Universidade de São Paulo - Escola Superior de Agricultura 'Luiz de Queiroz'
Departamento de Ciências Florestais

# MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA A GESTÃO FLORESTAL

**Solução de exercícios propostos**

**Luiz Carlos Estraviz Rodriguez**
**Lucas do Nascimento Ferreira**

Complemento da apostila para uso exclusivo dos alunos matriculados nas disciplinas LCF280, LCF586 e LCF685.

Piracicaba, SP
Brasil
Jumho - 2014

## 1. Juros
## 2. Fórmulas Básicas de Juros

### Fórmula de juros compostos

1. Você tem R$1.000 que podem ser investidos a uma taxa de juros de 5,5% a.a. Qual será o valor desse capital daqui a 10 anos?
   $V_n = R\$1.000 \times (1 + 0{,}055)^{10}$
   $V_n = R\$1.708{,}14$

2. Se você empresta R$300 por 6 anos a 10% de juros a.a., quanto você receberá se os juros forem acumulados anualmente? E semestralmente?
   $V_{n\,(anual)} = \text{R\$}300 \times (1 + 0{,}1)^{6}$
   $V_{n\,(anual)} = R\$531{,}47$
   $V_{n\,(semestral)} = R\$300 \times (1 + 0{,}1/2)^{6\times 2}$
   $V_{n\,(semestral)} = R\$538{,}76$

3. Suponha um depósito de R$50 numa caderneta de poupança por 4 anos, a 8% de juros a.a., acumulados anualmente. (a) Qual será o valor do capital e dos juros ao final dos 4 anos? (b) De quanto seria o montante se os juros fossem acumulados trimestralmente? (c) Explique a diferença entre os itens (a) e (b).
   a) $V_n = R\$50 \times (1 + 0{,}08)^{4}$
   $V_n = R\$68{,}02$
   b) $V_n = R\$50 \times (1 + 0{,}08/4)^{4\times 4}$
   $V_n = R\$68{,}64$
   c) O pequeno valor a mais encontrado no segundo valor se deve ao acumulo de juros sobre juros dentro do ano na razão de ¼ da taxa anual de juros a cada capitalização.

### Fórmula para o cálculo do valor descontado

4. A 8% de juros a.a., qual o valor presente de uma nota promissória de R$1.000,00 resgatável em 6 anos se a taxa de juros for capitalizada anualmente? A cada 6 meses? A cada 3 meses?
   a)
   $$V_0 = \frac{R\$1.000}{(1 + 0{,}08)^{6}}$$
   $V_0 = R\$630{,}17$
   b)
   $$V_0 = \frac{R\$1.000}{(1 + 0{,}08/2)^{6\times 2}}$$
   $V_0 = R\$624{,}60$
   c)
   $$V_0 = \frac{R\$1.000}{(1 + 0{,}08/4)^{6\times 4}}$$
   $V_0 = R\$621{,}72$

5. Suponha a existência de um arrendamento cujo pagamento, que será feito daqui à 3 anos, está orçado em R\$500,00. À uma taxa de juros anual de 6% a.a., qual o seu valor hoje?

$$V_0 = \frac{R\$500}{(1+0{,}06)^3}$$

$$V_0 = R\$419{,}81$$

6. Você possui uma plantação de *Pinus* que lhe renderá R\$8.000,00 após 5 anos. À 9% de juros a.a., você poderia vendê-la hoje por R\$6.000?

$$V_0 = \frac{R\$8.000}{(1+0{,}09)^5}$$

$$V_0 = R\$5.199{,}45$$

Resp.: Sim.

## Taxa de juros e período de tempo

7. Um talhão de *Pinus* produzirá um retorno líquido de R\$1.250 ao final de uma rotação de 30 anos. Quanto um investidor poderá gastar no plantio para ver seu capital remunerado em 5% a.a.? E em 10% a.a.?

I = R\$1.250

$$V_n = V_0 \times (1+i)^n$$

$$V_0 + R\$1.250 = V_0 \times (1+0{,}05)^{30}$$

$$V_0 = R\$376{,}29$$

$$V_0 + R\$1.250 = V_0 \times (1+0{,}1)^{30}$$

$$V_0 = R\$75{,}99$$

8. Suponha a existência de um talhão florestal com madeira para serraria avaliada em R\$475 quatro anos atrás. Hoje, o seu valor é de R\$646; qual a taxa anual de crescimento desse valor?

$$\frac{V_n}{V_0} = (1+i)^n$$

$$\frac{R\$646}{R\$475} = (1+i)^4$$

$$\sqrt[4]{1{,}36} = 1 + i$$

$$i = 7{,}99\%$$

9. Se temos um volume de madeira avaliada em R\$255/ha hoje e esperamos que em 10 anos o seu valor atinja R\$865/ha, qual é a taxa esperada anual de crescimento desse valor?

$$\frac{R\$865}{R\$255} = (1+i)^{10}$$

$$i = 12{,}99\%$$

10. Um proprietário de serraria possui R\$30.000,00 numa conta bancária rendendo 9% a.a.. Quanto tempo ele terá que esperar para que essa quantia seja de R\$50.000 e possa então comprar uma peça para sua empresa?

$$\frac{R\$50.000}{R\$30.000} = (1+0{,}09)^n$$

$$1{,}6667 = 1{,}09^n$$
$$\log 1{,}6667 = n \times \log 1{,}09$$
$$\frac{0{,}2219}{0{,}0374} = n$$
$$n = 5{,}9\ anos$$

11. A 8% de juros trimestrais, quanto tempo teremos que esperar para que uma promissória de R$200,00 dobre de valor?

$$\frac{72}{8} = 9\ anos$$

*Prova Real*

$$\frac{R\$400}{R\$200} = (1 + 0{,}08/4)^{n \times 4}$$
$$2 = 1{,}02^{4n}$$
$$\log 2 = 4n \times \log 1{,}02$$
$$4n = \log 2 \,/\, \log 1{,}02$$
$$n = 8{,}75\ anos \cong 9\ anos$$

# 3. Séries de Pagamentos

## 3.1. Séries finitas

### 3.1.1. Valor futuro de uma série anual finita

12. A 7% de juros a.a., qual é o valor acumulado de R$1,50 cobrado como imposto territorial por ha depois de 15 anos ? 25 anos? 50 anos?

$$V_{n_{15}} = \frac{R\$1{,}5 \times [(1+0{,}07)^{15} - 1]}{0{,}07}$$
$$V_{n_{15}} = R\$37{,}69$$
$$V_{n_{25}} = \frac{R\$1{,}5 \times [(1+0{,}07)^{25} - 1]}{0{,}07}$$
$$V_{n_{25}} = R\$94{,}87$$
$$V_{n_{50}} = \frac{R\$1{,}5 \times [(1+0{,}07)^{50} - 1]}{0{,}07}$$
$$V_{n_{50}} = R\$609{,}79$$

13. Uma mina de cascalho é descoberta nas terras da Cia XYZ durante atividades de plantio. A Cia XYZ compra R$10.000 de cascalho por ano no mercado comum para conservar suas estradas de acesso. Se a mina for explorada para substituir as compras, de quanto será a economia ao final de 5 anos, quando a mina estiver esgotada? Assuma 9% a.a. como custo do capital.

$$V_n = \frac{R\$10.000 \times [(1+0{,}09)^{5} - 1]}{0{,}09}$$
$$V_n = R\$59.847{,}11$$

14. A poda de árvores de natal custa em média R$60,00 por ha por ano do terceiro ao oitavo ano numa rotação de 8 anos. A 9,5% de juros a.a., qual o valor acumulado desses custos?

$$V_n = \frac{R\$60 \times [(1+0{,}095)^{5} - 1]}{0{,}095}$$
$$V_n = R\$362{,}68/ha$$

### 3.1.2. Valor presente de uma série anual finita

15. A 11,5% de juros a.a., qual o valor presente de R$3,00 por ha de impostos territoriais a serem pagos durante 15 anos? 25 anos? 50 anos?

$$V_{0_{15}} = \frac{R\$3 \times [(1+0{,}115)^{15} - 1]}{0{,}115 \times (1+0{,}115)^{15}}$$
$$V_{0_{15}} = R\$20{,}99$$
$$V_{0_{25}} = \frac{R\$3 \times [(1+0{,}115)^{25} - 1]}{0{,}115 \times (1+0{,}115)^{25}}$$
$$V_{0_{25}} = R\$24{,}37$$
$$V_{0_{50}} = \frac{R\$3 \times [(1+0{,}115)^{50} - 1]}{0{,}115 \times (1+0{,}115)^{50}}$$
$$V_{0_{50}} = R\$25{,}97$$

16. Os custos anuais de proteção contra incêndios para um talhão de pinus são de R$0,25 por ha. Se a rotação é de 80 anos e a taxa de juros é de 8% a.a., qual é o valor inicial dessa série de custos para uma rotação?

$$V_0 = \frac{R\$0{,}25 \times [(1+0{,}08)^{80} - 1]}{0{,}08 \times (1+0{,}08)^{80}}$$

$$V_0 = R\$3{,}12/ha$$

17. O pagamento de R$1,00 pelo arrendamento para caça de 1 ha por ano numa área total de 3.000 ha totaliza __________ ao final de 25 anos, assumindo-se 9% de juros a.a. Esses pagamentos apresentam um valor presente de __________ .

$$V_0 = \frac{R\$1 \times [(1+0{,}09)^{25} - 1]}{0{,}09 \times (1+0{,}09)^{25}}$$

$$V_0 = R\$9{,}82/ha/25\ anos$$

$$V_0 = R\$29.467{,}74/25\ anos$$

18. Uma empresa madeireira tem a opção de arrendar 5.000 ha para pasto a R$2,00 por ha por ano durante 5 anos ou aceitar um pagamento inicial único de R$40.000. A 8% de juros a.a., qual a alternativa mais interessante?

$$V_0 = \frac{R\$2 \times [(1+0{,}08)^{5} - 1]}{0{,}08 \times (1+0{,}08)^{5}}$$

$$V_0 = R\$7{,}96/ha/5\ anos$$

$$V_0 = R\$39.927{,}10/5\ anos$$

### 3.1.3. Valor futuro de uma série periódica finita

19. A 8,5% de juros a.a., 40 ha de árvores de natal produzem R$2.000 de receitas líquidas por ha a cada 9 anos apresentando um valor futuro de _________ no final da 4ª rotação.

$$V_n = R\$2.000 \left[\frac{(1+0{,}085)^{4\times 9} - 1}{(1+0{,}085)^{9} - 1}\right]$$

$$V_n = R\$32.950{,}72/ha$$

20. Um consultor florestal se defronta com um problema de compra de um caminhão. Pretende continuar com o seu caminhão atual por mais 3 anos, quando vendê-lo poderá obter um novo a um custo líquido de R$5.000. Se trocar o caminhão pelo mesmo preço a cada 3 anos durante os próximos 30 anos, qual seria o valor futuro a 8% de juros a.a. logo após a última compra? Assuma que o último caminhão é comprado 3 anos antes do final do período.

$$V_n = R\$5.000 \left[\frac{(1+0{,}08)^{9\times 3} - 1}{(1+0{,}08)^{3} - 1}\right]$$

$$V_n = R\$134.534{,}82$$

21. Um viveirista planta uma variedade ornamental que fica pronta para ser vendida em 5 anos. A receita líquida por ha no fim desse período é de R$700. A 8% de juros a.a., qual o valor futuro ao final de 25 anos para um ha?

$$V_n = R\$700 \left[\frac{(1+0{,}08)^{5\times 5} - 1}{(1+0{,}08)^{5} - 1}\right]$$

$$V_n = R\$8.722{,}97/ha$$

### 3.1.4. Valor presente de uma série periódica finita

22. Um plantio de 40 hectares de árvores de natal resulta em uma receita líquida de R$2.500 por ha ao fim de cada rotação de 8 anos. A juros de 10% a.a., qual é o valor presente de cinco rotações?

$$V_0 = \frac{R\$2.500[(1+0{,}1)^{5\times 8} - 1]}{[(1+0{,}1)^{8} - 1] \times (1+0{,}1)^{5\times 8}}$$

$$V_0 = R\$2.137{,}80/ha$$

23. Um talhão florestal poderá receber desbastes a cada 5 anos e produzir madeira para serraria a um valor de R$1.500. A juros de 9,5% a.a., qual o valor presente de uma seqüência de 10 desbastes?

$$V_0 = \frac{R\$1.500[(1+0{,}095)^{10\times 5} - 1]}{[(1+0{,}095)^{5} - 1] \times (1+0{,}095)^{10\times 5}}$$

$$V_0 = R\$2.584{,}21$$

24. Qual o valor presente no Exercício 23, se mais 10 cortes fossem possíveis?

$$V_0 = \frac{R\$1.500[(1+0{,}095)^{20\times 5} - 1]}{[(1+0{,}095)^{5} - 1] \times (1+0{,}095)^{20\times 5}}$$

$$V_0 = R\$2.611{,}86$$

## 3.2. Séries Perpétuas

### 3.2.1. Valor presente de uma série anual perpétua

25. Qual o valor de um *bem de capital* capaz de produzir R$ 60 por ano, considerando uma taxa de 8% a.a.?

$$V_0 = \frac{60}{0{,}08} => V_0 = R\$750$$

26. Espera-se a cobrança de uma *pena* baseada em uma multa perpétua de R$ 2 por hectare por ano. Qual o valor dessa *pena* se considerada uma taxa de 6% a.a.?

$$V_0 = \frac{2}{0{,}06} => V_0 = R\$33{,}33$$

### 3.2.2. Valor presente de uma série periódica perpétua

27. Qual o valor de um talhão florestal de 80 ha que produz R$600/ha de receita líquida a cada 25 anos, se considerados juros de 7% a.a.?

$$V_0 = \frac{R\$600}{[(1+0{,}07)^{25} - 1]}$$

$$V_0 = R\$135{,}52/ha \times 80ha => V_0 = R\$10.841{,}50/ha$$

28. Quanto você pagaria por um hectare de terra cuja melhor alternativa de uso é produzir árvores de natal em rotações de 9 anos, com uma receita líquida na época de corte de R$2.500/ha e um custo de oportunidade do seu capital de 9,5% a.a.?

$$V_0 = \frac{R\$2.500}{[(1+0{,}095)^9 - 1]}$$

$$V_0 = R\$1.979{,}07/ha$$

29. Quanto valeria o mesmo hectare de árvores de natal no Exercício 28 se o projeto fosse avaliado imediatamente antes de um corte?

$$R\$2.500/ha + R\$1979{,}07/ha = R\$4.479{,}07/ha$$

30. Qual o valor de um talhão florestal de 40 hectares que resulta numa receita líquida de $300/ha a cada 30 anos e que está prestes para ser explorado? Use uma taxa de 4,5% a.a.

$$V_0 = R\$300 + \frac{R\$300}{[(1+0{,}045)^{30} - 1]}$$

$$V_0 = R\$409{,}28/ha \times 40ha => V_0 = R\$16.371{,}08$$

31. Aos 4 anos, qual o valor presente do projeto descrito no Exercício 28?

$$V_0 = \frac{R\$2.500 \times (1+0{,}095)^4}{(1+0{,}095)^9 - 1}$$

$$V_0 = R\$2.845{,}23$$

32. Um talhão florestal de 100 ha com 50 anos de idade deve produzir uma receita líquida de R$1.450 quando atingir o seu ciclo final de 60 anos, e assim continuar indefinidamente. Qual o valor presente desse projeto a uma taxa de 7% a.a.?

$$V_0 = \frac{R\$1.450 \times (1+0{,}07)^{50}}{(1+0{,}07)^{60} - 1}$$

$$V_0 = R\$750{,}05$$

## 3.3. Fundo de Acumulação de Capital

33. Um equipamento no valor de R$25.000 precisa ser reposto em 6 anos, quando o atual terá que ser abandonado. Calcule o valor anual de reposição para uma taxa de 6% a.a..

$$a = \frac{R\$25.000 \times 0{,}06}{(1+0{,}06)^6 - 1}$$

$$a = R\$3.584{,}07/ano$$

34. Se você planejasse trocar o seu carro atual que vale R$8.000 por um de valor semelhante daqui a 5 anos, considerando depósitos em uma conta remunerada que paga 6% a.a., qual seria o valor anual de reposição necessário? Considere um valor de revenda do seu carro velho de R$1.000.

$$a = \frac{R\$7.000 \times 0{,}06}{(1+0{,}06)^5 - 1}$$

$$a = R\$1.241{,}77/ano$$

35. Refaça o exercício 34 considerando prestações mensais e juros mensais.

$$a = \frac{R\$7.000 \times 0,06}{(1 + 0,06/12)^{6\times12} - 1}$$
$$a = R\$1.203,96/mês$$

## 3.4. Fórmula de Cálculo da Prestação de um Financiamento

36. Suponha que uma pá carregadeira no valor de R$ 30.000 foi financiada a uma taxa de 12% a.a.. Qual seria o valor da prestação para quitar este financiamento em 5 anos? E se os pagamentos fossem mensais?

$$a_{anual} = \frac{R\$30.000 \times 0,12 \times (1 + 0,12)^5}{(1 + 0,12)^5 - 1}$$
$$a_{anual} = R\$8.322,29/ano$$

$$a_{mensal} = \frac{R\$30.000 \times 0,12 \times (1 + 0,12/12)^{5\times12}}{(1 + 0,12/12)^{5\times12} - 1}$$
$$a_{mensal} = R\$8.008,00/mês$$

37. Considere pagamentos anuais para o caso de um empréstimo de R$35.000 pagáveis em 20 anos a uma taxa de 8% a.a., e calcule o valor da prestação.

$$a = \frac{R\$35.000 \times 0,08 \times (1 + 0,08)^{20}}{(1 + 0,08)^{20} - 1}$$
$$a = R\$3.564,82/ano$$

38. Se você tivesse emprestado R$4.500, qual seria o valor da prestação mensal se a taxa fosse de 12% a.a. e o empréstimo pudesse ser amortizado em dois anos e meio?

$$a = \frac{R\$4.500 \times 0,12 \times (1 + 0,12/12)^{2,5\times12}}{(1 + 0,12/12)^{2,5\times12} - 1}$$
$$a = R\$2.092,40/mês$$

39. Uma quantia de R$11.700 foi emprestada para compra de um lote de lenha em 15 pagamentos mensais. Supondo juros de 2,5 % ao mês, qual o valor da prestação?

$$a = \frac{R\$11.700 \times 0,025 \times (1 + 0,025)^{15}}{(1 + 0,025)^{15} - 1}$$
$$a = R\$944,97/mês$$

## 3.5. Planilha de Amortização

40. Suponha que R$18.000 são emprestados para a compra de um equipamento. Construa um programa de amortização assumindo 5 pagamentos mensais iguais a uma taxa de 12 % ao mês.

| Pagamento | Juros (R$) | Principal (R$) | Saldo devedor (R$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.160,00 | 2.833,38 | 15.166,62 |
| 2 | 1.819,99 | 3.173,38 | 11.993,24 |
| 3 | 1.439,19 | 3.554,19 | 8.439,06 |
| 4 | 1.012,69 | 3.980,69 | 4.458,37 |
| 5 | 535,00 | 4.458,37 | 0,00 |

## 3.6 Taxas de Juros Efetiva versus Nominal

41. Se juros forem cobrados a uma taxa de *1%* ao mês, calcule as taxas efetivas e nominais anuais.
    Taxa nominal anual => 1% mês X 12 meses = 12%
    Taxa efetiva anual => i’ = $(1 + 0{,}12/12)^{12}$ -1 => i’ = 12,68%

42. A taxa nominal é de *10%* a.a. Qual a taxa efetiva anual se os juros forem acumulados trimestralmente?

$$i' = \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^4 - 1$$

$i' = 10{,}38\%$

## 3.7. Capitalização contínua com taxas instantâneas

43. Para taxas nominais de 10% e 20% a.a., quais as respectivas taxas efetivas anuais se os juros forem acumulados instantaneamente?

$$r' = e^{0{,}1} - 1$$
$$r' = 10{,}52\%$$

$$r' = e^{0{,}2} - 1$$
$$r' = 22{,}14\%$$

## 3.8. Relação entre inflação e juros reais

44. Um determinado investimento florestal rendeu 21% a.a. A inflação no mesmo período foi de 17,3% a.a.. Qual foi a *taxa real* de retorno?

$$r = \frac{0{,}21 - 0{,}173}{1 + 0{,}173}$$
$$r = 3{,}15\%\ a.a.$$

45. Uma caderneta de poupança que paga correção monetária mais 0,5% ao mês recebeu como aplicação o produto da venda de um talhão florestal para lenha. A variação no índice de inflação do mês foi de 2% e o preço por estéreo de lenha aumentou de R$ 12,00 para R$ 12,35 nesse mesmo período. Foi um bom negócio ter vendido a madeira?

$$r = \frac{0{,}029 - 0{,}02}{1 + 0{,}02}$$
$$r = 0{,}8\%\ mês$$

Resp.: Sim, pois a taxa de juros para venda da madeira rendeu mais que a taxa de juros da caderneta.

46. Um produtor florestal, no mês de abril de 1999, fez os seus cálculos para negociar a venda de suas árvores para uma empresa produtora de celulose. O preço exigido pelo produtor para começar a negociação tomou como referência o valor recebido pelo seu vizinho um ano antes, corrigido pela variação do INPC no período, mais uma taxa de juros reais de 4% a.a. Qual foi o preço exigido pelo produtor, sabendo-se que o valor recebido pelo vizinho em abril de 1998 foi de R$ 9,15/st? Qual foi a *taxa real* efetivamente recebida pelo produtor, sabendo-se que ele fechou o contrato de venda a R$ 9,80/st?

$$V_n = 9{,}15/st \times (1 + 0{,}04)$$
$$V_n = 9{,}52/st$$

$$9{,}8 = 9{,}52 \times (1 + r)$$
$$r = 0{,}0294 = 2{,}94\%$$

## PARTE II - CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DE PROJETOS

*Exemplo XXIII:* Em um hectare de terra no agreste Paraibano gasta-se R$ 325 para implantar o cultivo da Algaroba. Os custos anuais de manutenção são considerados desprezíveis. A partir do 8o. ano de idade espera-se uma retirada anual de 25 st/ha de lenha. No 12o. ano é feito o corte raso do plantio com produção de lenha estimada em 300 st/ha. Um produtor da região, acostumado a trabalhar com uma taxa de retorno de 10% sobre os seus investimentos, e que estima que o preço de venda da lenha irá se manter inalterado em torno de R$ 3,20/st, já descontado o custo do corte e transporte, deseja saber se o plantio da Algaroba é um investimento atraente.

47. Resolva o problema do Exemplo XXIII na planilha MatFin.xls

Resp.:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Taxa =** | 10,00% | | ***n* =** | 12 | | **Valor Presente Líquido** | |
| Macros: | Limpa dados (Ctrl-L) | | Exemplo (Ctrl-E) | | Cálculo para intervalo de taxas (Ctrl-R) | | VPL= | 111,02 |
| | **Custos** | | | **Receitas** | | | | |
| | | 325,00 | 1019,99 | | 436,02 | 1368,41 | **Valor Futuro Líquido** | |
| Ano | Valor | Ano *0* | Ano *n* | Valor | Ano *0* | Ano *n* | VFL= | 348,42 |
| 0 | 325,00 | 325,00 | 1019,99 | | 0,00 | 0,00 | | |
| 8 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 37,32 | 117,13 | **Razão Benefício/Custo** | |
| 9 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 33,93 | 106,48 | B/C= | 1,34 |
| 10 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 30,84 | 96,80 | | |
| 11 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 28,04 | 88,00 | **Valor Esperado da Terra** | |
| 12 | | 0,00 | 0,00 | 960,00 | 305,89 | 960,00 | VET= | 162,93 |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | **VPL Anualizado** | |
| | | | | | | | VPLA= | 16,29 |

Para encontrar a TIR, basta usar o recurso *Atingir Meta* do Excel para buscar a taxa que torna o VPL igual a zero. Como resultado, obtemos TIR = 12,93% a.a.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Taxa =** | 12,93% | | ***n* =** | 12 | | **Valor Presente Líquido** | |
| Macros: | Limpa dados (Ctrl-L) | | Exemplo (Ctrl-E) | | Cálculo para intervalo de taxas (Ctrl-R) | | VPL= | 0,00 |
| | **Custos** | | | **Receitas** | | | | |
| | | 325,00 | 1397,66 | | 325,00 | 1397,66 | **Valor Futuro Líquido** | |
| Ano | Valor | Ano *0* | Ano *n* | Valor | Ano *0* | Ano *n* | VFL= | 0,00 |
| 0 | 325,00 | 325,00 | 1397,66 | | 0,00 | 0,00 | | |
| 8 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 30,25 | 130,10 | **Razão Benefício/Custo** | |
| 9 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 26,79 | 115,20 | B/C= | 1,00 |
| 10 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 23,72 | 102,02 | | |
| 11 | | 0,00 | 0,00 | 80,00 | 21,01 | 90,34 | **Valor Esperado da Terra** | |
| 12 | | 0,00 | 0,00 | 960,00 | 223,23 | 960,00 | VET= | 0,00 |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | **VPL Anualizado** | |
| | | | | | | | VPLA= | 0,00 |

48. Verifique, usando a planilha MatFin.xls, se o VPLA do exemplo XXIII resulta igual a R$ 16,29/ano.

Resp.: Sim, o VPLA do exemplo XXIII para uma taxa de 10% a.a. é igual a R$ 16,29 como pode ser observado na primeira planilha da resposta do exercício anterior

49. Verifique, usando a planilha MatFin.xls, se o valor de $RLF e o VET do exemplo XXIII resultam igual a R$348,42/ha e R$162,93/ha, respectivamente.

Resp.: Sim, o valor da receita líquida futura (RLF, ou ainda Valor Futuro Líquido - VLF) e do Valor Esperado da Terra (VET), para o problema do exemplo XXIII, considerando uma taxa de 10% a.a. resultam iguais a R$348,42/ha e

R$162,93/ha, respectivamente, como pode ser observado na primeira planilha da resposta do exercício 47.

50. Analise o exemplo apresentado na planilha MatPin.xls.

Resp.:

| JUROS |
|---|
| 8,00% |

| VET |
|---|
| 2865,9 |

Quadro 1

PRODUTIVIDADES (m3/ha)

| | DESBASTES (Idades) | | | | | | C. Raso |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anos > | 12 | 19 | | | | | 25 |
| Fábrica ----> | 10 | 10 | | | | | 50 |
| Serra ------> | | 20 | | | | | 90 |
| Faqueado ---> | | | | | | | 290 |

Quadro 2

CUSTOS DE EXPLORAÇÃO ($/m3)

| | DESBASTES (Idades) | | | | | | C. Raso |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anos > | 12 | 19 | | | | | 25 |
| Marcação ---> | 1,00 | 1,00 | | | | | 0,00 |
| Corte ------> | 2,50 | 2,50 | | | | | 3,00 |
| Arraste ----> | 2,00 | 2,00 | | | | | 1,90 |

Quadro 3

PRECOS ($/m3)

| | |
|---|---|
| Fábrica | 12,000 |
| Serra | 40,000 |
| Faqueado | 100,000 |

Quadro 4

CUSTOS ANUAIS

| Tipo | ($/ha) |
|---|---|
| Plantio | 1200,000 |
| 1 | 400,000 |
| 2 | 200,000 |
| 3 | 100,000 |
| 4 | 30,000 |
| 5 | 30,000 |
| 6 | 30,000 |
| 7 | 30,000 |
| Outras | 30,000 |

O exercício calcula o Valor Esperado da Terra (VET) para o manejo de um povoamento de Pinus que recebe dois desbastes, um aos 12 anos e outro aos 19 anos de idade, e um corte raso aos 25 anos de idade. Os custos são apresentados em dois grupos, *Anuais por hectare* (custo de implantação de $1.200; 1ª, 2ª, 3ª e demais manutenções a $400, $200, $100 e $30, respectivamente); e de *Exploração por m3* (para marcação, corte e arraste até a pilha estimados em $1, $2,50 e $2, respectivamente, nos casos da madeira obtida nos desbastes; e $0, $3 e $1,90, respectivamente, para a madeira colhida no corte raso). As toras produzidas foram classificadas de acordo com a dimensão, para efeito de pagamento: (i) toras finas para processamento na fábrica com menor valor ($ 12,00); (ii) toras de dimensões médias para serraria com valor intermediário ($ 48,00); e (iii) toras mais grossas para a máquina de laminação que apresentam maior valor (($ 100,00). Os volumes esperados em cada desbaste e no corte raso de cada produto também foram apresentados. No primeiro desbaste é colhida apenas madeira para fábrica, e a produção estimada é de 10 m3/ha. No segundo desbaste colhe-se madeira para fábrica e serraria, com produção estimada em 10 e 20 m3/ha, respectivamente. E no corte raso colhe-se madeira para fábrica, serraria e laminação, com produção estimada em 50, 90 e 290 m3/ha, respectivamente. Foi usada uma taxa de juros de 8% a.a. e, para esse caso, o VET resultou igual a $2.865,90.

Se usada a planilha MatFin, o mesmo resultado poderia ser obtido se a planilha fosse preenchida da seguinte forma:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Taxa =** | 8,00% | | ***n* =** | 26 | |
| Macros: | Limpa dados (Ctrl-L) | | Exemplo (Ctrl-E) | | Cálculo para intervalo de taxas (Ctrl-R) | |
| | **Custos** | | | **Receitas** | | |
| | | 2251,75 | 16654,71 | | 4730,21 | 34986,28 |
| Ano | Valor | Ano *0* | Ano *n* | Valor | Ano *0* | Ano *n* |
| 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | | 0,00 | 0,00 |
| 1 | 1200,00 | 1111,11 | 8218,17 | | 0,00 | 0,00 |
| 2 | 400,00 | 342,94 | 2536,47 | | 0,00 | 0,00 |
| 3 | 200,00 | 158,77 | 1174,29 | | 0,00 | 0,00 |
| 4 | 100,00 | 73,50 | 543,65 | | 0,00 | 0,00 |
| 5 | 30,00 | 20,42 | 151,02 | | 0,00 | 0,00 |
| 6 | 30,00 | 18,91 | 139,83 | | 0,00 | 0,00 |
| 7 | 30,00 | 17,50 | 129,47 | | 0,00 | 0,00 |
| 8 | 30,00 | 16,21 | 119,88 | | 0,00 | 0,00 |
| 9 | 30,00 | 15,01 | 111,00 | | 0,00 | 0,00 |
| 10 | 30,00 | 13,90 | 102,78 | | 0,00 | 0,00 |
| 11 | 30,00 | 12,87 | 95,17 | | 0,00 | 0,00 |
| 12 | 30,00 | 11,91 | 88,12 | | 0,00 | 0,00 |
| 13 | 85,00 | 31,25 | 231,17 | 120,00 | 44,12 | 326,35 |
| 14 | 30,00 | 10,21 | 75,55 | | 0,00 | 0,00 |
| 15 | 30,00 | 9,46 | 69,95 | | 0,00 | 0,00 |
| 16 | 30,00 | 8,76 | 64,77 | | 0,00 | 0,00 |
| 17 | 30,00 | 8,11 | 59,97 | | 0,00 | 0,00 |
| 18 | 30,00 | 7,51 | 55,53 | | 0,00 | 0,00 |
| 19 | 30,00 | 6,95 | 51,41 | | 0,00 | 0,00 |
| 20 | 195,00 | 41,84 | 309,44 | 920 | 197,38 | 1459,92 |
| 21 | 30,00 | 5,96 | 44,08 | | 0,00 | 0,00 |
| 22 | 30,00 | 5,52 | 40,81 | | 0,00 | 0,00 |
| 23 | 30,00 | 5,11 | 37,79 | | 0,00 | 0,00 |
| 24 | 30,00 | 4,73 | 34,99 | | 0,00 | 0,00 |
| 25 | 30,00 | 4,38 | 32,40 | | 0,00 | 0,00 |
| 26 | 2137 | 288,93 | 2137,00 | 33200 | 4488,70 | 33200,00 |

| | |
|---|---|
| **Valor Presente Líquido** | |
| VPL= | 2478,46 |
| **Valor Futuro Líquido** | |
| VFL= | 18331,57 |
| **Razão Benefício/Custo** | |
| B/C= | 2,10 |
| **Valor Esperado da Terra** | |
| VET= | 2865,94 |
| **VPL Anualizado** | |
| VPLA= | 229,28 |

É importante destacar a premissa usada pelo analista que criou a planilha MatPin, de que a implantação do povoamento leva 24 meses para ocorrer, i.e., a liberação da área para plantio leva 12 meses e depois são necessários mais 12 meses para o efetivo plantio. Veja como essa premissa foi tratada na MatFin.

# Parte III - Aplicações Florestais

51. Até quanto pagar por uma desrama em um povoamento florestal que, devido a esse tratamento, deverá ter o valor de sua produção aumentado em R$ 23/m3. Considere que a produção será obtida em um horizonte de seis anos, na base média de 295 m3/ha, e que a taxa mínima de retorno exigida pelo tomador de decisões é de 8%.

Resp.: O problema procura o valor máximo que deveria ser gasto hoje para compensar o ganho gerado pela desrama. Esse ganho, estimado em 6.785,00 (23*295) leva seis anos para ser obtido, e o tomador de decisões exige que ao gastar com a desrama o retorno mínimo sobre esse investimento seja de 8% a.a. Portanto, trata-se de um problema bastante simples de resolver, pois envolve apenas o uso da fórmula básica para cálculo de um valor presente. Graficamente, o problema pode ser representado da seguinte forma:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Taxa: | 8% | a.a. | | | | | | | | | = | ***6.785,00*** |
| | | | | | | | | | | Receita = $23/m3 * 295 m3/ha | | |
| 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 |
| **?** | | | | | | | | | | | | |
| = 6.785,00/(1+0,08)^6 | | | | | | | | | | | | |
| **=** | ***4.275,70*** | | | | | | | | | | | |

Concluímos que o custo da desrama deve ser de no máximo R$ 4.275,70 para que o retorno seja de no mínimo 8% a.a.

52. Analise o exemplo apresentado na planilha MatPmb.xls

Resp: A planilha analisa o caso de plantios de eucaliptos explorados aos seis anos de idade e permite determinar, um ano antes da colheita, se a brotação deve ou não ser conduzida (ou seja, se o plantio deve ou não ser reformado logo após o próximo corte). Basicamente, procura-se determinar a produção mínima que deve ser alcançada seis anos depois, e que justifica a decisão de não reformar o povoamento atual. O problema envolve a análise de dois fluxos de caixa que podem ser expressos graficamente da seguinte forma:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Reformar logo após a colheita da floresta atual*** | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $(p-e) * V_1$ | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | | 1 | **Nova Floresta representada por uma série infinita de ciclos florstais idênticos** | | | | | | | | | | | | |
| m | | mc | | | | | | | | | | | | | |
| ***Conduzir a brotação*** | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | $(p-e) * V_1$ | | | | | | | | | | | | $(p-e) * V_2$ | |
| 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | **Nova Floresta ...** |
| m | | mc | | m1 | | m2 | | m3 | | m4 | | m5 | | mc | |

onde *p* expressa o preço da madeira, *e* é o custo de exploração, $m_t$ são custos de manutenção, $V_1$ e $V_2$ representam a produção do plantio atual e da brotação, respectivamente. Representado dessa forma, é possível determinar o valor de $V_2$ que torna os valores presentes dos dois fluxos de caixa iguais. Ou seja, é possível determinar o valor de $V_2$ que torna o tomador de decisões indiferente entre reformar ou conduzir a brotação. Consequentemente, temos assim um piso mínimo para a produção da brotação que, se não alcançado, torna o segundo fluxo de caixa menos atraente e, portanto, a condução da brotação menos interessante que a reforma. A esse valor damos o nome de *Produtividade mínima da brotação* (Pmb). Portanto, se a expectativa de produção para brotação for estimada em níveis inferiores a esse valor, a reforma deveria ser recomendada. No exemplo, temos que a floresta deveria ser reformada se a produção da brotação não puder alcançar o nível de 187,02 $m_3$/ha.

53. Analise o exemplo apresentado na planilha MatCmb.xls

Resp: A planilha analisa o fluxo de custos de plantios de eucaliptos que estão há um ano do momento da colheita. Ou seja, procura-se determinar, um ano antes da colheita, o valor máximo que poderá ser gasto durante a exploração das árvores cultivadas a partir da brotação e que justifica essa estratégia de manejo ao invés da reforma. Basicamente, procura-se determinar a produção mínima que deve ser alcançada com a brotação, que justifica a decisão de não reformar o povoamento atual. O problema envolve a análise de dois fluxos de caixa que podem ser expressos graficamente da seguinte forma:

***Reformar logo após a colheita da floresta atual***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | | 1 | **Nova Floresta representada por uma série infinita de ciclos florstais idênticos** |
| m | | e | |

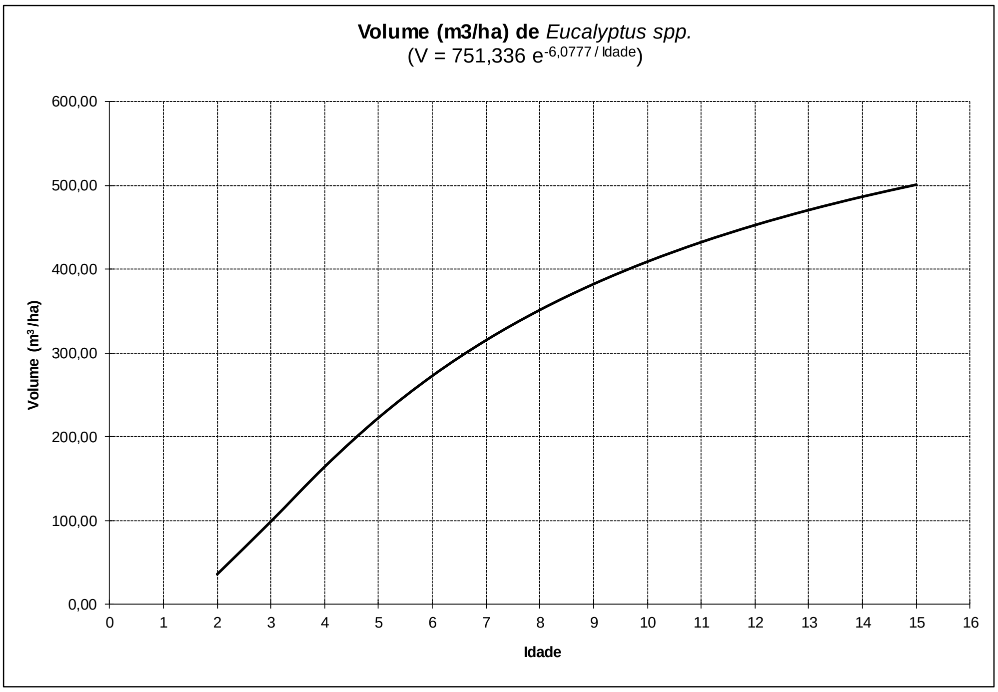
***Conduzir a brotação***

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | **Nova Floresta ...** |
| m | | e | | m1 | | m2 | | m3 | | m4 | | m5 | | e* | |

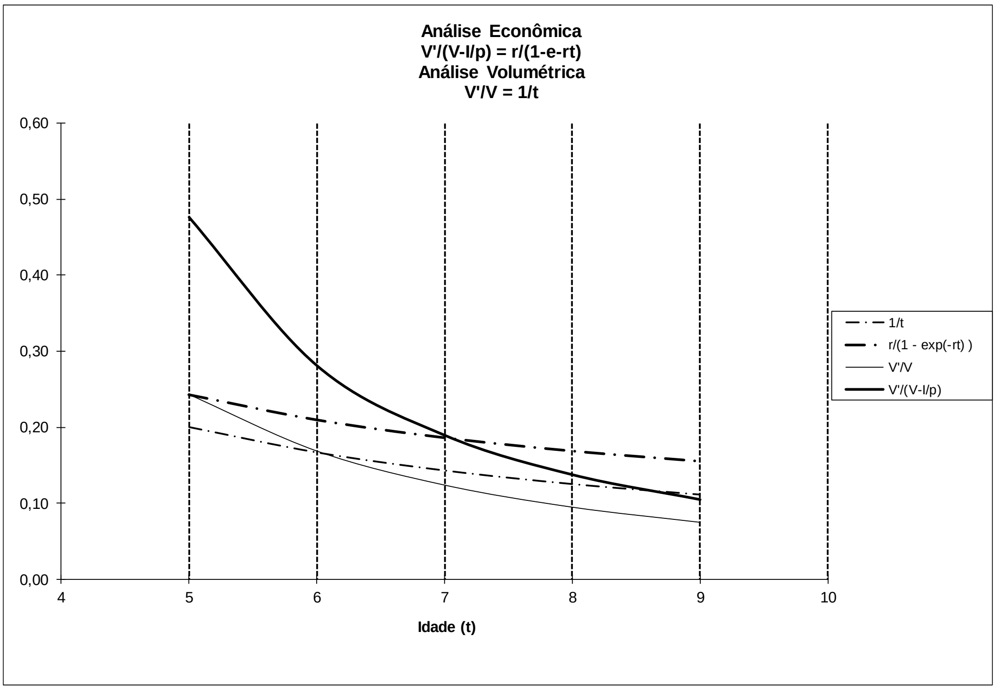
onde *e* expressa o custo de exploração da floresta atual, *e** é o custo de exploração da brotação, e $m_t$ são custos de manutenção. Representado dessa forma, é possível determinar o valor de *e** que torna os valores presentes dos dois fluxos de caixa iguais. Ou seja, é possível determinar o valor de *e** que torna o tomador de decisões indiferente entre reformar ou conduzir a brotação. Consequentemente, temos assim um máximo que pode ser gasto quando da exploração da brotação que, se superado, torna o segundo fluxo de caixa menos atraente e, portanto, a condução da brotação menos interessante que a reforma. A esse valor damos o nome de *Custo máximo da brotação* (*Cmb*). Portanto, se a expectativa de custo para exploração da brotação for estimada em níveis superiores a esse valor, a reforma deveria ser recomendada ao invés da condução da brotação. No exemplo, temos que a floresta deveria ser reformada se o custo de explorar a brotação superar o nível de $ 702,60 /ha.

54. Explore a planilha MatRot.xls e procure situações onde a rotação economicamente ótima é mais longa do que a rotação de máxima produção biológica.

Resp.: A planilha oferece um ambiente para estudar taxas de juros, custos de implantação e preços da madeira que resultam em idades de corte economicamente ótimas (que maximizam VET) <u>*superiores*</u> à idade volumetricamente ótima (idade que maximiza IMA). A análise pressupõe que o plantio cresce de acordo com o modelo Schumacher log de volume inverso da idade ($V= \alpha\, e^{-\beta\,(1/t)}$). Simplifica-se também o fluxo de caixa, considerando que o único custo envolvido é o custo de implantação (*I*), que a floresta cresce de acordo com o referido modelo, onde $\alpha$= 751,336 e $\beta$= -6,0777 , e que a madeira é vendida a um preço *p*. A curva de crescimento pode ser graficamente apresentada da seguinte forma:




Seguindo esse exemplo e, se considerados, por exemplo, uma taxa de juros 8% a.a.; um custo de implantação de R$ 6.000,00 e um preço de venda da madeira de R$ 55,00; vemos que a recomendação econômica, observada no das curvas mais grossas, sugere idade de colheita um ano mais velha (7 anos) que a idade ótima do ponto de vista volumétrico (6 anos), observada no cruzamento das curvas mais finas.



55. Explore a planilha MatSit.xls e analise as diferenças entre sítios que resultam na seleção de distintos ciclos florestais economicamente ótimos.

Resp.: Essa planilha permite explorar o efeito das curvas de crescimento da primeira e segunda rotação na determinação do regime de talhadia simples economicamente ótimo. São considerados regimes envolvendo apenas duas rotações (a brotação é conduzida uma única vez, após a qual assume-se que o plantio é reformado e volta a crescer de forma idêntica ao ciclo anterior). É possível avaliar os resultados para seis sítios que apresentam curvas de crescimento diferentes. As diferentes curvas de crescimento são conhecidas a partir do uso de diferentes valores para os coeficientes $\alpha$, $\beta$ e $\theta$ de um mesmo modelo: $[\beta(1\text{-}e^{-\alpha\, t})]^{\theta}$. Dessa forma, dependendo do sítio escolhido, a primeira e segunda rotação acabam tendo suas curvas conhecidas, pois a planilha automaticamente copia para o local correto o valor desses coeficientes. O fluxo de caixa considerado neste exercício é bastante simples, pois considera-se a existência apenas de um único custo: o de implantação (1.200,00). O interessante é que a planilha permite determinar o ciclo ótimo para um número bastante grande de possibilidades (cenários). De fato, podemos definir quinze diferentes preços ($11 a $25, por exemplo) e quinze taxas (6% a 20%, por exemplo). Para cada combinação, a planilha determina qual o regime de talhadia de envolvendo dois cortes (com idades variando entre 5 e 12 anos para a primeira e segunda rotação, respectivamente). Assim sendo, essa planilha acaba fazendo uma série enorme de cálculos de forma muito eficiente e gerando resultados muito interessantes. De fato, são analisados 64 regimes possíveis (combinações de 8 idades possíveis em cada rotação) para cada um dos 225 cenários (15 preços possíveis para cada 15 taxa de juros considerada). O regime escolhido para cada cenário, é aquele que apresenta maior VET (fórmula de Faustmann). As figuras abaixo apresentam apenas dois exemplos, dentre os inúmeros estudos possíveis.

**Seleção de ciclos "ótimos" de acordo com o maior VET para venda da madeira em pé**

**Estrato 2 - E. grandis - Site 34**

Fluxo de Custos (R$/ha):

| | Reforma | | Manutenções | | | | | Pré-corte | | | | | | | Pré-corte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anos: | 0 | 1 | 2 | 3 | | ... | | Corte 1 | t+1 | t+2 | t+3 | | ... | | Corte 2 |
| | 1200 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 |

Coeficientes do Modelo

| 1a. Rotação | | 2a. Rotação | |
|---|---|---|---|
| $\beta$= | 10,850 | $\beta$= | 13,950 |
| $\alpha$= | 0,240 | $\alpha$= | 0,260 |
| $\theta$= | 2,810 | $\theta$= | 2,460 |

**Ciclos ótimos (duração em anos da 1a. e 2a. Rotações)**

| | Preços de venda da madeira em pé (R$/st) | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6% | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 |
| 7% | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>5 |
| 8% | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 7<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 |
| 9% | 7<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>6 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 | 6<br>5 |

Limpa Dados

Modelos

1-G32 2-G34

Nesse primeiro caso, foram escolhidas as curvas para o estrato 2 (Sítio 34), mais produtivo. A figura mostra apenas as quatro primeira taxas (6% a 9%), mas percebesse a tendência do ciclo economicamente ótimo ficar mais curso conforme preço e taxa de juros aumentam de um cenário para outro. Por exemplo, para investidores interessados em taxas de retorno de 9% a.a. que consigam vender a madeira a $25, o ciclo economicamente ótimo, segundo a fórmula do VET, recomendaria uma primeira rotação de seis anos e uma segunda de cinco anos; ao passo que investidores satisfeitos com 6% de retorno que vendam a madeira a $11, teriam que usar ciclos mais longos, 7 anos na primeira rotação e seis anos na segunda rotação.

**Seleção de ciclos "ótimos" de acordo com o maior VET para venda da madeira em pé**

**Estrato 4 - E. saligna - Site 24**

Fluxo de Custos (R$/ha):

| | Reforma | Manutenções | | | | | | Pré-corte | | | | | | | Pré-corte |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anos: | 0 | 1 | 2 | 3 | | ... | | Corte 1 | t+1 | t+2 | t+3 | | ... | | Corte 2 |
| | 1200 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 |

Coeficientes do Modelo

| | |
|---|---|
| 1a. Rotação | |
| $\beta=$ | 16,000 |
| $\alpha=$ | 0,180 |
| $\theta=$ | 2,200 |
| 2a. Rotação | |
| $\beta=$ | 15,130 |
| $\alpha=$ | 0,200 |
| $\theta=$ | 2,160 |

**Ciclos ótimos (duração em anos da 1a. e 2a. Rotações)**

| | Preços de venda da madeira em pé (R$/st) | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6% | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 |
| 7% | 8 | 8 | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 8% | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | 8 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 9% | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

Limpa Dados

Modelos

1-G32 2-G34

Para a analisarmos o efeito das curvas de crescimento, o segundo gráfico mostra os resultados para um sítio mais pobre (estrato 4, com Sítio 24). Nesse caso, investidores interessados em taxas de retorno de 9% a.a. e condições de vender a madeira a $25, teriam como ciclo economicamente ótimo aquele que tem primeira rotação de sete anos e uma segunda de seis anos; enquanto investidores satisfeitos com 6% de retorno preço de venda da madeira de $11, também teriam que usar ciclos mais longos, oito anos na primeira rotação e oito anos na segunda rotação.

**Agradecimento**

Agradeço ao Eng. Ftal. Lucas Ferreira que voluntariamente se ofereceu para a revisão da apostila e resolução de todos os exercícios propostos.

*Muito obrigado!*

*Luiz Carlos Estraviz Rodriguez*

*Junho de 2014*