

Probabilidade I – SME0800

Parte 6: Valor Esperado e outras medidas

Juliana Cobre

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Universidade de São Paulo - USP



Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Valor esperado

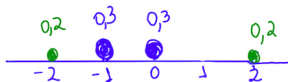
Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.

Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

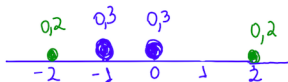
Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

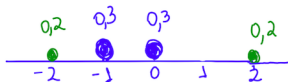
Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.

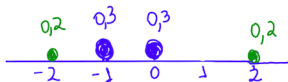


Centro de gravidade da barra, G , satisfaz

Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



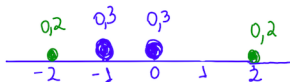
Centro de gravidade da barra, G , satisfaz

$$\sum_{j=1}^4 (x_j - G)p_j = 0 \quad \text{ou}$$

Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



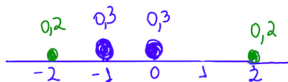
Centro de gravidade da barra, G , satisfaz

$$\sum_{j=1}^4 (x_j - G)p_j = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{j=1}^4 x_j p_j = G}$$

Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



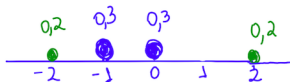
Centro de gravidade da barra, G , satisfaz

$$\sum_{j=1}^4 (x_j - G)p_j = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{j=1}^4 x_j p_j}_{\text{média ponderada}} = G$$

Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



Centro de gravidade da barra, G , satisfaz

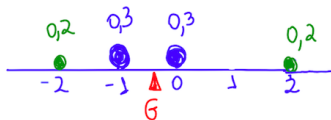
$$\sum_{j=1}^4 (x_j - G)p_j = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{j=1}^4 x_j p_j}_{\text{média ponderada}} = G$$

$$\Rightarrow G = -0,3$$

Valor esperado

Outros nomes: média, esperança matemática.

Motivação 1: barra de peso desprezível e alguns pesos cuja soma é 1.



Centro de gravidade da barra, G , satisfaz

$$\sum_{j=1}^4 (x_j - G)p_j = 0 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{j=1}^4 x_j p_j}_{\text{média ponderada}} = G$$

$$\Rightarrow G = -0,3$$

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado.

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

x_j	1	2	3	4	5	6

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$x_j p_j$	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$x_j p_j$	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^6 x_j p_j = 3,5$$

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$x_j p_j$	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^6 x_j p_j = 3,5$$

Interpretação: Repetimos o experimento um número suficiente de vezes, a média dos valores observados se aproxima do valor esperado de X .

Valor esperado

Motivação 2: Lançamento de um dado honesto e x é o resultado observado. Se seguirmos o mesmo raciocínio da média ponderada temos

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$x_j p_j$	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^6 x_j p_j = 3,5$$

Interpretação: Repetimos o experimento um número suficiente de vezes, a média dos valores observados se aproxima do valor esperado de X .

Nota: A rigor, p_j deveria ser a frequência f_j .

Valor esperado

Exercício: Jogue um dado n vezes, obtenha a frequência relativa de cada um dos possíveis valores e anote na tabela.

x_j	1	2	3	4	5	6
f_j						
f_{r_j}						
$x_j f_{r_j}$						

Valor esperado

Exercício: Jogue um dado n vezes, obtenha a frequência relativa de cada um dos possíveis valores e anote na tabela. Depois calcule $\sum_{j=1}^6 x_j f_{r_j}$.

x_j	1	2	3	4	5	6
f_j						
f_{r_j}						
$x_j f_{r_j}$						

Valor esperado

Exercício: Jogue um dado n vezes, obtenha a frequência relativa de cada um dos possíveis valores e anote na tabela. Depois calcule $\sum_{j=1}^6 x_j f_{r_j}$.

x_j	1	2	3	4	5	6
f_j						
f_{r_j}						
$x_j f_{r_j}$						

Nota: Faça para diferentes valores de n , por exemplo, $n = 10, n = 20, n = 50$.

Valor esperado

Exercício: Jogue um dado n vezes, obtenha a frequência relativa de cada um dos possíveis valores e anote na tabela. Depois calcule $\sum_{j=1}^6 x_j f_{r_j}$.

x_j	1	2	3	4	5	6
f_j						
f_{r_j}						
$x_j f_{r_j}$						

Nota: Faça para diferentes valores de n , por exemplo, $n = 10, n = 20, n = 50$.

Pergunta: Qual o valor da média ponderada em cada caso?

Valor esperado

Definição:

- (a) Seja X uma v.a. discreta que assume valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Então o valor esperado de X , $E(X)$, é definido por

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$$

se a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$ convergir absolutamente ($\sum_{j=1}^{\infty} |x_j P(X = x_j)| < \infty$).

- (b) Seja X uma v.a. contínua com fdp f . O valor esperado de X , $E(X)$, é definido por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

se $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|dx$ for finita.

Valor esperado

Nota

Média amostral

versus

Valor esperado

Valor esperado

Nota

Média amostral



versus

Valor esperado



Valor esperado

Nota

Média amostral	<i>versus</i>	Valor esperado
↓		↓
conjunto de números rearranjados		

Valor esperado

Nota

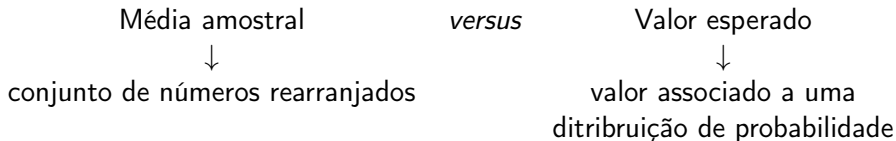
Média amostral
↓
conjunto de números rearranjados

versus

Valor esperado
↓
valor associado a uma
distribuição de probabilidade

Valor esperado

Nota



Observação: O Teorema Central do Limite explicará melhor esta relação.

Valor esperado

Exemplo: Considere que 10% das peças produzidas por certa empresa são defeituosas e 90% são perfeitas. Cada peça defeituosa produzida causa um prejuízo de \$1 e cada peça perfeita produz lucro de \$5. Qual é o lucro esperado por peça a longo prazo?

Valor esperado

Exemplo: Considere que 10% das peças produzidas por certa empresa são defeituosas e 90% são perfeitas. Cada peça defeituosa produzida causa um prejuízo de \$1 e cada peça perfeita produz lucro de \$5. Qual é o lucro esperado por peça a longo prazo?

Solução:

X : v.a. que denota o \$ (lucro ou prejuízo) de cada peça produzida.

Valor esperado

Exemplo: Seja a v.a. X que indica o tempo (em minutos) de certo experimento, tal que a fdp de X é

$$\begin{cases} \frac{1}{1500^2}x, & 0 \leq x \leq 1500 \\ \frac{-1}{1500^2}(x - 3000), & 1500 \leq x \leq 3000 . \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obtenha o valor esperado de X .

Valor esperado

Exemplo: Seja a v.a. X que indica o tempo (em minutos) de certo experimento, tal que a fdp de X é

$$\begin{cases} \frac{1}{1500^2}x, & 0 \leq x \leq 1500 \\ \frac{-1}{1500^2}(x - 3000), & 1500 \leq x \leq 3000 . \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obtenha o valor esperado de X .

Solução:

Valor esperado

Resultado: Seja X uma v.a. cujo valor esperado existe e seja $Y = g(X)$.

Valor esperado

Resultado: Seja X uma v.a. cujo valor esperado existe e seja $Y = g(X)$.

(a) Se X v.a. discreta com $p(x_j) = P(X = x_j)$ então

Valor esperado

Resultado: Seja X uma v.a. cujo valor esperado existe e seja $Y = g(X)$.

(a) Se X v.a. discreta com $p(x_j) = P(X = x_j)$ então

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)p(x_j).$$

Valor esperado

Resultado: Seja X uma v.a. cujo valor esperado existe e seja $Y = g(X)$.

(a) Se X v.a. discreta com $p(x_j) = P(X = x_j)$ então

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)p(x_j).$$

(a) Se X v.a. contínua com fdp f então

Valor esperado

Resultado: Seja X uma v.a. cujo valor esperado existe e seja $Y = g(X)$.

(a) Se X v.a. discreta com $p(x_j) = P(X = x_j)$ então

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)p(x_j).$$

(a) Se X v.a. contínua com fdp f então

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Valor esperado

Demonstração: Caso discreto.

Valor esperado

Demonstração: Caso contínuo: só para g estritamente monótona. Para outros casos veja Ash (1972).

Valor esperado

Exemplo: Seja X a quantidade de demanda de óleo durante um ano (em mil litros). Suponha que a fdp de X é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Valor esperado

Exemplo: Seja X a quantidade de demanda de óleo durante um ano (em mil litros). Suponha que a fdp de X é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Cada mil litros vendido produz lucro de \$300, enquanto cada mil litros não vendido produz um prejuízo de \$100. O fabricante decide fabricar y mil litros (fixo).

Valor esperado

Exemplo: Seja X a quantidade de demanda de óleo durante um ano (em mil litros). Suponha que a fdp de X é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Cada mil litros vendido produz lucro de \$300, enquanto cada mil litros não vendido produz um prejuízo de \$100. O fabricante decide fabricar y mil litros (fixo). Seja Z seu lucro por ano. Determine o valor esperado de Z em função de y .

Valor esperado

Exemplo: Seja X a quantidade de demanda de óleo durante um ano (em mil litros). Suponha que a fdp de X é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Cada mil litros vendido produz lucro de \$300, enquanto cada mil litros não vendido produz um prejuízo de \$100. O fabricante decide fabricar y mil litros (fixo). Seja Z seu lucro por ano. Determine o valor esperado de Z em função de y .

Solução:

Valor esperado

Solução (continuação):

Valor esperado

Solução (continuação):

Valor esperado

Solução (continuação):

Valor esperado

Solução (continuação): Qual o máximo do lucro esperado?

Valor esperado

Resultado: Seja (X, Y) vetor aleatório discreto tal que $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$. Seja $Z = H(X, Y)$ uma variável aleatória unidimensional. Então

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j).$$

Demonstração: Omitida.

Valor esperado

Propriedades: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem. Então

(i) Se c é uma constante tal que $P(X = c) = 1$ então

$$E(X) = c \text{ ou ainda}$$

Valor esperado

Propriedades: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem. Então

(i) Se c é uma constante tal que $P(X = c) = 1$ então

$$E(X) = c \text{ ou ainda } \boxed{E(c) = c}$$

(ii)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Valor esperado

Propriedades: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem. Então

(i) Se c é uma constante tal que $P(X = c) = 1$ então

$$E(X) = c \text{ ou ainda } \boxed{E(c) = c}$$

(ii)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(iii)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Valor esperado

Propriedades: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem. Então

(i) Se c é uma constante tal que $P(X = c) = 1$ então

$$E(X) = c \text{ ou ainda } \boxed{E(c) = c}$$

(ii)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

(iii)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

(iv)

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

Valor esperado

Demonstração (i):

Valor esperado

Demonstração (i): X é discreta então

Valor esperado

Demonstração (ii): Caso discreto

Demonstração (ii): Caso contínuo

Valor esperado

Demonstração (iii): Caso discreto

Valor esperado

Demonstração (iv):

Valor esperado

Demonstração (iv): Decorre da propriedade (iii).

Valor esperado

Resultado: Seja (X, Y) um vetor aleatório e suponha que X e Y sejam independentes. Então

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Valor esperado

Resultado: Seja (X, Y) um vetor aleatório e suponha que X e Y sejam independentes. Então

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Demonstração: Caso discreto.

Valor esperado

Nota: Não vale a recíproca do resultado anterior.

Valor esperado

Nota: Não vale a recíproca do resultado anterior.

Contraexemplo: Considere

X	Y			$P(X = x)$
	-1	0	1	
0	0	1/3	0	
1	1/3	0	1/3	
$P(Y = y)$				

Valor esperado

Nota: Não vale a recíproca do resultado anterior.

Contraexemplo: Considere

X	Y			$P(X = x)$
	-1	0	1	
0	0	1/3	0	
1	1/3	0	1/3	
$P(Y = y)$				

Notemos que X e Y são dependentes

Valor esperado

Contraexemplo (continuação): Mas

Valor esperado

Nota: O resultado anterior vale de forma mais geral.

Valor esperado

Nota: O resultado anterior vale de forma mais geral.

Resultado: Se X e Y são v.a. independentes, então para quaisquer funções g e h temos

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)).$$

Valor esperado

Nota: O resultado anterior vale de forma mais geral.

Resultado: Se X e Y são v.a. independentes, então para quaisquer funções g e h temos

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)).$$

Demonstração: Similar no caso discreto e será vista no futuro para o caso contínuo.

Valor esperado

Exemplo: Seja D uma v.a. que indica a procura por certo produto tal que $P(D = d) = p(d)$, $d = 0, 1, 2, \dots$. Considere que

c_1 : custo por peça

c_2 : preço de venda de cada peça

c_3 : preço de estoque de cada peça

N : número de peças produzidas.

Qual é o lucro esperado? Para qual valor de N o lucro se torna máximo?

Valor esperado

Solução:

Valor esperado

Solução (continuação):

Valor esperado

Solução (continuação):

Valor esperado

Solução (continuação):

Valor esperado

Solução (continuação):

Variância

Definição: Se X é uma v.a. com média μ , então a variância de X , $Var(X)$, é definida por

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Variância

Definição: Se X é uma v.a. com média μ , então a variância de X , $Var(X)$, é definida por

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Nota: $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Variância

Definição: Se X é uma v.a. com média μ , então a variância de X , $Var(X)$, é definida por

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Nota: $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Resultado:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 =$$

Variância

Definição: Se X é uma v.a. com média μ , então a variância de X , $Var(X)$, é definida por

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Nota: $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Resultado:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Variância

Definição: Se X é uma v.a. com média μ , então a variância de X , $Var(X)$, é definida por

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2].$$

Nota: $Var(X) = E[(X - E(X))^2]$.

Resultado:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Demonstração:

Variância

Interpretação: Se $E(X)$ representa o centro de gravidade como vimos, a $Var(X)$ representa o momento de inércia. A unidade de medida de $Var(X)$ é a unidade da v.a. ao quadrado, o que dificulta a interpretação.

Definição: O desvio padrão de uma v.a. X é definido por

$$dp(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Nota: A vantagem do $dp(X)$ é que ele tem a mesma unidade da v.a.

Variância

Propriedades:

(i) Seja X uma v.a. cujos $E(X)$ e $E(X^2)$ existem, e a e b constantes. Então

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Variância

Propriedades:

(i) Seja X uma v.a. cujos $E(X)$ e $E(X^2)$ existem, e a e b constantes. Então

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

(ii) Se (X, Y) for um vetor aleatório, e se X e Y forem independentes, então

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Variância

Propriedades:

(i) Seja X uma v.a. cujos $E(X)$ e $E(X^2)$ existem, e a e b constantes. Então

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

(ii) Se (X, Y) for um vetor aleatório, e se X e Y forem independentes, então

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

(iii) Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independentes então

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Variância

Demonstração (i):

Variância

Demonstração (ii):

Variância

Demonstração (iii):

Variância

Demonstração (iii): Imediata.

Covariância

Definição: A covariância entre X e Y , $Cov(X, Y)$, é definida por

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Covariância

Definição: A covariância entre X e Y , $Cov(X, Y)$, é definida por

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Resultado: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem. Então

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Covariância

Definição: A covariância entre X e Y , $Cov(X, Y)$, é definida por

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Resultado: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem. Então

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Demonstração:

Covariância

Resultado: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem e são v.a. independentes. Então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Covariância

Resultado: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem e são v.a. independentes. Então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Nota: A recíproca não é verdadeira.

Covariância

Resultado: Sejam X e Y v.a. cujos valores esperados existem e são v.a. independentes. Então

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Nota: A recíproca não é verdadeira.

Demonstração:

Covariância

Contraexemplo: Sejam X e Y tais que

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

e

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{se } X \neq 0 \\ 1, & \text{se } X = 0 \end{cases}.$$

Covariância

Contraexemplo: Sejam X e Y tais que

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{3}$$

e

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{se } X \neq 0 \\ 1, & \text{se } X = 0 \end{cases}.$$

Temos que

Covariância

Propriedades: Seja X e Y v.a e $a, b, a_1, \dots, n, b_1, \dots, m$ constantes. Então

Covariância

Propriedades: Seja X e Y v.a e $a, b, a_1, \dots, n, b_1, \dots, m$ constantes. Então
(i)

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

Covariância

Propriedades: Seja X e Y v.a e $a, b, a_1, \dots, n, b_1, \dots, m$ constantes. Então

(i)

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

(ii)

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X).$$

Covariância

Propriedades: Seja X e Y v.a e $a, b, a_1, \dots, n, b_1, \dots, m$ constantes. Então

(i)

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

(ii)

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X).$$

(iii)

$$\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y).$$

Covariância

Propriedades: Seja X e Y v.a e $a, b, a_1, \dots, n, b_1, \dots, m$ constantes. Então

(i)

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

(ii)

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X).$$

(iii)

$$\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y).$$

(iv)

$$\text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{Cov}(X_i, Y_j).$$

Covariância

Demonstração (i):

Covariância

Demonstração (ii):

Covariância

Demonstração (iii):

Covariância

Demonstração (iv):

Covariância

Resultado:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Covariância

Resultado:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Demonstração:

Nota: O resultado anterior vale no caso mais geral

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Coeficiente de correlação

Definição: Sejam X e Y v.a. o coeficiente de correlação é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Coeficiente de correlação

Definição: Sejam X e Y v.a. o coeficiente de correlação é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Interpretação: O coeficiente de correlação é uma medida de grau de linearidade entre X e Y .

Coeficiente de correlação

Resultado: Se X e Y forem v.a. independentes, então $\rho_{X,Y} = 0$.

Coeficiente de correlação

Resultado: Se X e Y forem v.a. independentes, então $\rho_{X,Y} = 0$.

Demonstração:

Coeficiente de correlação

Demonstração (continuação):

Coeficiente de correlação

Resultado:

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Coeficiente de correlação

Resultado:

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Demonstração: Será vista em Probabilidade II.

Coeficiente de correlação

Resultado:

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Demonstração: Será vista em Probabilidade II.

Resultado: Se $|\rho| = 1$, então $Y = aX + b$, a e b constantes.

Coeficiente de correlação

Resultado:

$$-1 \leq \rho \leq 1.$$

Demonstração: Será vista em Probabilidade II.

Resultado: Se $|\rho| = 1$, então $Y = aX + b$, a e b constantes.

Demonstração: Será vista em Probabilidade II.

Coeficiente de correlação

Resultado: Sejam X e Y v.a. tais que $Y = aX + b$, a e b constantes. Então $|\rho_{X,Y}| = 1$ e, se $a > 0$ então $\rho_{X,Y} = 1$, e, se $a < 0$ então $\rho_{X,Y} = -1$.

Coeficiente de correlação

Resultado: Sejam X e Y v.a. tais que $Y = aX + b$, a e b constantes. Então $|\rho_{X,Y}| = 1$ e, se $a > 0$ então $\rho_{X,Y} = 1$, e, se $a < 0$ então $\rho_{X,Y} = -1$.

Demonstração:

Momentos

Definição: Seja $k = 1, 2, \dots$

(i) O momento de ordem k da v.a. X é dado por $E(X^k)$, desde que essa esperança exista.

Momentos

Definição: Seja $k = 1, 2, \dots$

- (i) O momento de ordem k da v.a. X é dado por $E(X^k)$, desde que essa esperança exista.
- (ii) Se $E(X) = \mu < \infty$, o momento central de ordem k é definido por $E(|X - \mu|^k)$, sempre que existir.

Momentos

Definição: Seja $k = 1, 2, \dots$

- (i) O momento de ordem k da v.a. X é dado por $E(X^k)$, desde que essa esperança exista.
- (ii) Se $E(X) = \mu < \infty$, o momento central de ordem k é definido por $E(|X - \mu|^k)$, sempre que existir.
- (iii) O momento absoluto de ordem k da v.a. X é definido por $E(|X|^k)$.

Momentos

Definição: Seja $k = 1, 2, \dots$

- (i) O momento de ordem k da v.a. X é dado por $E(X^k)$, desde que essa esperança exista.
- (ii) Se $E(X) = \mu < \infty$, o momento central de ordem k é definido por $E(|X - \mu|^k)$, sempre que existir.
- (iii) O momento absoluto de ordem k da v.a. X é definido por $E(|X|^k)$.

Nota: O momento de ordem 1 é o valor esperado.

Momentos

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Calcule o momento de ordem k .

Momentos

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Calcule o momento de ordem k .

Solução:

Função geradora de momentos

Definição: A função geradora de momentos, $M(t)$, de uma v.a. X é definida para todo valor real t por

$$M(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & \text{se } X \text{ é discreta com fp } p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & \text{se } X \text{ é contínua com fdp } f(x) \end{cases}.$$

Função geradora de momentos

Definição: A função geradora de momentos, $M(t)$, de uma v.a. X é definida para todo valor real t por

$$M(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & \text{se } X \text{ é discreta com fp } p(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & \text{se } X \text{ é contínua com fdp } f(x) \end{cases}.$$

Nota: A proposição a seguir nos explica o nome da função definida acima.

Função geradora de momentos

Resultado: Se

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_x e^{tx} p(x) \right] = \sum_x \frac{d}{dt} [e^{tx} p(x)]$$

e

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [e^{tx} f(x)] dx,$$

então a derivada de ordem n da função geradora de momentos, $M^{(n)}(t)$, da v.a. X é dada por

$$M^{(n)}(t) = E \left(X^n e^{tX} \right), n \geq 1$$

e

$$M^{(n)}(0) = E(X^n), n \geq 1.$$

Função geradora de momentos

Demonstração:

Função geradora de momentos

Demonstração (continuação):

Função geradora de momentos

Demonstração (continuação):

Função geradora de momentos

Exemplo: Seja X uma v.a. tal que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Calcule a função geradora de momentos, $E(X)$ e $Var(X)$.

Função geradora de momentos

Exemplo: Seja X uma v.a. tal que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \lambda > 0.$$

Calcule a função geradora de momentos, $E(X)$ e $Var(X)$.

Solução:

Função geradora de momentos

Solução (continuação):

Função geradora de momentos

Solução (continuação):

Função geradora de momentos

Resultado: Seja X uma v.a. tal que sua função geradora de momentos seja $M_X(t)$. Seja $Y = aX + b$, com a e b constantes. Então função geradora de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

Função geradora de momentos

Resultado: Seja X uma v.a. tal que sua função geradora de momentos seja $M_X(t)$. Seja $Y = aX + b$, com a e b constantes. Então função geradora de momentos de Y é dada por

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

Demonstração:

Função geradora de momentos

Resultado: Se X e Y são v.a. independentes então

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

Função geradora de momentos

Resultado: Se X e Y são v.a. independentes então

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

Demonstração:

Função geradora de momentos

Resultado: A função geradora de momentos identifica a distribuição da v.a., ou seja, determina de maneira única a distribuição da v.a.

Função geradora de momentos

Resultado: A função geradora de momentos identifica a distribuição da v.a., ou seja, determina de maneira única a distribuição da v.a.

Demonstração: Omitida.