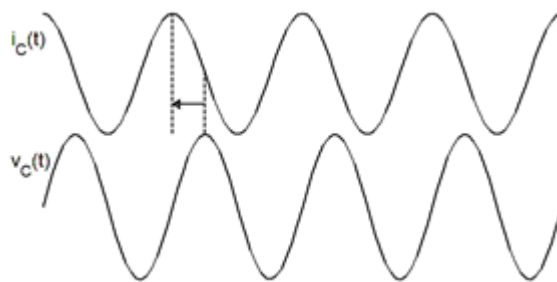


Figura 2 – Relação temporal no capacitor ideal entre a corrente $i_C(t)$ e a tensão $v_C(t)$.

1.2 Relação temporal entre a tensão e a corrente em indutores ideais

Considere a corrente no indutor descrita por

$$i_L(t) = I_L \cos(\omega t + \theta) . \quad (10)$$

A relação tensão-corrente no indutor é

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} . \quad (11)$$

A substituição da equação (10) na equação (11) resulta em

$$v_L(t) = -I_L \omega L \text{sen}(\omega t + \theta) . \quad (12)$$

Ao se representar o seno de amplitude -1 por um co-seno com fase $\pi/2$ rad, tem-se

$$v_L(t) = I_L \omega L \cos(\omega t + \theta + \pi/2) . \quad (13)$$

Então, a amplitude de pico da tensão no indutor é dada por

$$V_L = I_L \omega L . \quad (14)$$

Nota-se que, diferentemente do capacitor, o indutor apresenta uma relação tensão-corrente entre as amplitudes de pico que é diretamente proporcional à frequência, ou seja,

$$\frac{V_L}{I_L} = \omega L . \quad (15)$$

Essa relação também se aplica aos valores eficazes e é dada pela razão

$$\frac{V_{Lef}}{I_{Lef}} = \omega L . \quad (16)$$

Além disso, observa-se que a tensão da equação (13) está adiantada de $\pi/2$ rad em relação à corrente da equação (10), para o indutor ideal. A Figura 3 ilustra a tensão $v_L(t)$ adiantada em relação à corrente $i_L(t)$.

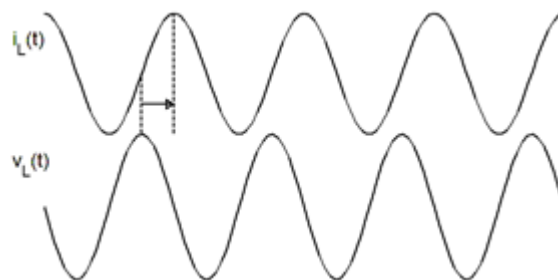


Figura 3 – Relação temporal no indutor ideal entre a corrente $i_L(t)$ e a tensão $v_L(t)$.

1.2 Relação temporal na soma de tensões senoidais

Em circuitos elétricos, a associação de bipolos resistivos, capacitivos e indutivos pode resultar na soma de tensões senoidais com fases iguais ou distintas.

Inicialmente será considerado o caso de fases iguais, em que o primeiro sinal é dado por

$$v_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta) \quad (17)$$

e o segundo sinal é descrito por

$$v_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta) \quad (18)$$

Neste caso, a soma das tensões resulta em

$$v(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (19)$$

em que a amplitude de pico A é simplesmente

$$A = A_1 + A_2 \quad (20)$$

e a fase de $v(t)$ é a mesma de $v_1(t)$ e de $v_2(t)$. Portanto, verifica-se que amplitude resultante neste caso é igual à soma das amplitudes dos dois sinais e que a fase é a mesma de ambos os sinais somados.

A Figura 4 ilustra a soma de dois sinais co-senoidais de mesma fase.

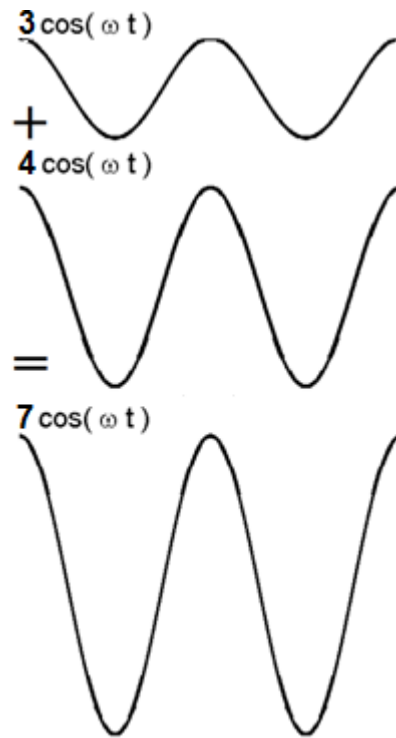


Figura 4 – Soma de sinais co-senoidais de mesma frequência e fases iguais. A amplitude da soma é igual à soma das amplitudes, porque as fases são iguais em ambos os sinais.

Agora, será considerado o caso de sinais com fases distintas. Suponha que o primeiro sinal seja dado por

$$v_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \quad (21)$$

e o segundo sinal seja

$$v_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad , \quad (22)$$

em que $\theta_1 \neq \theta_2$. Para uma defasagem de $(\theta_2 - \theta_1)$ entre os sinais a serem somados, a soma das tensões resulta em

$$v(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad , \quad (23)$$

em que a amplitude de pico de $v(t)$ é dada por

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + A_2^2} \quad (24)$$

e a fase de $v(t)$ é fornecida por

$$\theta = \arctan\left(\frac{A_1 \sin(\theta_1) + A_2 \sin(\theta_2)}{A_1 \cos(\theta_1) + A_2 \cos(\theta_2)}\right) \quad (25)$$

Observa-se que a amplitude de pico não é simplesmente a soma das amplitudes de ambos os sinais. A Figura 5 ilustra um exemplo de soma de dois sinais co-senoidais com defasagem de $-\pi/2$ rad entre eles.

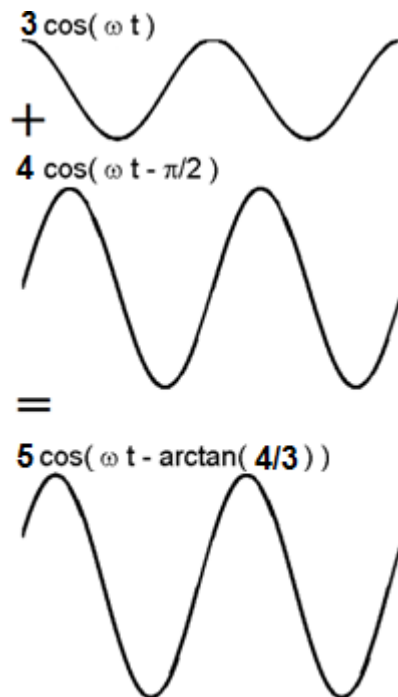


Figura 5 – Soma de sinais co-senoidais de mesma frequência e fases diferentes. A defasagem entre os sinais somados é de $-\pi/2$ rad.

2. Relação fasorial entre a tensão e a corrente em bipolos

Na seção anterior, obtiveram-se as relações temporais entre a tensão e a corrente em bipolos. No entanto, outras ferramentas podem facilitar a compreensão entre as relações de amplitude e fase. Uma dessas ferramentas é o conceito de fasores que pode ser aplicado não somente a bipolos mas também a circuitos elétricos compostos por vários bipolos.

Notações cartesiana e polar de fasores

Um fasor $\hat{\mathbf{A}}$ pode ser descrito por sua amplitude de pico A e por sua fase θ em radianos, na forma polar

$$\hat{\mathbf{A}} = A e^{j\theta} \quad , \quad (26)$$

em que $j = \sqrt{-1}$.

O fasor $\hat{\mathbf{A}}$ também pode ser representado por suas partes real X e imaginária Y , na notação cartesiana

$$\hat{\mathbf{A}} = X + jY \quad , \quad (27)$$

em que $X = \text{Re}\{\hat{\mathbf{A}}\}$ e $Y = \text{Im}\{\hat{\mathbf{A}}\}$.

É possível transitar da notação polar para a cartesiana da seguinte forma. Obtém-se a parte real do fasor $\hat{\mathbf{A}}$ pela relação

$$X = A \cos(\theta) \quad (28)$$

e a parte imaginária por

$$Y = A \text{sen}(\theta) \quad . \quad (29)$$

Também se pode transitar da notação cartesiana para a polar. Basta obter a amplitude de pico do fasor $\hat{\mathbf{A}}$ pela relação

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (30)$$

e a fase do fasor $\hat{\mathbf{A}}$ por

$$\theta = \arctan(Y / X) \quad . \quad (31)$$

A Figura 6 representa as relações entre as notações polar e cartesiana.

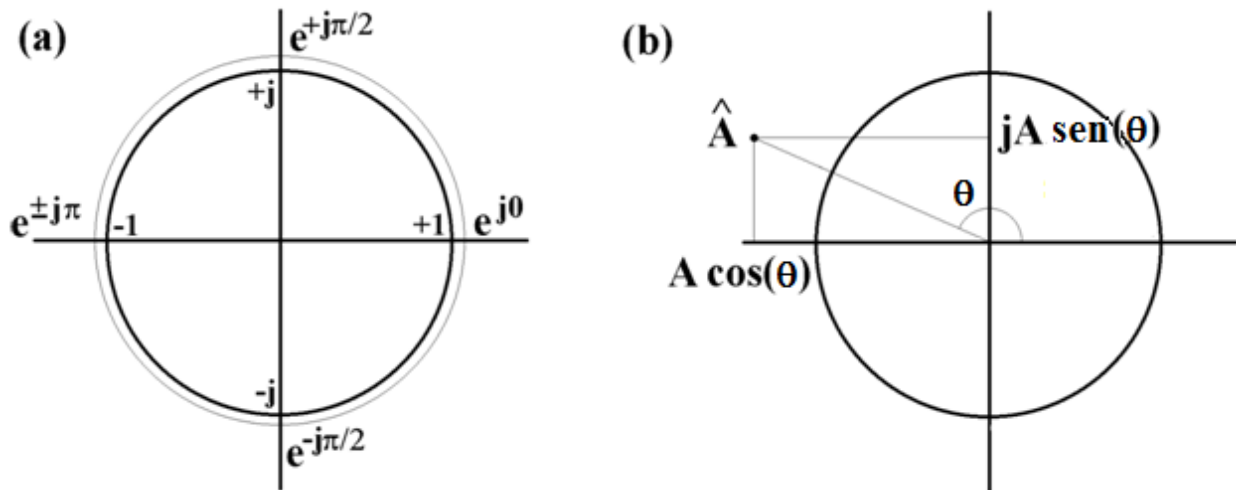


Figura 6 – Relações entre as notações polar e cartesiana:
(a) relações básicas na circunferência unitária e (b) fasor \hat{A} .

Além das relações entre as notações polar e retangular, é importante lembrar que

$$\cos(\theta) = \frac{e^{+j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad (32)$$

e que

$$\sin(\theta) = \frac{e^{+j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \frac{e^{+j(\theta-\pi/2)} + e^{-j(\theta-\pi/2)}}{2} = \cos(\theta - \pi/2) \quad (33)$$

Essas relações serão úteis nas seções a seguir.

Relação entre fasores e sinais no tempo

Um sinal co-senoidal $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ pode ser reescrito como a soma de exponenciais complexas

$$x(t) = \frac{1}{2} \{ A e^{+j(\omega t + \theta)} + A e^{-j(\omega t + \theta)} \} \quad (34)$$

Utilizando-se a notação fasorial, tem-se

$$x(t) = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{A}} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{A}}^* e^{-j\omega t} \right\}, \quad (35)$$

que explicita a média de dois produtos. O primeiro produto é calculado entre o fasor $\hat{\mathbf{A}}$ e a função exponencial complexa $e^{j\omega t}$ e o segundo produto, entre o fasor complexo conjugado de $\hat{\mathbf{A}}$ e a função $e^{-j\omega t}$.

O produto entre o fasor $\hat{\mathbf{A}}$ e a função exponencial complexa $e^{j\omega t}$ resulta em

$$\hat{\mathbf{A}} e^{j\omega t} = A e^{j(\omega t + \theta)}, \quad (36)$$

que pode ser interpretado como um vetor rodando na circunferência de raio A . A Figura 7 ilustra as relações entre o produto $\hat{\mathbf{A}} e^{j\omega t}$ e sua parte real, que é o co-seno dado por $\text{Re}\{\hat{\mathbf{A}} e^{j\omega t}\} = A \cos(\omega t + \theta)$.

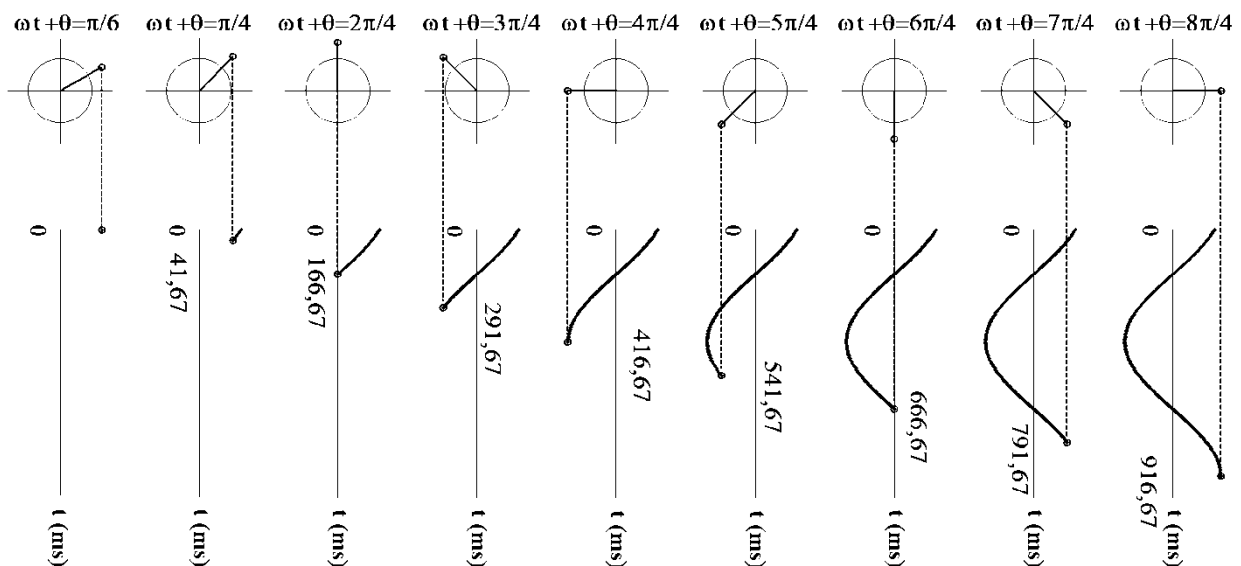


Figura 7 – Produto $\hat{\mathbf{A}} e^{j\omega t}$ desenhado no plano complexo, juntamente com a circunferência de raio unitário. O sinal no tempo é dado pela projeção do produto $\hat{\mathbf{A}} e^{j\omega t}$ no eixo real e é descrito por $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$. Neste exemplo, os valores atribuídos a $(\omega t + \theta)$ estão indicados na figura, para uma amplitude de $A=3/2$, frequência angular $\omega=2\pi$ rad/s e fase de $\theta=\pi/6$ rad.

Fasores de tensão e corrente

Para um capacitor ideal, a tensão está atrasada de $\pi/2$ rad em relação à corrente. Como a constante $j = e^{j\pi/2}$ indica um adiantamento de $\pi/2$ rad, as relações fasoriais entre tensão \hat{V}_C e corrente \hat{I}_C em um capacitor ideal são dadas por

$$\hat{V}_C = -j \frac{1}{\omega C} \hat{I}_C = e^{-j\pi/2} \frac{1}{\omega C} \hat{I}_C . \quad (37)$$

No caso de um resistor, a tensão \hat{V}_R e a corrente \hat{I}_R têm defasagem nula entre si. Portanto, tem-se a relação fasorial

$$\hat{V}_R = R \hat{I}_R . \quad (38)$$

E no caso do indutor ideal, a tensão \hat{V}_L está adiantada de $\pi/2$ rad em relação à corrente \hat{I}_L . Logo, a relação entre tensão e corrente no indutor ideal é dada por

$$\hat{V}_L = +j\omega L \hat{I}_L = e^{+j\pi/2} \omega L \hat{I}_L . \quad (39)$$

A Figura 8 ilustra as relações fasoriais entre tensão e corrente em bipolos ideais.

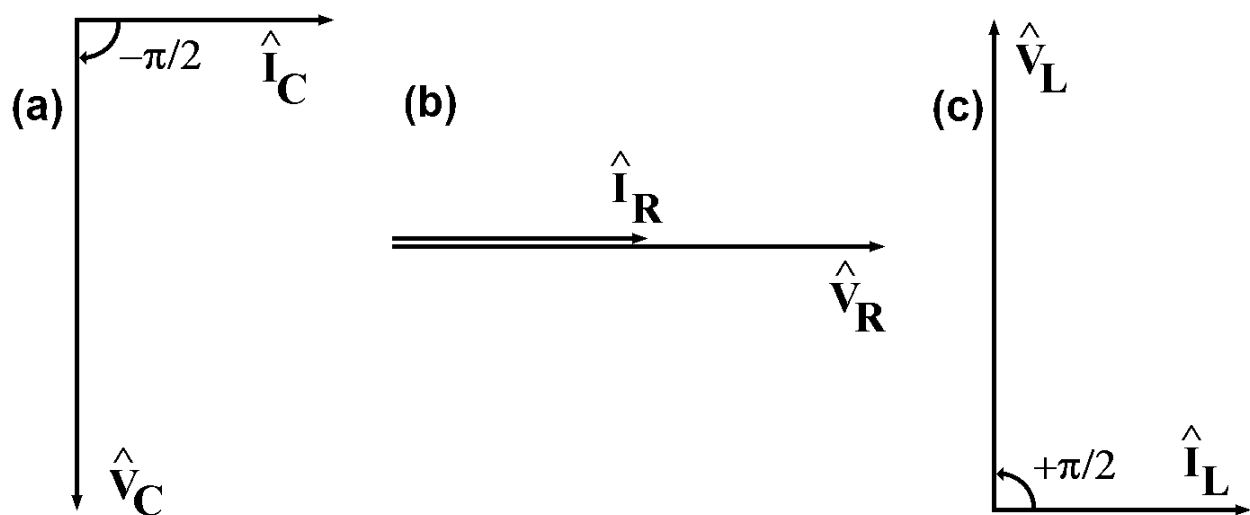


Figura 8 – Fasores de tensão e corrente para (a) capacitor, (b) resistor e (c) indutor. As correntes foram tomadas como referência, ou seja, foram representadas por fasores horizontais que indicam fase nula.

3. Impedância em regime permanente senoidal

O fasor da impedância \hat{Z} é uma função da frequência que é fornecida pela razão entre os fasores da tensão e da corrente. Portanto, obtêm-se as formas cartesianas e polar da impedância do capacitor ideal por

$$\hat{Z}_C = 0 - j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} . \quad (40)$$

Para o resistor ideal têm-se as seguintes representações

$$\hat{Z}_R = R + j0 = R e^{j0} . \quad (41)$$

E a impedância do indutor ideal é representada nas formas cartesianas e polar como

$$\hat{Z}_L = 0 + j\omega L = \omega L e^{+j\pi/2} . \quad (42)$$

Observa-se que a impedância do resistor ideal é uma constante real, de valor igual à resistência R . No caso do capacitor, a impedância é uma função imaginária pura que é inversamente proporcional à frequência. Para o indutor ideal, a impedância também é uma função imaginária pura, porém ela é diretamente proporcional à frequência.

Nas considerações acima, supôs-se que os valores de C , R e L fossem constantes, independentemente do valor da frequência.

Na parte experimental, será visto que essa suposição é válida somente dentro de uma faixa de frequências e que o capacitor tem um comportamento mais próximo do ideal do que o indutor.

Os medidores RLC calculam a relação fasorial entre a tensão e a corrente. Eles fornecem não apenas o valor da impedância (módulo e fase) como também da admitância, que é o inverso da impedância.

Divisão de fasores

Para obter as impedâncias, é necessário calcular a divisão de fasores. Para as operações de multiplicação e divisão de fasores, a notação polar é a mais recomendada.

Considere um bipolo cuja corrente é dada por

$$\hat{\mathbf{I}} = I e^{j\theta_I} \quad (43)$$

e cuja tensão é

$$\hat{\mathbf{V}} = V e^{j\theta_V} \quad (44)$$

A impedância desse bipolo é calculada pela divisão entre os fasores de tensão $\hat{\mathbf{V}}$ e corrente $\hat{\mathbf{I}}$, resultando em

$$\hat{\mathbf{Z}} = \frac{V}{I} e^{j(\theta_V - \theta_I)} \quad (45)$$

Portanto, o módulo da impedância é a razão

$$|Z| = \frac{V}{I} \quad (46)$$

em que os valores de V e I são as amplitudes de pico, consideradas positivas. A fase da impedância é dada pela diferença entre as fases da tensão e da corrente, ou seja,

$$\theta_Z = \theta_V - \theta_I \quad (47)$$

4. Leis de Kirchhoff na forma fasorial

As leis de Kirchhoff dizem que a soma das correntes em um nó é igual a zero e que a soma das tensões em um laço é nula. Elas valem para sinais DC (constantes) e para sinais variantes no tempo.

No entanto, os sinais devem ser somados no mesmo instante de tempo. Por isso, as leis de Kirchhoff não podem ser aplicadas diretamente aos valores eficazes ou aos valores de pico. A Figura 5 ilustrou esse fato para amplitudes de pico.

Portanto, quando há defasagem não nula entre as diversas correntes, tem-se que a soma das correntes de pico em um nó pode ser não nula, ou seja, pode-se ter

$$\sum_{k=1}^n I p_k \neq 0 \quad . \quad (48)$$

Consequentemente, a soma das correntes eficazes em um nó também pode ser não nula. Logo, caso haja defasagem não nula entre as correntes, pode ocorrer que

$$\sum_{k=1}^n I e f_k \neq 0 \quad . \quad (49)$$

Da mesma forma, se houver defasagem não nula entre as tensões de um laço, pode-se ter um somatório não nulo tanto das tensões de pico no laço

$$\sum_{k=1}^n V p_k \neq 0 \quad (50)$$

quanto das tensões eficazes desse mesmo laço

$$\sum_{k=1}^n V e f_k \neq 0 \quad . \quad (51)$$

Isso não significa que as leis de Kirchhoff não sejam válidas. Quando há defasagem não nula entre as tensões ou correntes somadas, as leis de Kirchhoff devem ser consideradas em sua forma fasorial.

A primeira lei de Kirchhoff na forma de soma de fasores de corrente é dada por

$$\sum_{k=1}^n \hat{I}_k = 0 \quad , \quad (52)$$

enquanto que a segunda lei de Kirchhoff para soma de tensões fasoriais é

$$\sum_{k=1}^n \hat{V}_k = 0 \quad . \quad (53)$$

Soma de fasores

Para a aplicação das leis de Kirchhoff, é necessário somar fasores. A soma ou subtração de tensões ou correntes fasoriais pode ser simplificada ao se usar a notação cartesiana, em vez da polar.

Considere o primeiro fasor descrito por

$$\hat{V}_1 = V_1 e^{j\theta_1} \quad (54)$$

e o segundo fasor dada por

$$\hat{V}_2 = V_2 e^{j\theta_2} \quad . \quad (55)$$

Passando-se da notação polar para a cartesiana representa-se o primeiro fasor como

$$\hat{V}_1 = X_1 + jY_1 \quad , \quad (56)$$

em que $X_1 = V_1 \cos(\theta_1)$ e $Y_1 = V_1 \sin(\theta_1)$. Semelhantemente, o segundo fasor é representado por

$$\hat{V}_2 = X_2 + jY_2 \quad , \quad (57)$$

para $X_2 = V_2 \cos(\theta_2)$ e $Y_2 = V_2 \sin(\theta_2)$.

A soma fasorial das tensões resulta no fasor

$$\hat{V}_s = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 \quad . \quad (58)$$

Em notação cartesiana, tem-se simplesmente

$$\hat{\mathbf{V}}_s = (X_1 + X_2) + j(Y_1 + Y_2) \quad . \quad (59)$$

Apesar de não ser obrigatória, algumas vezes pode-se desejar a conversão para a notação polar. Nesse caso, o fasor resultante da soma é representado por

$$\hat{\mathbf{V}}_s = V_s e^{j\theta_s} \quad . \quad (60)$$

Na notação polar, o módulo da soma é dado por

$$V_s = \sqrt{(X_1 + X_2)^2 + (Y_1 + Y_2)^2} \quad (61)$$

e a fase é dada pela relação

$$\theta_s = \arctan\left(\frac{Y_1 + Y_2}{X_1 + X_2}\right) \quad . \quad (62)$$