

COPY 334
TANº 9818
25 folhas
M XIF

T-4

5. Aprendizagem da Matemática

Objectivos de aprendizagem

No final deste capítulo espera-se que:

- saiba discutir as perspectivas defendidas pelas diferentes teorias de aprendizagem;
- seja capaz de identificar diferenças significativas entre as perspectivas cognitivistas e as que identificam a aprendizagem como actividade social;
- saiba identificar características de uma aula como comunidade matemática;
- problematize o papel das concepções dos alunos sobre a Matemática e sobre a aprendizagem da Matemática;
- analise e discuta o papel que o erro pode ter na aprendizagem dos alunos.

Resumo

Este capítulo começa por fazer uma revisão de várias perspectivas teóricas sobre a aprendizagem. Começa por fazer uma breve referência às teorias comportamentalistas, passando de seguida a uma abordagem de diferentes perspectivas cognitivistas, designadamente as perspectivas de Piaget, Ausubel e Bruner. Discute, ainda, os aspectos socioculturais na aprendizagem, abordando vários aspectos da teoria de Vygotsky, nomeadamente a internalização e a zona de desenvolvimento proximal. Discute, também, a aprendizagem e o contexto sociocultural. Por fim, faz uma referência à aula como comunidade matemática e à influência das concepções na aprendizagem desta área disciplinar. O capítulo termina com uma análise do papel do erro na aprendizagem.

5.1 Introdução

Este capítulo começa por abordar diferentes perspectivas de aprendizagem, bem como o contributo de cada uma delas para o processo de ensino e aprendizagem. Refere, em primeiro lugar, a perspectiva comportamentalista. Depois, aborda a perspectiva cognitivista, considerando vários enfoques, nomeadamente os estádios de desenvolvimento cognitivo, a aprendizagem significativa e a aprendizagem pela descoberta. De seguida, refere-se à aprendizagem como actividade social, discutindo a função dos signos como mediadores da aprendizagem, a relação entre o nível de desenvolvimento real e potencial e a influência dos aspectos socioculturais na aprendizagem.

Esta abordagem é feita no pressuposto que uma teoria é útil na medida em que ajuda a compreender alguns aspectos do processo de aprendizagem, que podem ser relevantes nesta ou naquela situação. Dado o grande número de teorias, limitar-nos-emos a referir as que têm merecido mais atenção dos investigadores em educação matemática. Na sua prática, o professor pode apoiar-se numa, noutra ou em várias destas teorias, de acordo com os aspectos que pretende considerar na aprendizagem dos alunos.

5.2 A perspectiva comportamentalista

O comportamentalismo (ou behaviorismo¹) constitui uma importante corrente de investigação em Psicologia da Aprendizagem, particularmente activa na primeira metade do século XX. Esta corrente surgiu como reacção às teorias psicológicas anteriores, que se baseavam fortemente no processo de introspecção para estudar o pensamento humano com base naquilo que os indivíduos descreviam sobre a sua experiência.

O comportamentalismo teve origem no início deste século com os trabalhos de Watson², que considerava que eram os comportamentos e não a experiência consciente que deviam ser estudados e analisados. Rejeitava qualquer referência aos estados mentais internos e aos processos que não pudessem ser observados ou quantificados, em favor de comportamentos observáveis e mensuráveis.

Esta abordagem, de que são expoentes os trabalhos de Thorndike³ e Skinner⁴, assenta na noção que a aprendizagem se processa através da associação de ideias – ideia conhecida por associacionismo. Estes autores não rejeitavam a existência de estados mentais internos, mas consideravam que eles não são acessíveis ao investigador, nem há qualquer razão para supor que leis que

¹ O termo *behaviorismo* resulta da palavra inglesa *behaviour* que significa comportamento.

² John B. Watson (1878-1958) considerava que a aprendizagem envolvia a formação de padrões de resposta observáveis. As suas ideias moldaram e dirigiram a psicologia americana por um largo período.

³ Edward L. Thorndike (1874-1949) fez estudos experimentais em animais, nomeadamente em gatos, contribuindo para que a psicologia fosse considerada uma disciplina científica. Foi o primeiro psicólogo a realçar a importância da motivação na aprendizagem.

⁴ Burrhus F. Skinner (1904-1990) desenvolveu nos anos 50 a "máquina de ensino" que ficou conhecida como ensino programado.

governam o comportamento observável não governem também a actividade da mente.

O comportamentalismo baseia-se no facto que a aprendizagem resulta da relação que se estabelece entre um estímulo e uma resposta (E - R), embora nem sempre por esta ordem. Para Thorndike, a aprendizagem é uma associação entre um estímulo e uma resposta resultante das consequências de um acto. Se a sequência (E - R) for seguida de um acontecimento satisfatório, a associação é fortalecida, isto é, há aprendizagem. Para Skinner, a aprendizagem tem lugar quando a resposta é seguida de um estímulo reforçador, positivo ou negativo. Deste modo, tudo o que uma pessoa faz ou pode fazer no futuro é um resultado da sua história individual e única de reforços e punições.

Existem muitos aspectos da aprendizagem humana para os quais este modelo se revela adequado – aquisições de natureza simples como a aprendizagem de procedimentos e a memorização de factos. No entanto, como evidenciam numerosos críticos desta teoria, não é um bom modelo para considerar a aprendizagem de capacidades cognitivas mais complexas, atitudes e valores. Não se aprendem estas capacidades nem se formam atitudes reduzindo-as a elementos mais pequenos e treinando-os um por um. A aprendizagem de noções complexas e a adopção de atitudes e valores dependem das relações entre uma grande variedade de elementos (por isso são complexas) que só podem ser compreendidos no seu todo.

5.3 A perspectiva cognitivista

Os cognitivistas vêem a aprendizagem como uma reorganização de percepções. Muito do trabalho em teorias cognitivas tem por base os estudos de Piaget⁵.

⁵ Jean Piaget (1896-1980), é o fundador do laboratório de Epistemologia Genética, em Genebra, tendo dedicado a sua longa carreira a estudar o modo como as crianças aprendem nos mais diversos domínios.

5.3.1 Estádios de desenvolvimento

A teoria de Piaget é muitas vezes referida como a teoria dos estádios, uma vez que para este autor o processo de desenvolvimento faz-se através de estádios distintos. A identificação de diferentes estádios de desenvolvimento significa que tanto a natureza como a forma da inteligência mudam profundamente ao longo do tempo. A cognição é um processo activo e interactivo, isto é, um processo permanente de avanços e recuos em que a pessoa afecta o meio e o meio afecta a pessoa.

Piaget, após cuidadosas e detalhadas observações das crianças em contextos naturais, começou a encontrar sistemas consistentes dentro de certas faixas etárias, definindo assim quatro estádios principais (Quadro XII).

Quadro XII – Estádios de desenvolvimento cognitivo

<i>Idades</i>	<i>Estádios</i>
0 - 2	Sensório-motor
2 - 7	Intuitivo ou Pré-operatório
7 - 11	Operações concretas
11 - 16	Operações formais

(Sprinthall e Sprinthall, 1993, p. 102)

Cada estágio corresponde a um sistema de pensamento qualitativamente diferente do estágio anterior. Para Piaget é impossível saltar um estágio ou cortar caminho, isto é, os estágios de desenvolvimento cognitivo são sequenciais, seguindo uma sequência invariável. Esta progressão através de estágios é um dos aspectos da sua teoria que tem merecido a atenção de muitos investigadores. O Quadro XIII resume resultados de investigações recentes.

Quadro XIII – Síntese da investigação recente sobre os estágios

- A sequência da mudança de estágios ocorre pela ordem proposta por Piaget;
- Estudos transculturais confirmam essa sequência, embora o período de tempo que um dado estágio compreende possa variar;
- Os períodos de transição entre estágios são mais longos e mais flexíveis do que previsto e, desta forma, menos abruptos;
- Embora as características modais de cada estágio específico permaneçam como esquema dominante, elementos cognitivos de estágios anteriores e posteriores manifestam-se mais do que previsto.

(Sprinthall e Sprinthall, 1993, p. 103)

Na perspectiva de Piaget, o desenvolvimento cognitivo depende da acção, em qualquer dos estágios. Isto é, para aprender, a criança precisa de envolver-se em actividades adequadas.

Interessam-nos especialmente os estádios pré-operatório e operatório, na medida em que correspondem aos níveis etários das crianças do 1º ciclo. O estádio pré-operatório corresponde ao período que vai do desenvolvimento inicial da linguagem até ao ponto em que a criança aprende a manipular símbolos. Neste estádio a criança ainda não tem a **reversibilidade** do pensamento, isto é, não consegue perceber a ideia que quando a forma ou a localização de um objecto é alterada ele pode voltar à situação inicial. A aprendizagem processa-se de modo intuitivo, através de experiências de tentativa e erro. Assim, neste estádio a criança não pode perceber a ideia que a quantidade se conserva quando se divide um conjunto de coisas em subconjuntos, ou que a massa de um corpo se mantém quando se altera a sua forma.

O estádio das operações concretas é, ao contrário do anterior, um estádio operacional. As crianças são capazes de compreender que as quantidades não se alteram quando se muda a sua disposição ou a sua forma. De acordo com Piaget, as formas mais elementares de raciocínio baseiam-se neste princípio da invariância das quantidades.

5.3.2 *A aprendizagem na perspectiva piagetiana*

Para Piaget, os processos de pensamento dependem da capacidade de criar, manter e modificar representações internas de situações experimentadas no ambiente. Por exemplo, um recém-nascido parece reagir a tudo o que está dentro do seu universo de visão e não ser influenciado pelas pessoas e coisas fora desse universo. Contudo, pouco tempo depois, o bebé mostra, normalmente chorando, que sente a falta da mãe. Para ganhar consciência que a pessoa significativa está ausente, criou certamente alguma imagem na sua cabeça. Por este mecanismo, passa a distinguir os rostos familiares dos que não o são, que não correspondem às representações mentais das pessoas com que contacta habitualmente. Estas representações internas chamam-se esquemas e são construídas por padrões muito complexos envolvendo reconhecimento, compreensão, acção associada e reacção emocional. A aprendizagem pode definir-se, então, como a aquisição de novos esquemas e a sua modificação em resposta a novas necessidades.

O processo pelo qual os esquemas são mudados – adaptação – é composto por dois aspectos complementares, **assimilação** e **acomodação**. Perante uma nova experiência, a criança constrói uma representação interna ou uma imagem mental e os conteúdos da mente serão reorganizados para a encaixar nos conhecimentos que já possui. O processo mental segundo o qual uma

“ligação nova se integra num esquematismo anterior” designa-se por assimilação (Piaget e Inhelder, 1979, p. 13). O processo de modificação de um determinado esquema no sentido de responder a uma nova situação é a acomodação.

Na resposta a uma nova situação, a assimilação possibilita a utilização de um esquema já existente, enquanto que a acomodação modifica o próprio esquema, criando, a partir dele, um outro. Assim, a acomodação é um processo mais poderoso e mais versátil do que a assimilação, possibilitando uma maior capacidade de adaptação.

O mecanismo de mudança designa-se por equilibração. Quando uma criança começa a compreender – por exemplo, um conceito –, alguns dos atributos importantes que influenciam essa compreensão vão adquirindo o padrão relativamente estável e equilibrado de um esquema. Isto significa que as suas interligações são estáveis e padrões específicos de acção estão-lhes associados. Quando as representações internas já adquiriram equilíbrio a criança passa a ter alguma facilidade com situações problemáticas.

Por causa da complexidade do meio ambiente, dificilmente um esquema inclui todos os seus aspectos. Haverá situações em que uma acção realizada com base num esquema se mostra inadequada, por uma ou por outra razão. Isto pode conduzir a um estado de incerteza ou desequilíbrio, com os novos elementos a desestabilizar o padrão de compreensão. A pessoa confronta-se, assim, com a necessidade de construir um novo esquema, o que é característico de uma nova etapa no processo de aprendizagem.

No entanto, existem muitas ocasiões em que os nossos esquemas não se revelam adequados mas, apesar disso, resistimos a criar novos esquemas. Assim, perante uma situação nova, a criança pode escolher entre modificar o esquema, ignorar a informação ou mesmo viver sem resolver o conflito.

Para que a reestruturação do esquema tenha lugar, a criança deve manter-se activa. É através da acção que a criança constrói esquemas de interpretação e actuação sobre o real. Esses esquemas vão evoluindo e dando origem a novos esquemas mediante mecanismos de assimilação e acomodação, que lhe permitem passar de um patamar de equilíbrio para um outro mais complexo e mais perfeito, numa constante adaptação do organismo ao seu ambiente.

A actividade simbólica surge, assim, como interiorização da actividade exterior da criança. O conhecimento, nomeadamente o conhecimento matemático é construído a partir da actividade do indivíduo. Se uma transformação cognitiva genuína tem lugar, ocorre aprendizagem. Um aspecto crucial deste modelo de aprendizagem é a ênfase no que a criança já sabe.

Piaget refere ainda duas formas diferentes de criação de conhecimento: a abstracção simples e a abstracção reflexiva. Na primeira, a criança abstrai as propriedades observáveis dos objectos, por exemplo a cor, a textura, etc., o que lhe permite construir o conhecimento do mundo físico. Através da abstracção reflexiva, a criança estabelece relações entre objectos ou acontecimentos – por exemplo, conclui que dois objectos têm a mesma cor ou que dois conjuntos têm o mesmo número de objectos – construindo assim o conhecimento lógico-matemático.

Embora distintas, as duas formas de abstracção estão interligadas, uma vez que uma não pode existir sem a outra. A própria abstracção física pressupõe um sistema de referência lógico-matemático. Por exemplo, para uma criança observar que um dado objecto é amarelo, necessita de ter um sistema de classificação que lhe permite distinguir o amarelo das outras cores. Por outro lado, as estruturas lógico-matemáticas começam a construir-se a partir das características observáveis dos objectos, tornando-se progressivamente autónomas em relação a estes.

5.3.3 *Aprendizagem significativa*

Para Ausubel⁶ (Ausubel, Novak e Hanesian, 1978) a essência da aprendizagem significativa reside no facto que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas com as informações previamente adquiridas pelos alunos através de uma relação não arbitrária e substantiva. Isto é, as ideias são relacionadas com algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição.

Este autor⁷ distingue aprendizagem por recepção de aprendizagem por descoberta e distingue aprendizagem automática (por memorização) da aprendizagem significativa. Na aprendizagem por recepção todo o conteúdo que se quer que o aluno aprenda é apresentado na sua forma final. O aluno não tem de fazer nenhuma descoberta independente, mas tem de incorporar o material que lhe é apresentado, de forma a ficar acessível em ocasiões futuras. Se a aprendizagem é significativa, a matéria ou tarefa potencialmente significativa é compreendida ou tornada significativa durante o processo de internalização. No caso da aprendizagem por recepção automática a tarefa de aprendizagem não é potencialmente significativa, nem se torna significativa.

A aprendizagem significativa e automática são qualitativamente descontínuas, em termos de processos psicológicos subjacentes a cada uma, e portanto não podem estar situadas em pólos opostos do mesmo contínuo (ver Figura 8).

⁶ David Ausubel fez várias investigações sobre os processos de estruturar a aprendizagem e concluiu que é mais fácil aprender se a informação for organizada e sequenciada de uma forma lógica.

⁷ Pode aprofundar as ideias de Ausubel sobre a aprendizagem em Ausubel, Novak e Hanesian (1978).

Alguns tipos de aprendizagem, como a aprendizagem das representações ou a aprendizagem de nomes de objectos, conceitos ou eventos, compartilham propriedades dos dois tipos. Na realização de uma única tarefa podem ocorrer os dois tipos de aprendizagem.

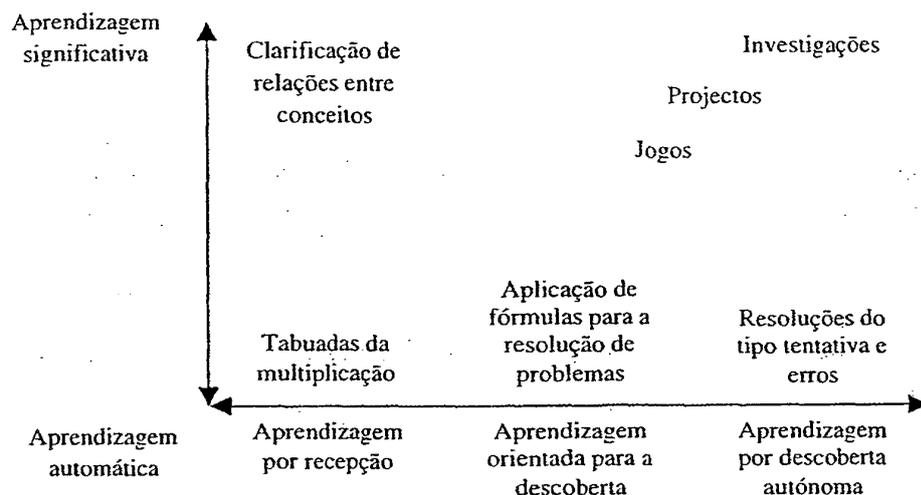


Figura 8 - Dimensões da aprendizagem recepção/descoberta e automática/significativa (adaptado de Ausubel, Novak e Hanesian, 1978).

A característica essencial da aprendizagem por descoberta é que o conteúdo principal daquilo que vai ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto pelo aluno antes de poder ser significativamente incorporado na estrutura cognitiva. Na primeira parte da aprendizagem por descoberta o aluno deve reagrupar informações, integrá-las na sua estrutura cognitiva e reorganizar e transformar a combinação integrada, de tal forma que origina o produto final que se pretende ou a descoberta de uma relação entre meios e fins. No final, o conteúdo descoberto torna-se significativo, da mesma forma que o conteúdo apresentado se torna significativo na aprendizagem por recepção.

Ainda segundo Ausubel, para haver aprendizagem significativa é necessário que:

- o aluno manifeste disposição para, isto é, disposição para relacionar de forma não arbitrária e substantiva o novo material com a sua estrutura cognitiva;

- o material aprendido seja potencialmente significativo, isto é, incorporável à sua estrutura de conhecimento através de uma relação não arbitrária e não literal.

Assim, se o aluno não estiver disposto a aprender de uma forma significativa uma dada proposição, mas sim a memorizá-la, tanto o produto como o processo de aprendizagem serão automáticos. Inversamente, o aluno pode estar disponível para realizar uma aprendizagem significativa, mas ela não acontecerá se a tarefa de aprendizagem não for potencialmente significativa – se não puder ser incorporada à sua estrutura cognitiva através de uma relação não arbitrária e substantiva. Por exemplo, um aluno pode memorizar o algoritmo da adição com transporte, mas só o poderá aprender significativamente se previamente souber o significado de número e conhecer o sistema de numeração de posição. Por outro lado, todos os professores se recordam de um aluno que tenta a todo o custo memorizar um algoritmo porque, para ele, em Matemática não vale a pena tentar compreender. Isto pode acontecer devido à concepção que os alunos têm da Matemática e à falta de confiança nas suas capacidades para a aprender de modo significativo.

A aprendizagem significativa envolve a aquisição de novos significados. Os novos significados, por sua vez, são produtos da aprendizagem significativa. Isto é, a emergência de novos significados no aluno reflecte que se realizou um processo de aprendizagem significativa.

Para Ausubel existem três tipos de aprendizagem significativa: a aprendizagem representacional, a aprendizagem de conceitos e a aprendizagem proposicional. A aprendizagem representacional refere-se ao significado de palavras ou símbolos unitários e a aprendizagem proposicional diz respeito ao significado de ideias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou frases. Na aprendizagem de conceitos, os atributos essenciais do novo conceito são incorporados pela estrutura cognitiva, resultando num novo significado genérico, mas unitário. Na aprendizagem proposicional, uma nova proposição é incorporada pela estrutura cognitiva para formar uma outra estrutura significativa.

A aprendizagem de conceitos e a aprendizagem proposicional são ambas diferentes da aprendizagem representacional. No entanto, a formação de conceitos é geralmente acompanhada por uma forma de aprendizagem representacional na qual o novo conceito adquirido tem o mesmo significado que o significante que o representa. Por exemplo, aprender o conceito de número três, é normalmente associado à aprendizagem do algarismo 3, como uma forma de representar aquele número. Ou, quando a criança aprende pela primeira vez o significado da palavra 'cão', o objectivo é que o som da palavra (que é potencialmente significativa, mas que ainda não tem significado para

a criança) presente ou seja equivalente a um objecto cão particular que está a ser percebido naquele momento e portanto, significa a mesma coisa (uma imagem desse objecto cão) que o objecto propriamente dito.

Um aspecto central do trabalho de Ausubel é que o ensino deve especificar como as principais ideias estão interligadas e relacionadas com o que os alunos já sabem.

5.3.4 *Aprendizagem pela descoberta*

Para Bruner⁸, a aquisição do conhecimento faz-se a partir de problemas que se levantam, expectativas que se criam, hipóteses que se formulam e verificam, descobertas que se fazem. O ensino pela descoberta pressupõe actividades de investigação, observação e exploração, análise de problemas e resultados, integração de novos dados em conceitos já adquiridos, explicações de causa e efeito ou outras que ajudem a estabelecer relações (Tavares e Alarcão, 1995). Bruner argumenta que ao descobrir relações críticas pela resolução de problemas, os próprios alunos constroem conexões de forma que o conhecimento relevante se torna disponível para a resolução de problemas.

Bruner realça a importância da intuição na aprendizagem e considera que a aprendizagem correcta em condições ideais leva ao “aprender a aprender”. Para ele, a aprendizagem na escola tem como objectivo último promover “a compreensão geral da estrutura de uma determinada matéria” (1998, p. 31). Nesta perspectiva, o professor deve ajudar a criar condições de modo que o aluno se possa aperceber da estrutura de um determinado assunto:

Aprender a estrutura de uma disciplina é compreendê-la de um modo que permita que muitas outras coisas com ela significativamente se relacionem. Por outras palavras, conhecer uma estrutura é saber como as coisas se ligam entre si (Bruner, 1998, p. 32).

Bruner considera a sua teoria como uma teoria de educação, no sentido em que uma teoria da aprendizagem é descritiva, enquanto a sua é prescritiva, isto é, diz ao professor como é que um assunto pode ser bem ensinado⁹. Esta teoria tem quatro elementos fundamentais: motivação, estrutura, sequência e reforço.

O primeiro elemento tem a ver com a **motivação**, ou seja com as experiências que devem ser proporcionadas às crianças de modo que elas desenvolvam uma disposição para aprender. Bruner refere sobretudo a motivação intrínseca. Não põe de parte o reforço, mas para ele a motivação externa tem um efeito transitório, podendo ser importante sobretudo para iniciar a acção. A

⁸ Jerome Bruner, nascido em 1915, é um dos mais conhecidos psicólogos americanos da actualidade, com vasta obra sobre a aprendizagem e a cognição.

⁹ Ver Jerome Bruner (1999, p. 61).

curiosidade é um dos melhores exemplos de motivação intrínseca, como resposta à incerteza e à ambiguidade. Outro exemplo é o impulso para adquirir competência. As crianças interessam-se por aquilo em que são competentes. Outro aspecto, ainda, é a reciprocidade, isto é, a necessidade de trabalhar cooperativamente com os outros e, para este autor, a sociedade desenvolveu-se como resultado desta motivação básica.

Na perspectiva de Bruner as motivações intrínsecas são autosuficientes e a questão que se coloca é a de saber como os professores podem tirar partido delas na sala de aula. Ele considera que os professores devem facilitar e regular a exploração de alternativas pelos seus alunos através, por exemplo, da resolução de problemas. A exploração de alternativas envolve três fases: a activação, manutenção e direcção. A activação envolve um certo grau de incerteza no início da tarefa para que as crianças a possam iniciar. A tarefa não pode ser nem demasiado difícil nem demasiado fácil. O professor deve dar aos alunos problemas com um grau de dificuldade ajustado de modo a que a motivação intrínseca que resulta da curiosidade da criança possa, por si só, activar a exploração. A manutenção consiste em assegurar à criança que a exploração não constitui uma experiência perigosa ou frustrante, isto é, que as vantagens da exploração são maiores que os riscos. A direcção implica que as crianças conheçam o objectivo da tarefa e se falta muito ou pouco para o atingir.

O segundo elemento da teoria de Bruner é a **estrutura**, isto é, qualquer assunto ou tema, qualquer corpo de conhecimentos, pode ser organizado de forma óptima para poder ser transmitido e compreendido por todos os alunos. A estrutura de qualquer domínio de conhecimento pode ser caracterizada de três formas: a forma de representação, a economia e o poder efectivo.

Todo o domínio de conhecimentos (ou qualquer problema dentro desse domínio) pode ser representado por três formas: por um conjunto de acções apropriadas para obter determinado resultado (representação activa); por um conjunto de imagens resumidas ou gráficos que representam conceitos, sem os definir completamente (representação icónica); ou por um conjunto de proposições, lógicas ou simbólicas, derivado de um sistema simbólico redigido por normas ou leis para formar ou transformar proposições (representação simbólica) (Bruner, 1999, p. 66).

Em Matemática, as três formas de representação são importantes e devem ser usadas¹⁰. Ao professor cabe escolher a representação adequada em cada caso.

A economia na representação de um domínio de conhecimentos está relacionada com a quantidade de informação que o aluno tem de conservar na mente e processar para que possa compreender esse domínio. Quantos mais dados tem que armazenar para entender alguma coisa ou enfrentar um

¹⁰ Recordar o que se disse no ponto 3.2.1 do Capítulo 3 sobre representações matemáticas.

problema, mais passos tem de dar para processar os dados ou para chegar a uma conclusão e menor será a economia.

O poder efectivo de determinada forma de estruturar um domínio de conhecimentos, para determinado aluno, refere-se ao valor criativo do conjunto de proposições aprendidas. Uma representação poderosa é uma representação simples que é facilmente compreendida e que permite aos alunos encontrar relações entre factos que à partida parecem sem relação aparente, o que para Bruner é particularmente importante na Matemática.

Para este autor, a **sequência** como determinado material é apresentado aos alunos influencia a facilidade da sua compreensão, e constitui o terceiro elemento da sua teoria. Pode haver sequências diferentes que tenham um grau de dificuldade ou facilidade equivalente para os alunos mas não há uma sequência ideal para todos. Ele acredita que o processo normal passa da representação activa para a icónica e depois para a simbólica e portanto a sequência óptima seria na mesma direcção. No entanto, algumas crianças, devido ao seu desenvolvimento e experiências anteriores, têm o sistema simbólico bem desenvolvido e podem saltar as duas primeiras etapas.

O quarto elemento da teoria de Bruner é o **reforço** que é necessário para a aprendizagem. Isto é, para se atingir a mestria num problema, é necessário receber *feedback* sobre o que se está a fazer. Esse reforço deve ser dado na altura certa e de uma forma compreensível para o aluno.

Para Bruner a aprendizagem de uma matéria inclui três processos quase simultâneos: a aquisição de nova informação; a transformação, isto é, a manipulação do conhecimento para o adaptar a novas tarefas; e a avaliação, para verificar se a maneira como a informação foi manipulada se adequa à tarefa proposta.

5.4 A perspectiva sociocultural

Até aqui temo-nos referido ao fenómeno da aprendizagem centrando a nossa atenção no indivíduo. Mas muita aprendizagem ocorre em contextos envolvendo outras pessoas, sejam a família, professores, amigos ou colegas. A aprendizagem é um conjunto complexo de processos fortemente influenciados pelos contextos onde tem lugar. A perspectiva piagetiana segundo a qual a cultura tinha apenas um papel secundário, podendo acelerar ou retardar o desenvolvimento dos estádios, foi abalada pela realização de investigações em diferentes culturas. Hoje o conceito de cultura é central nas investigações que se realizam sobre aprendizagem.

5.4.1 A aprendizagem mediada e a utilização de signos

¹¹ Lev Vygotsky (1896 - 1934) é um psicólogo que criou uma importante escola de investigação na União Soviética, mas cuja obra só começou a ser conhecida nos países ocidentais muitos anos após a sua morte.

Para Vygotsky¹¹, a mediação é um processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, que deixa assim de ser directa e passa a ser mediada por esse elemento. O processo simples de estímulo-resposta é substituído por um acto complexo, mediado (Oliveira, 1993), representado na Figura 9.

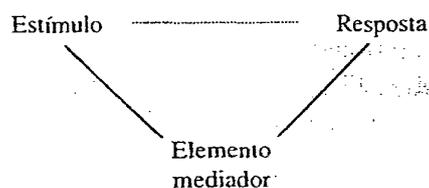


Figura 9 - Elementos mediadores no processo de aprendizagem

¹² Signos são elementos que representam ou designam objectos, acontecimentos ou situações. A palavra 'mesa' é o signo que representa o objecto mesa; o símbolo '3' é um signo para a quantidade três.

Vygotsky distinguiu dois tipos de elementos mediadores – os instrumentos e os signos¹². O instrumento é feito com um dado objectivo. É, pois, um objecto social mediador da relação entre o indivíduo e o mundo – por exemplo, usamos um escadote para alcançar um objecto num sítio alto. O signo surge para facilitar a comunicação entre seres humanos. É um objecto social que medeia a relação entre os indivíduos.

Para este autor, a invenção e uso de signos como meios auxiliares para resolver um dado problema (por exemplo, lembrar ou comparar coisas) é análoga à invenção e uso de instrumentos. O signo age como um instrumento da actividade psicológica de maneira análoga ao papel do instrumento no trabalho. Mas, enquanto os instrumentos são elementos externos ao indivíduo e a sua função é provocar mudanças nos objectos ou controlar fenómenos da natureza, os signos são orientados para dentro do indivíduo – dirigem-se ao controle de acções psicológicas do próprio indivíduo ou de outras pessoas. Pode-se dizer que os signos são ferramentas que intervêm nos processos psicológicos e não nas acções concretas como os instrumentos.

Existem inúmeras situações em que os signos são um auxiliar precioso para a nossa actividade. Por exemplo, utilizar um mapa para encontrar determinado local, fazer um desenho para nos orientar na construção de um dado objecto, listar por escrito o que temos de fazer, são alguns exemplos de signos que apoiam as nossas possibilidades de armazenamento de informação. Os processos mentais superiores que caracterizam o pensamento humano – acções conscientemente controladas, atenção voluntária, memorização activa,

pensamento abstracto, comportamento intencional – são todos eles mediados por sistemas simbólicos.

No decurso do desenvolvimento de cada indivíduo ocorrem mudanças fundamentais dos signos. Por um lado, começa por usar-se marcas externas (marcas nos anéis, registos em papel...) e estas transformam-se em processos internos de mediação. A este mecanismo Vygotsky chama o processo de internalização. Por outro lado, desenvolvem-se sistemas simbólicos, que organizam os signos em estruturas complexas e articuladas.

Os signos internalizados são, tal como as marcas exteriores, elementos que representam objectos, acontecimentos ou situações. Por exemplo, a ideia de mãe permite lidar mentalmente com ela sem estar presente. Esta capacidade de lidar com representações que substituem o próprio real possibilita ao homem libertar-se do espaço e do tempo presentes, estabelecer relações mentais na ausência das próprias coisas, imaginar, fazer planos e ter intenções.

5.4.2 *A aprendizagem e o nível de desenvolvimento proximal*

Para Vygotsky, os sistemas de representação da realidade são socialmente dados. É o grupo cultural onde o indivíduo se desenvolve que lhe fornece formas de perceber e organizar o real, ou seja, os instrumentos psicológicos que estabelecem a mediação entre ele e o mundo. Além disso, o indivíduo internaliza a matéria prima fornecida pela cultura não por absorção passiva mas por transformação e síntese.

Normalmente, quando nos referimos ao desenvolvimento de uma criança, estamos interessados no que ela consegue fazer. Para isso, observamo-la a realizar várias tarefas e quando dizemos que já sabe fazer, referimo-nos ao que ela sabe fazer sozinha. Por exemplo, é capaz de construir uma torre com cinco cubos. Esta capacidade de realizar tarefas de forma independente é designada por Vygotsky por nível de desenvolvimento real. Mas, na sua perspectiva, para compreender adequadamente o desenvolvimento devemos considerar, para além deste nível, também o nível de desenvolvimento potencial, isto é, a sua capacidade para realizar tarefas com a ajuda de adultos ou de colegas mais capazes. Por exemplo, no caso da construção da torre de cubos, se o professor der algumas sugestões (por exemplo, “coloca primeiro o cubo maior”) ou se ela observar outro aluno mais velho a fazê-la, é provável que o seu desempenho nesta tarefa seja melhor do que se a tentar fazer sozinha.

Esta possibilidade de alteração no desempenho de uma pessoa por interferência de outra é um aspecto central na teoria de Vygotsky. Primeiro,

porque representa de facto um momento de desenvolvimento, isto é, não é qualquer pessoa que, ajudada por outro, desempenha qualquer tarefa – a colaboração só resulta em benefício num certo nível de desenvolvimento. Por exemplo, uma criança de cinco anos é capaz de fazer uma torre de cubos sozinha, com três pode conseguir fazê-la com ajuda, mas com um ano não faz, nem mesmo com ajuda. Em segundo lugar, essa ideia é fundamental pois Vygotsky atribui muita importância à interacção social. O desenvolvimento individual dá-se num ambiente social determinado.

É a partir destes dois níveis – real e potencial – que Vygotsky define a **zona de desenvolvimento proximal** como a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da resolução independente de problemas e o nível de desenvolvimento potencial determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com colegas mais capazes.

Para este autor, cada estágio de desenvolvimento do aluno é caracterizado pelos níveis de desenvolvimento real e potencial. Uma característica essencial da aprendizagem na escola é que cria uma zona de desenvolvimento proximal. Isto é, o aluno com o apoio do professor ou de um colega mais experiente, trabalhando dentro da sua esfera de competências, consegue ter um desempenho de ordem superior, progredindo no seu desenvolvimento.

Numa perspectiva vygostiana, podemos dizer que o que tem de ser aprendido é determinado pela actividade conjunta do professor e alunos e essa actividade inclui as características do conteúdo da tarefa específica e a qualidade da interacção. Os alunos devem ser confrontados com desafios e problemas no nível seguinte da aprendizagem intencional e não devem ficar agarrados ao treino ou à prática de problemas ligados ao seu nível real de realização. Só assim a aprendizagem contribui verdadeiramente para o desenvolvimento da criança. Nesta linha, a aprendizagem tem lugar através de actividade mediada por outras pessoas – o professor, os pais, os colegas de grupo, etc. – e, muitas vezes, através de actividade mediada pelo grupo em que o aluno se integra.

Assim, ensinar e aprender estão ligados por um domínio pessoal e social de vida e de acção e há uma relação complementar entre os aspectos sociais e pessoais da aprendizagem. Se o aluno realiza individualmente uma tarefa, ele apenas tem a sua relação pessoal com a tarefa e com o professor. Se um grupo de alunos está a realizar uma tarefa, existem relações mútuas entre os membros do grupo. As condições de aprendizagem têm características diferentes, o que obriga a planificações diferentes por parte do professor para cada um dos casos. Daí algumas tarefas serem mais adequadas para actividades individuais e outras para actividades de grupo¹³.

¹³ Ver a secção 6.2 sobre tarefa e actividade e o ponto 6.4.3 sobre modos de trabalho dos alunos.

5.4.3 *A aprendizagem e o contexto sociocultural*

Até há pouco tempo a Matemática era considerada uma disciplina independente do contexto socio cultural. Como ciência da precisão e do rigor, nada tinha a ver com contextos sociais e políticos, sendo portanto imune a quaisquer factores que não os da sua própria dinâmica interna. Esperava-se que a criança que aprendia um conceito matemático na escola estivesse apta a aplicá-lo em diversos contextos, uma vez que os princípios lógicos envolvidos são sempre os mesmos. A facilidade ou a dificuldade na aprendizagem da Matemática de cada aluno era atribuída às suas estruturas cognitivas. Esta abordagem foi aceite enquanto a investigação se baseou em situações de laboratório com crianças escolarizadas. Quando a investigação começou a considerar a aprendizagem em contextos socioculturais diversificados, a Matemática passou a ser vista como uma forma de saber ligada e dependente desses contextos (Abreu, 1996).

Quando os investigadores começaram a tentar perceber o uso e a aprendizagem da Matemática em contextos extra-escolares ficaram surpreendidos ao verificarem que as crianças com dificuldades na Matemática escolar eram extremamente competentes a usar Matemática noutras práticas do dia a dia (Carraher, Carraher e Schliemann, 1988). Como a abordagem de Piaget não ajudava a compreender esta situação, surgiu o impulso para o desenvolvimento da abordagem sociocultural da cognição:

O conhecimento matemático passou a ser conceptualizado em termos de sistemas de representação de natureza cultural¹⁴ e os estudos da cognição centrados no entendimento da forma como cada sistema específico mediava a cognição humana (Abreu, 1996, p. 8).

As ideias escolhidas para explicar a variação do desempenho da mesma pessoa entre os diversos contextos foram os de cognição situada e aprendizagem situada (Lave, 1988). Nesta perspectiva, o saber matemático é entendido como representação cultural.

Uma abordagem alternativa é encarar a aprendizagem da Matemática como processo de construção de identidades sociais. Neste caso o saber matemático é entendido em termos de representações sociais. Existem na sociedade em que vivemos representações sociais que são inquestionáveis, mas outras variam de acordo com o grupo social. Por exemplo, ninguém põe em causa que os números e as operações aritméticas fazem parte da Matemática. No entanto, a representação social da Matemática não é a mesma para um professor de Matemática, um adulto com pouca escolaridade ou um aluno do 1º ciclo.

¹⁴ Representar, que discutimos no Capítulo 2 como processo matemático, refere-se à capacidade humana de organizar e comunicar o seu saber com o uso de sistemas simbólicos (Abreu, 1995).

Na perspectiva sociocultural, o conceito de mediação na construção do conhecimento é alargado e “o indivíduo ao internalizar um instrumento que lhe permite representar ideias, como por exemplo, internalizar um sistema de representação numérica, também internaliza conhecimento sobre as reacções do grupo social ao uso desse instrumento” (Abreu, 1995, p. 35).

Estas duas componentes são indissociáveis. Por exemplo, em muitas salas de aula do 1º ciclo ainda é normal haver alunos a contar pelos dedos escondendo as mãos debaixo da carteira para o professor não ver. O ‘contar pelos dedos’ é usado como mediador, mas a mediação não é apenas cognitiva, porque se o fosse ele não precisava de esconder a mão. No entanto, quando os professores deixam usar os dedos, os alunos usam-nos normalmente na contagem e não escondem a mão.

Podemos encarar a cognição humana como mediada não só pelos sistemas de representação cultural (de acordo com Vygotsky), mas também pelas identidades sociais. Deste modo, tanto o acto de ensinar como o acto de aprender, envolvem aspectos sociais, cognitivos e afectivos. Assim, como sugere Abreu (1995), o professor estabelece as formas de saber aceites ou não na escola, em função:

- do que considera saber no contexto da aula de Matemática e pelo grupo de que faz parte (representação social);
- da avaliação da sua posição em relação às representações sociais (identidade social).

Por sua vez, o aluno desenvolve a sua construção do saber matemático escolar em termos de:

- ganhos ou dificuldades de nível cognitivo;
- avaliação da sua posição no grupo turma e em outros grupos dentro e fora da escola (identidade social).

5.4.4 *A aula como comunidade matemática*

Para Schoenfeld (1994), a Matemática é uma actividade inerentemente social na qual uma comunidade de práticos (os matemáticos) se envolvem na ciência dos padrões – tentativas sistemáticas, baseadas em observação, estudo e experimentação, para determinar a natureza ou princípios de regularidade em sistemas definidos axiomáticamente ou teoricamente (‘matemática pura’ ou modelos de sistemas abstraídos de objectos do mundo real (‘matemática

aplicada'). Assim, fazer Matemática implica existir uma comunidade – comunidade matemática – que constrói novas ideias através da interação e da colaboração.

De modo semelhante, podemos olhar para as aulas de Matemática do 1º ciclo como pequenas comunidades matemáticas, no sentido em que os alunos realizam os mais diversos tipos de tarefas, discutem os processos de resolução, assim como os resultados obtidos e validam os seus próprios resultados. Para que as crianças se envolvam em actividade matemática

... os professores têm de criar um ambiente que encoraje as crianças a explorar, desenvolver, testar, discutir e aplicar ideias. Têm de ouvir as crianças atentamente e guiar o desenvolvimento das suas ideias. Têm de usar, frequentemente, materiais manipuláveis em actividades que impliquem o raciocínio de forma a fomentar a aprendizagem de ideias matemáticas (NCTM, 1991, p. 22).

Na sala de aula, como comunidade matemática, existem normas de carácter social que todos devem ter em conta. Cobb e outros (1992) referem a existência de cinco tipos de normas numa sala de aula: regulamentares, convencionais, morais, de verdade e de ensino.

As normas regulamentares são estabelecidas por uma autoridade específica que as pode alterar. Quem não cumprir as regras é penalizado de algum modo. Por exemplo, o professor pode estabelecer a norma de que só o porta-voz de cada grupo é que pode levantar-se para ir buscar os materiais.

As convenções não têm uma fonte especificada e a consequência de as transgredir é a não aprovação social. A distinção entre normas regulamentares e convenções é do tipo da que existe entre leis e costumes. Por exemplo, na aula tradicional é suposto que o aluno responda às perguntas do professor e que o professor avalie essas respostas.

Ao contrário das normas regulamentares e das convenções, as normas classificadas como morais, de verdade ou de ensino não são consideradas históricas pelos membros da comunidade. A consequência de transgredir uma norma moral é a culpabilidade moral. Por exemplo, os alunos não devem copiar e o professor pode fazer com que os alunos não se sintam confortáveis quando copiam. É isto que distingue o transgredir uma norma moral de uma verdade ou norma de ensino. A consequência de transgredir uma verdade é o errar, enquanto o facto de transgredir uma norma de ensino é a ineficácia.

Nas interacções que têm lugar numa aula de Matemática, estes autores distinguem situações de justificação de situações de explicação. As primeiras surgem na negociação dos significados e das práticas. Os alunos têm de justificar aos colegas do grupo ou ao professor o desenvolvimento de

determinada actividade. Nas situações de explicação, a legitimidade da actividade matemática não está em causa. O professor e os alunos dão explicações para tentar clarificar aspectos do seu pensamento matemático que pensam não estar claros para os outros ou em resposta a um pedido explícito.

Uma situação de explicação ou de justificação pode ocorrer quando os alunos resolvem uma dada tarefa, explicam as suas interpretações, validam o que explicitaram ou discutem a legitimidade de construções matemáticas particulares.

5.5 As concepções dos alunos e a aprendizagem da Matemática

As concepções que o professor tem da Matemática influenciam fortemente o seu ensino:

Se a concepção que temos da Matemática é a de uma disciplina dinâmica que ganha sentido através da dialéctica que se estabelece entre o conjecturar e o argumentar, então o ambiente de aprendizagem que proporcionamos aos nossos alunos deve envolvê-los na actividade matemática. Este ambiente deve encorajar as crianças a explicar, desenvolver, testar, discutir e aplicar ideias (NCTM, 1991).

Por outro lado, também as concepções que os alunos têm da Matemática e do seu papel como alunos têm uma forte influência na aprendizagem. Quando os alunos consideram a Matemática como a ciência do certo e do errado, aquilo que conta é fazer as coisas rapidamente para obter a resposta certa. Quando sentem dificuldades ficam à espera que o professor lhes diga o que têm de fazer. Ainda é habitual nas aulas de Matemática, perante a leitura do enunciado de um problema, os alunos perguntarem: "É de mais ou é de menos?" – esperando que o professor confirme uma das operações para rapidamente fazerem os cálculos e obterem a tal resposta certa sem ter de pensar com atenção no problema.

Pelo contrário, se os alunos consideram a Matemática como uma disciplina em que devem pensar, investigar, resolver verdadeiros problemas, então são capazes de se envolver em processos de pensamento matemático e realizar actividade matemática na sala de aula. Perante uma situação nova, envolvem-se rapidamente nela, discutem-na com os colegas e não ficam à espera que o professor lhes diga o que fazer.

As concepções dos alunos sobre a Matemática resultam, em larga medida, das experiências matemáticas que lhes são proporcionadas na escola desde o 1º ano de escolaridade. Se, para os alunos, fazer Matemática significa seguir regras dadas pelo professor, aplicando-as de uma forma correcta em novas situações, e se é sempre o professor que tem de validar todas as respostas, então é normal que a Matemática seja algo que se aprende vendo, escutando e praticando.

5.6 O erro e a aprendizagem

Antes de terminar este Capítulo, vamos debruçar-nos ainda sobre o papel do erro na aprendizagem¹⁵. Na verdade, os erros dos alunos podem ser tão importantes como as respostas certas. Através da análise dos erros o professor pode aperceber-se das dificuldades que eles estão a sentir e do caminho a seguir para as colmatar. Assim:

- os erros não traduzem sempre uma falta de conhecimentos ou uma falta de trabalho; certos erros podem ser um elemento de informação sobre as concepções que um aluno tem relativamente a uma dada noção;
- os erros do aluno podem e devem ser tidos em conta de um modo positivo no processo de aprendizagem; para que ele progrida, é preciso que perceba que a sua resposta está errada; a resposta correcta não pode simplesmente substituir a resposta errada – deve construir-se a partir da resposta errada.

Se o erro é considerado como um fenómeno anormal, como uma falta que sistematicamente é objecto de sanção, o aluno procurará 'receitas' para responder certo e recusar-se-á a responder quando tem dúvidas. Pelo contrário, se o aluno sente que as suas respostas, mesmo quando erradas, são tomadas em consideração e se tornam num elemento de trabalho, envolver-se-á mais na tarefa proposta. Ou seja, procurará dar resposta ao problema posto e não ao professor.

Muitos dos erros que os alunos cometem na escola devem-se ao facto que a Matemática ensinada na aula não tem qualquer significado para as crianças¹⁶. Isto é, as crianças memorizam uma série de procedimentos que elas não compreendem e que esquecem na primeira oportunidade. Por exemplo, a forma como tradicionalmente é ensinado o algoritmo da subtracção de números com dois dígitos, conduz a que as crianças memorizem a forma, mas depois sejam incapazes de aplicá-la quando aparecem situações envolvendo números de três dígitos ou em contextos não escolares.

¹⁵ Um interessante livro sobre o papel do erro na aprendizagem da Matemática é o de Baruk (1985).

¹⁶ Alguns exemplos ilustrativos são apresentados em David e Machado (1996).

Os estudos feitos em contextos extra-escolares têm mostrado que

...os sucessos e fracassos matemáticos das crianças não são apenas uma questão de capacidades lógicas. A compreensão das crianças de invariáveis lógicas é importante, mas também o é a sua representação social da Matemática, que, às vezes, conduz as crianças a colocar o seu conhecimento matemático de lado em vez de usá-lo. Em alguns casos, quando contrastados com as evidências do seu próprio conhecimento, os alunos alegarão que “isso é diferente, isso não é Matemática” (Nunes e Bryant, 1996, adaptado).

Além disso, muitos dos erros que os alunos cometem resultam de concepções erradas que formaram sobre determinados conceitos e das quais o professor tem dificuldade em se aperceber. Por exemplo, é vulgar os alunos durante os primeiros anos de escolaridade ficarem com a ideia que ao multiplicarem dois números obtêm um número maior e, pelo contrário, quando dividem o resultado é sempre mais pequeno. Estas duas concepções erradas são desenvolvidas e manifestam-se quando os alunos têm de resolver problemas que implicam multiplicar números racionais menores que um. Por exemplo, perante o problema “Se as bolachas são empacotadas em caixas de 750 gramas, quantas caixas podemos encher com 5 quilos?”. Os alunos tentam resolver do seguinte modo: Como cada caixa leva menos de 1 kg, vou poder encher mais de 5 caixas, logo multiplico 5 por 0,75. Na verdade, deviam dividir 5 por 0,75.

O professor pode ter acesso à forma como o aluno está a pensar se lhe pedir para explicar o modo como resolveu o problema, tentando a partir daqui trabalhar com o aluno para alterar aquela concepção.

Muitas vezes estas concepções surgem sem que os professores dêem por isso e podem resultar de múltiplos factores. Por exemplo, na linguagem corrente dizemos ‘os coelhos multiplicam-se rapidamente’, por outro lado o primeiro contacto que os alunos têm com a multiplicação é com números naturais e o resultado é sempre maior que cada um dos factores. Também muitas vezes a multiplicação aparece como ‘uma adição de parcelas iguais’, ficando a ideia de que é sempre maior.

Uma forma de ultrapassar esta situação de modo que a multiplicação faça sentido para os alunos quando um dos factores é menor que um pode ser associando a multiplicação à área de um rectângulo desenhado em papel quadriculado. Depois de representar um rectângulo 2 por 3 e concluir que a área é 6, podemos pedir aos alunos para desenharem um rectângulo de lados 2 e 0,5 e verem qual a sua área.

5.7 Conclusão

Neste capítulo discutimos diferentes perspectivas sobre a forma como os alunos aprendem Matemática e sobre os factores que mais influenciam essa aprendizagem. Como referimos no início, cabe ao professor retirar de cada perspectiva os aspectos que melhor o ajudam a compreender as dificuldades de cada aluno e conceber as ideias para organizar as tarefas a propôr aos alunos.

O professor precisa de ter presente que a aprendizagem da Matemática não ocorre só na escola. Os alunos aprendem muita Matemática muito antes de chegarem a uma aula do 1º ciclo e continuam a aprender no seu meio, a par do que aprendem na escola. Como afirma César (1996): “A escola deve aprender a valorizar mais os conhecimentos com que as crianças chegam, a criar pontes entre o mundo das crianças e o que ela pretende ensinar” (p. 19).

Tarefas

1. Seleccione um tópico do programa de Matemática. Faça uma planificação do ensino desse tópico de modo a respeitar a progressão definida por Bruner passando da representação activa para a icónica e depois para a simbólica.
2. Pense numa turma do 1º ano e no conceito de número natural. Identifique aprendizagens de fora da escola que o professor deve ter em conta para trabalhar esse conceito.
3. Descreva a forma como o professor pode ter em conta, nas aulas de Matemática, o conceito de zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky.
4. Identifique na sua prática lectiva situações em que os erros cometidos pelos alunos correspondiam a concepções erradas sobre o tema.

Leituras recomendadas

ABREU, G.
1996 Contextos sócio-culturais e aprendizagem matemática pelas crianças. *Quadrante*, 5 (2), pp. 7-21.

BRUNER, J.
1999 *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. E SCHLIEMANN, A. D.
1988 *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez.

CÉSAR, M.
1996 Primeiras aprendizagens: Alguns aspectos relevantes, in *Educação e Matemática*, 40, pp. 8-19.

MORGADO, L. M.
1993 *O ensino da aritmética: Perspectiva construtivista*. Coimbra: Almedina.