PME 5010 – Mecânica Analítica

Simulação numérica em sistemas mecânicos

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Offshore
Mechanics
Laboratory

1 Introdução
2 Estudo de caso: dinâmica de um pêndulo
3 *Integração numérica no Octave

1 Introdução
2 Estudo de caso: dinâmica de um pêndulo
3 *Integração numérica no Octave

Offshore Mechanics Laboratory

Ferramentas computacionais para integração numérica

Ferramentas gratuitas e linguagens de código aberto (open-source)

- Julia (`julialang.org`)
  - Execução de scripts – pacote `DifferentialEquations.jl`
- GNU Octave (`www.gnu.org/software/octave/`)
  - Execução de scripts – função `ode45`
- Scilab (`www.scilab.org`)
  - Execução de scripts – função `ode`
  - Ambiente gráfico Xcos
- Python (`www.python.org`)
  - Execução de scripts – pacotes `numpy` e `scipy.integrate`

Ferramentas comerciais

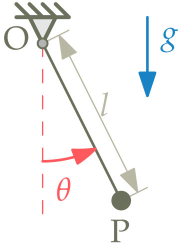
- MATLAB (`www.mathworks.com/products/matlab.html`)
  - Execução de scripts – função `ode45`
  - Ambiente gráfico Simulink

1 Introdução
2 Estudo de caso: dinâmica de um pêndulo
3 *Integração numérica no Octave

Pêndulo simples

Considere um pêndulo simples como um sistema constituído por um ponto material P de massa m que pode descrever um movimento circular de centro O e raio l em um plano vertical. Seja g a magnitude da aceleração da gravidade, suposta constante, e considere a presença de um efeito dissipativo viscoso proporcional à velocidade angular $\dot{\theta}$.

A equação de movimento deste sistema pode ser escrita na forma:



$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \sin\theta - 2\zeta\Omega\dot{\theta}$$

com $\Omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ denotando a frequência natural de pequenas oscilações do sistema e ζ sendo um fator de amortecimento (adimensional).

Forma de espaço de estados

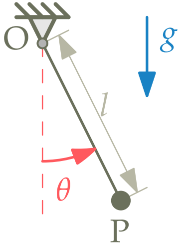
Vetor de estados

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Equação de movimento

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\Omega^2 \sin\theta - 2\zeta\Omega\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\Omega^2 \sin(y_1) - 2\zeta\Omega y_2 \end{bmatrix}$$



1 Introdução
2 Estudo de caso: dinâmica de um pêndulo
3 *Integração numérica no Octave

Offshore Mechanics Laboratory

Objetivos

- Atenção: este tutorial não visa prover um curso introdutório geral sobre programação em Octave, tampouco sobre sua linguagem de programação.
- O objetivo deste tutorial é ilustrar o uso do Octave no específico problema de integração de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Habilidades a serem trabalhadas

1. Interpretar um código-exemplo desenvolvido especialmente para este problema.
2. Modificar este código para a integração de outras equações diferenciais.

Sintaxe do Octave – aspectos básicos

- Não é preciso declarar variáveis, basta definir seu valor:

```
k = 1;            % inteiro
r0 = 1.0;         % ponto flutuante (1.0)
r1 = 210.E+9;     % ponto flutuante (210. * 10^9)
r2 = pi/2;        % ponto flutuante (pi/2)
st = 'hello';     % string
ml = [1, 0, 2.];  % matriz-linha ou vetor
mc = [1; 0; 2.];  % matriz-coluna ou vetor
M = [1, 2, 3.2; -4, -7.5, pi]; % matriz 2 x 3
```

- Vetores com elementos igualmente espaçados:

```
v0 = 0.0;       % primeiro elemento
vn = 10.0;      % último elemento
dv = 0.5;       % espaçamento entre elementos
v = v0:dv:vn;   % vetor v

n = 21;                      % número de elementos
v_ = linspace(v0, vn, n);    % vetor v (alternativa)
```

Sintaxe do Octave – aspectos básicos

- Índices de linhas e colunas iniciam em 1.
- Acessar ou modificar partes de um vetor:

```
ml = [-3., 0, 2.]; % matriz-linha ou vetor
q1 = ml(1);        % q1 recebe elemento 1 de ml (-3.)
ml(2) = 2 * pi;    % modifica o elemento 2 de ml
```

- Acessar ou modificar partes de uma matriz:

```
M = [1, 2, 3.2; -4, -7.5, pi]; % matriz 2 x 3
m23 = M(2, 3);   % m23 recebe linha 2, coluna 3 de M
r1 = M(1, :);    % r1 recebe linha 1 de M
c2 = M(:, 2);    % c2 recebe coluna 2 de M
M(2, 2) = -5.;   % modifica linha 2, coluna 2 de M
```

Sintaxe do Octave – aspectos básicos

- Definição de funções (um arquivo por função):

```
%% -- arquivo f.m -- %%
function dy = f(t, y)
  global w A p;
  dy(1) = y(2);
  dy(2) = - w^2 * sin(y(1)) + A * sin(p * t);
end
```

- O nome da função é **f**.
- As variáveis de entrada (input) são t e y: t deve ser um escalar; y deve ser um vetor com ao menos dois elementos.
- A variável de saída (output) é dy, que será um vetor com exatamente dois elementos.
- As variáveis w, A e p, vistas pela função como constantes, devem ser definidas externamente ao corpo da função.

Integração numérica no Octave – função `ode45`

```
[t, Y] = ode45('f', t_s, y_0);
```

- Fornece uma solução numérica para a equação diferencial ordinária de primeira ordem com condição inicial $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ em $t = t_0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}\big|_{t=t_0} = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

- A variável $\mathbf{y}$ pode ser escalar ou vetor; t deve ser um escalar (pois é uma equação diferencial ordinária).
- Assim, a entrada $\mathbf{y}_0$ da função `ode45` deve ter as mesmas dimensões de $\mathbf{y}$.

Integração numérica no Octave – função `ode45`

```
[t, Y] = ode45('f', t_s, y_0);
```

- A entrada $\mathbf{t}_s$ da função **`ode45`** deve ser um vetor com um número finito de instantes de tempo t em um intervalo $t \in [t_0, t_1]$ para os quais os valores de y serão numericamente computados. Exemplo:

```
t_0 = 0.0;          % instante inicial
t_1 = 15.0;         % instante final
dt = 0.01;          % incremento de tempo
t_s = t_0:dt:t_1;   % vetor ts
```

- A entrada $\mathbf{f}$ da função **`ode45`** deve ser o nome de uma função que tem como saída o valor de $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}$ e como entrada (t, y).

Integração numérica no Octave – função ode45

```
[t, Y] = ode45('f', t_s, y_0);
```

- A saída $\mathbf{Y}$ da função **ode45** é uma matriz da forma:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1)|_{t=\mathbf{t}(1)} & \mathbf{y}(2)|_{t=\mathbf{t}(1)} & \cdots & \mathbf{y}(j)|_{t=\mathbf{t}(1)} & \cdots \\ \mathbf{y}(1)|_{t=\mathbf{t}(2)} & \mathbf{y}(2)|_{t=\mathbf{t}(2)} & \cdots & \mathbf{y}(j)|_{t=\mathbf{t}(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{y}(1)|_{t=\mathbf{t}(k)} & \mathbf{y}(2)|_{t=\mathbf{t}(k)} & \cdots & \mathbf{y}(j)|_{t=\mathbf{t}(k)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- Cada coluna corresponde a uma variável do vetor $\mathbf{y}$; cada linha corresponde ao valor do vetor $\mathbf{y}$ no instante de tempo t que ocupa a respectiva posição no vetor $\mathbf{t}$.

Exemplo de aplicação - dinâmica de um pêndulo

```
%% -- arquivo pendulo_f.m -- %%
function dy = pendulo_f(t, y)
  global w;
  dy = [y(2); - w^2 * sin(y(1))];
end
```

```
%% -- arquivo pendulo.m -- %%
clear all;                              % limpa workspace
global w;                               % parâmetros globais
g = 9.8; l = 1.0;                       % parâmetros
w = sqrt(1.5 * g/l);                    % frequência natural
T = 2*pi/w;                             % período (linear)

ts = (0:0.01:10)*T;                     % vetor tempo
y0 = [pi/3, 0];                         % condições iniciais
[t, Y] = ode45 ('pendulo_f', t_s, y_0); % integração ODE

plot(t, Y(:,1)*180/pi);                 % plot theta vs. t
```

Perguntas?

reorsino@usp.br

Offshore Mechanics Laboratory