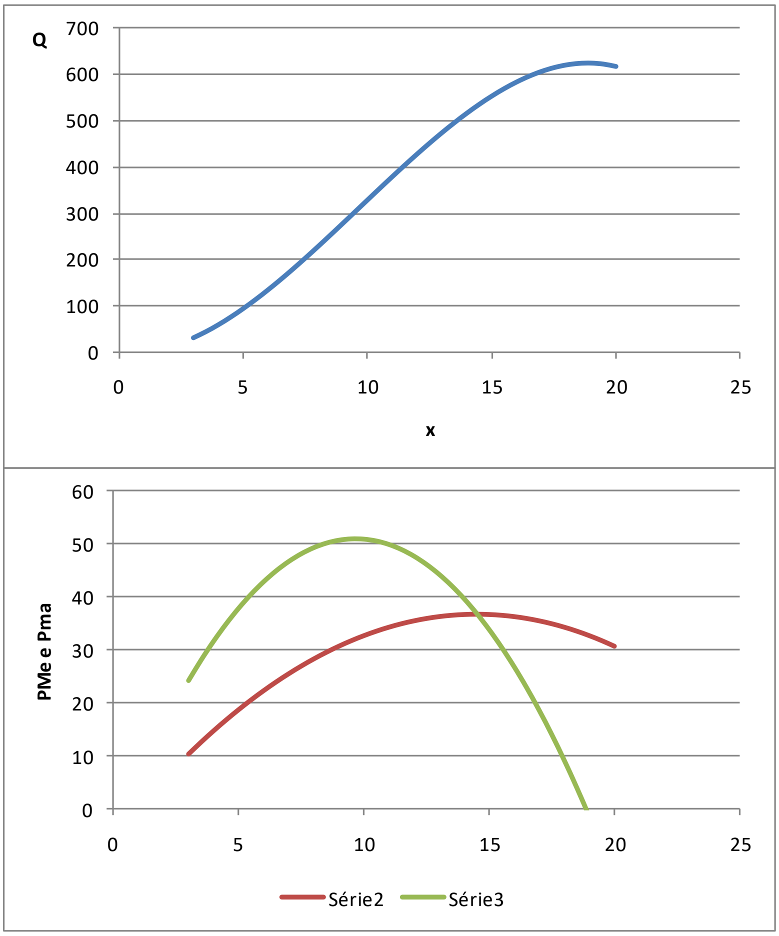
Teoria da Produção – Um Fator de Produção

1. Um produtor de cogumelo *shiitake* observou que a quantidade produzida desse cogumelo estava relacionada com a quantidade de toras de eucalipto utilizadas como substrato da seguinte forma:
   $Q = -0{,}2\,x^3 + 5{,}8\,x^2 - 5{,}2x$, onde Q representa Kg de *shiitake*, e x representa Kg de substrato.



a. Determine a quantidade de substrato necessária para maximizar a produção.
   Máxima Produção:
   $dQ/dx = 0$ → $-0{,}6\,x^2 + 11{,}6\,x - 5{,}2 = 0$
   Aplicando a fórmula de Bhaskara: $x' = 0{,}459182$ $x'' = 18{,}87415$

b. Determine a quantidade de substrato que resulta no máximo lucro (RT-CT).
   Definindo LUCRO = RT – CT = p . Q – (CF + s_x . x), onde:
   p = preço do shiitake = R$ 10,00/Kg
   s_x= custo do substrato =R$ 248/Kg
   temos para máximo LUCRO,
   $dL/dx = 0$ → $dQ/dx = s_x / p$ → $-0{,}6\,x^2 + 11{,}6\,x - 5{,}2 = 248{,}00 / 10$
   Aplicando a fórmula de Bhaskara: $x' = 3{,}075427$ $x'' = 16{,}25791$

2. A seguinte função polinomial do segundo grau representa o processo de transformação do insumo P_2O_5 em biomassa vegetal de certa folhosa, estimada com base em três níveis de adubação: q = 125,8 + 10,6 x – 2 x^2, onde q é produção de biomassa em toneladas por ha e x representa as doses de fósforo usadas na adubação, na forma P_2O_5. A variável x assume valores entre 0 e 3. Chamando de P as doses usadas no experimento e sendo k=50, temos que P = kx. Portanto, x=1 corresponde a uma dose de 50 Kg/ha de P_2O_5.

<u>Máxima Produção</u>

Pela condição de primeira ordem:

$$\frac{dq}{dx} = 0 \;\rightarrow\; 10{,}6 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x = 2{,}65 \;\rightarrow\; 132{,}5\, Kg\ de\ P_2O_5$$

Pela condição de segunda ordem:

$$\frac{d^2q}{dx^2} < 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2q}{dx^2} = -4 \;\rightarrow\; Ok$$

<u>Máximo Lucro</u>

$$LUCRO = \; 1{,}20\, q - CF - 8\, x$$

Pela condição de primeira ordem:

$$\frac{d\ LUCRO}{dx} = 0 \;\rightarrow\; 1{,}2\,(10{,}6 - 4x) = 8 \;\rightarrow\; x = 0{,}9833 \;\rightarrow\; 49{,}16\, Kg\ de\ P_2O_5$$

Teoria da Produção – Dois Fatores de Produção

3. A quantidade produzida por uma firma é função dos níveis de trabalho (L) e capital (K) empregados. A relação é conhecida (e foi ajustada a partir de uma equação do tipo Cobb-Douglas): $Q = 2{,}5\ K^{0,4}\ L^{0,6}$. Sabendo-se que o custo unitário do trabalho é uma vez e meia maior que o do capital (s_L / s_K = 1,5), e que a firma maximiza lucro (Lucro = Receita Total – Custo Total), que afirmação podemos fazer quanto às quantidades usadas dos fatores de produção L e K?

   Para máximo lucro:

$$\begin{cases} p\ PMa_L = & p\dfrac{\partial Q}{\partial L} = & p(1{,}5\ K^{0,4}L^{-0,4}) = p\left(1{,}5\ \dfrac{K^{0,4}}{L^{0,4}}\right) = s_L \\ p\ PMa_K = & p\dfrac{\partial Q}{\partial K} = & p(K^{-0,6}L^{0,6}) = p\left(\dfrac{L^{0,6}}{K^{0,6}}\right) = s_K \end{cases}$$

$$\frac{PMa_L}{PMa_K} = \frac{s_L}{s_K}$$

$$1{,}5\ \frac{K^{0,4}}{L^{0,4}}\frac{K^{0,6}}{L^{0,6}} = 1{,}5$$

$$1{,}5\ \frac{K}{L} = 1{,}5 \quad \therefore \quad K = L$$

4. Para o mesmo enunciado do problema anterior, considere $Q = 10\ x_1^{0,9}\ x_2^{0,1}$, sendo $s_1/s_2 = 1/9$

$$\begin{cases} p\ PMa_{x_1} = & p\dfrac{\partial Q}{\partial x_1} - s_1 = & 0 \\ p\ PMa_{x_2} = & p\dfrac{\partial Q}{\partial x_2} - s_2 = & 0 \end{cases}$$

$$\frac{PMa_{x_1}}{PMa_{x_2}} = \frac{1}{9}$$

$$9\ \frac{{x_2}^{0,1}}{{x_1}^{0,1}}\frac{{x_2}^{0,9}}{{x_1}^{0,9}} = \frac{1}{9}$$

$$81\ x_1 = x_2 \quad \therefore \ x_1 > x_2$$

5. Suponha que mudas produzidas a partir de micro-estacas respondam à quantidade de hormônio (H) de enraizamento e dias (D) na estufa de acordo com a seguinte função de produção

$$Q = 3{,}5 + 5{,}6\,\sqrt{H} + 56{,}8\sqrt{D} - 0{,}8\,\sqrt{HD} + \;4\,H$$

onde q = milheiros de mudas.

a) Determine a dose de hormônio e número de dias na estufa que ***maximizam a produção***

Para maximizar produção, precisamos de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial H} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial D} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} PMa_H = 0 \\ PMa_D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2{,}8}{\sqrt{H}} - \dfrac{0{,}4\sqrt{D}}{\sqrt{H}} + \;4 = 0 \\ \dfrac{28{,}4}{\sqrt{D}} - \dfrac{0{,}4\sqrt{H}}{\sqrt{D}} = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{H} = 71 \quad \therefore \quad \sqrt{D} = 717 \end{cases}$$

b) Determine a dose de hormônio e o número de dias na estufa que ***maximizam o LUCRO***, considerando que o Kg hormônio custa R$ 400, que cada dia na estufa custa R$ 200 e que o preço de venda do milheiro de mudas é igual a R$ 100.

Sendo *p* preço da muda, c_H o custo do Hormônio, c_D o custo da diária na estufa, *H* a quantidade de hormônio, e *D* a quantidade de dias na estufa, sabemos que para maximizar

Lucro = L = p.Q – c_H . H – c_D . D

precisamos de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial H} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial D} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p\dfrac{\partial Q}{\partial H} - c_H = 0 \\ p\dfrac{\partial Q}{\partial D} - c_D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} PMa_H = \dfrac{c_H}{p} \\ PMa_D = \dfrac{c_D}{p} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} PMa_H = \dfrac{400}{100} \\ PMa_D = \dfrac{200}{100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2{,}8}{\sqrt{H}} - \dfrac{0{,}4\sqrt{D}}{\sqrt{H}} = 0 \rightarrow \;\sqrt{D} = 7 \\ \dfrac{28{,}4}{\sqrt{D}} - \dfrac{0{,}4\sqrt{H}}{\sqrt{D}} = 2 \quad \therefore \quad \sqrt{H} = 36 \end{cases}$$

6. Suponha que a produção de mudas (Q) de uma espécie florestal responda à adubação com fósforo (P) e nitrogênio (N) da seguinte forma

$$Q = 1.052{,}3 + 17{,}2\,\sqrt{N} + 169{,}4\,\sqrt{P} + 2{,}6\,\sqrt{NP} - 3{,}4\,N - 11{,}9\,P$$

onde Q = mudas produzidas.

a) Determine as doses de N e P que ***maximizam a produção***

$$\begin{cases} PMa_N = \dfrac{\partial Q}{\partial N} = 0 \\ PMa_P = \dfrac{\partial Q}{\partial P} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8{,}6\,N^{-\frac{1}{2}} + 1{,}3\,N^{-\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}} - 3{,}4 = 0 \\ 84{,}7\,P^{-\frac{1}{2}} + 1{,}3\,N^{\frac{1}{2}}P^{-\frac{1}{2}} - 11{,}9 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N^{\frac{1}{2}} = \dfrac{8{,}6 + 1{,}3\,P^{\frac{1}{2}}}{3{,}4} \quad (1) \\ P^{\frac{1}{2}} = \dfrac{84{,}7 + 1{,}3\,N^{\frac{1}{2}}}{11{,}9} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)\ em\ (2)\!:\ 87{,}988 = 11{,}403\,P^{\frac{1}{2}} \rightarrow\ P = 59{,}54 \quad \therefore \quad N = 30{,}03$$

b) Determine as doses de N e P que ***maximizam o LUCRO***, considerando que as mudas são vendidas a R$ 0,05 por muda, e que os adubos custam R$ 0,30 / Kg de P e R$ 0,20 / Kg de N.

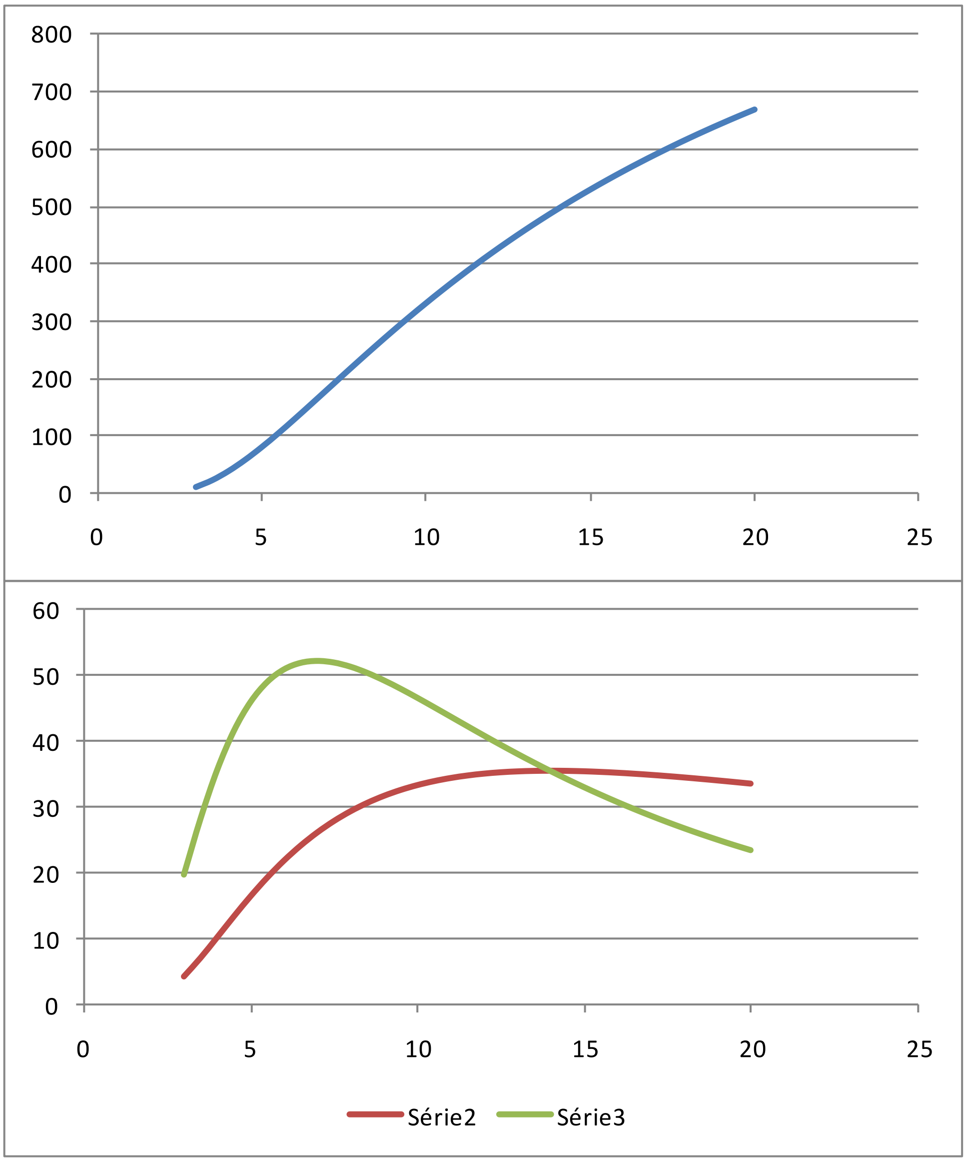
LUCRO = p . Q – (CF + s_P P + s_N N)

$$\begin{cases} PMa_P = \dfrac{\partial Q}{\partial P} = \dfrac{0{,}30}{0{,}05} \\ PMa_N = \dfrac{\partial Q}{\partial N} = \dfrac{0{,}20}{0{,}05} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P^{\frac{1}{2}}}\left(84{,}7 + 1{,}3N^{\frac{1}{2}}\right) - 11{,}9 = 6 \\ \dfrac{1}{N^{\frac{1}{2}}}\left(8{,}6 + 1{,}3P^{\frac{1}{2}}\right) - 3{,}4 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P^{\frac{1}{2}} = \dfrac{84{,}7 + 1{,}3N^{\frac{1}{2}}}{17{,}9} \quad (1) \\ N^{\frac{1}{2}} = \dfrac{8{,}6 + 1{,}3P^{\frac{1}{2}}}{7{,}4} \quad (2) \end{cases}$$

$$(2)\ em\ (1)\!:\ 86{,}211 = 17{,}672\,P^{\frac{1}{2}} \rightarrow\ P = 23{,}80 \quad \therefore \quad N = 4{,}08$$

***. Tentativa de usar ln(Q) = a $e^{(b\ 1/x)}$ como função de produção para o Problema 1:



Q= 1350 $e^{-14\ 1/x}$ lembrando que: y = e^u → y' = e^u u'

Q= 1350 $e^{-14\ 1/x}$ onde Q representa Kg de shiitake, e x representa Kg de substrato:

Máxima Produção:
dQ/dx = 0 → (1350 $e^{-14\ 1/x}$) 14 x^{-2}= 0 → 18900 x^{-2} $e^{-14\ 1/x}$ = 0 x → ∞

Máximo lucro, para shiitake valendo R$ 10,00/Kg, e substrato custando R$ 248/Kg:
dQ/dx = 248,00 / 10 → 18900 x^{-2} $e^{-14\ 1/x}$ = 24,8