PME 3100 – Mecânica I
Cinemática do corpo rígido

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

1 Propriedade fundamental

Considere o corpo rígido S mostrado na fig. 1. A condição de corpo rígido impõe que a distância entre dois pontos quaisquer desse corpo seja constante. Assim, pode-se escrever

$$||(P' - P)||^2 = C, \quad \text{onde } C \text{ é uma constante}$$

Diferenciando em relação ao tempo obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d||(P'-P)||^2}{dt} &= \frac{d\,C}{dt} \\ (P'-P)\bullet(\vec{v}_{P'} - \vec{v}_P) &= 0 \Rightarrow \\ \vec{v}_P\bullet(P'-P) &= \vec{v}_{P'}\bullet(P'-P) \end{aligned} \tag{1.1}$$

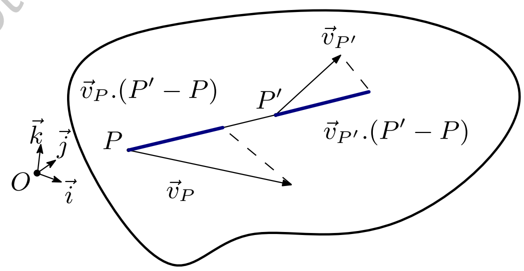


Figura 1: propriedade fundamental da cinemática do corpo rígido.

Com base nesse resultado, enuncia-se a seguinte propriedade fundamental:

`os movimentos de um corpo rígido` S `são caracterizados pelo fato de, em cada instante, as velocidades de 2 quaisquer de seus pontos apresentam a mesma componente segundo a reta que une esses dois pontos` ou

`no movimento de um corpo rigido, as projeções das velocidades de 2 pontos quaisquer na direção da reta que os une é idêntica.`

2 Tipos de movimento de um corpo rígido

Translação

Se qualquer reta pertencente a um corpo rígido se mantiver paralela a uma dada direção a cada instante durante todo o movimento, o corpo rígido terá efetuado uma translação.

Há dois tipos de movimentos de translação: caso as trajetórias sejam *retas*, tem-se a translação retilínea; caso contrário, a translação será curvilínea. Esses dois tipos de movimentos estão mostrados na fig. 2

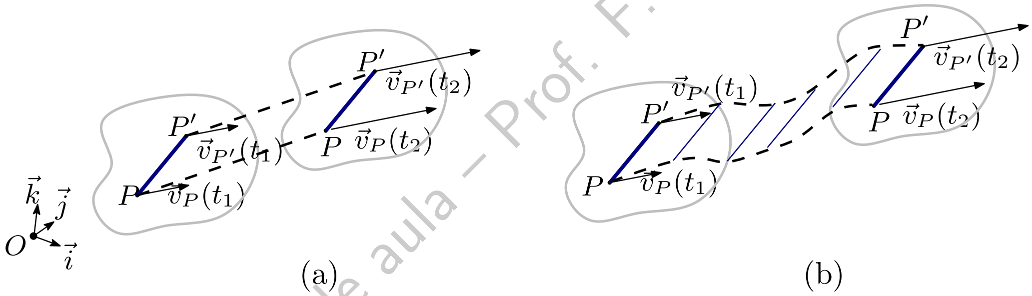


Figura 2: (a) translação retilínea; (b) translação curvilínea

Rotação

Se um corpo rígido se mover de modo que todas as suas partículas situadas ao longo de uma reta possuam velocidade nula com respeito a qualquer referencial, diz-se que o corpo rígido realiza uma rotação com respeito a esse referencial. Nessas condições, a reta é denominada eixo de rotação (vide fig. 3). Pela propriedade da rigidez, todos os pontos do corpo rígido realizam necessariamente movimentos circulares ao redor do eixo. Outras características que se devem à rigidez do corpo são:

- pontos que estão equidistantes do eixo de rotação possuem velocidade e aceleração de mesmo módulo;
- circunferências com centro no eixo e ortogonais a este pertencem a um plano ortogonal ao eixo;

- pontos pertencentes a um plano que passa pelo eixo pertencem sempre ao mesmo plano que, durante o movimento, passará sempre pelo eixo.

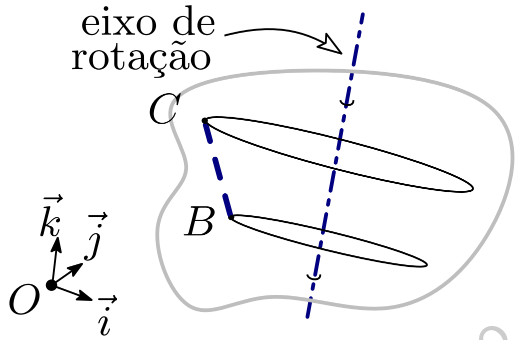


Figura 3: movimento de rotação.

Movimento plano geral

Caracteriza-se pelo fato de o movimento de qualquer ponto do corpo rígido estar confinado a um plano e o movimento não pode ser classificado como de rotação ou de translação pura.

O Teorema de Chasles (Michel Chasles, 1830) afirma que o movimento geral pode ser considerado como a soma de um movimento de translação com um movimento de rotação. No movimento plano, caso particular do movimento geral, essa constatação é imediata, como mostra a fig. 4

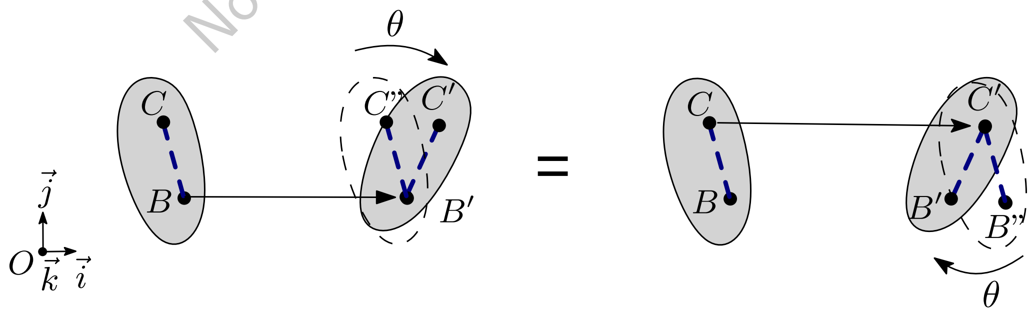


Figura 4: o segmento BC representa o corpo rígido. Para levá-lo de BC a $B'C'$ pode-se, por exemplo: (a) efetuar uma translação levando-o de BC até $B'C"$ e uma rotação de um ângulo θ em torno de B' obtendo-se $B'C'$; (b) efetuar uma translação levando-o até $B"C'$ e uma rotação de um ângulo θ em torno de C' obtendo-se $B'C'$.

Movimento em torno de um ponto fixo

O exemplo clássico desse tipo de movimento é o do pião, cujo ponto de apoio é (idealmente) fixo. O movimento pode ser considerado como a superposição de três movimentos de rotação em torno de três eixos distintos. Um outro exemplo é o giroscópio, cujo centro é um ponto fixo.

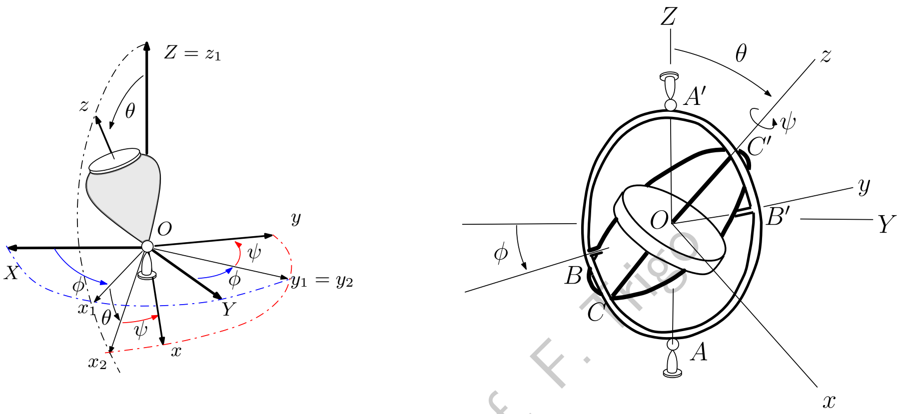


Figura 5: pião (esquerda) e giroscópio (direita).

Movimento geral

Qualquer movimento que não esteja incluído em uma das categorias anteriores é um movimento geral.

3 Vetor rotação

Antes de definirmos vetor rotação, cabe uma breve discussão sobre a natureza dos deslocamentos angulares. Embora deslocamentos angulares possuam módulo, direção e sentido, não podem ser classificados como vetores, pois não obedecem à regra do paralelogramo da soma de vetores.

Considera-se um corpo rígido que gira ao redor de um eixo fixo Oz, cujo versor é $\vec{k}$, de acordo com a fig. 6. Tomando-se um plano de referência α, fixo no espaço e que passa pelo eixo de rotação e um plano π do corpo rígido (portanto, móvel) que, no instante inicial, coincide com α, a variação do ângulo entre os dois planos por unidade de tempo chama-se velocidade angular do corpo rígido, representada por ω, cujo sentido é dado pela regra da mão direita. Assim,

$$\omega = \lim_{\Delta t \Rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{3.1}$$

Ao **vetor** definido por $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ **dá-se o nome de vetor rotação do corpo rígido**, produto da velocidade angular pelo versor da direção no espaço. Ainda da fig. 6, tem-se P a posição inicial de um ponto e P'

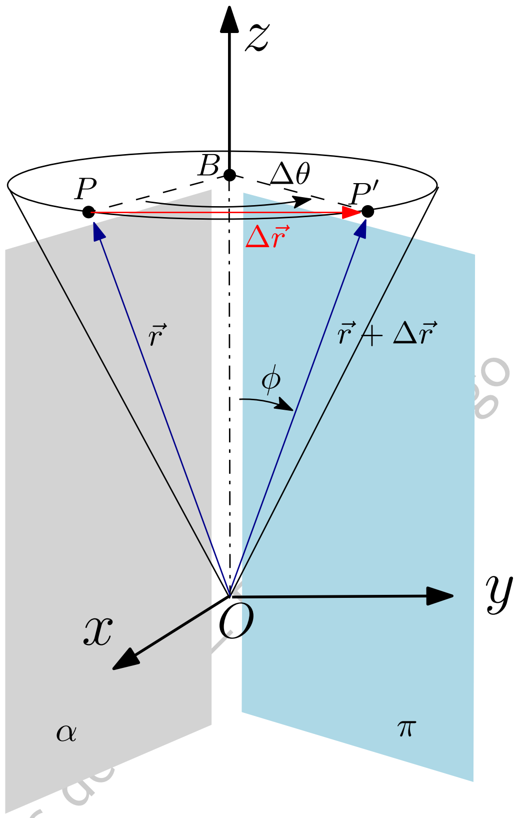


Figura 6: velocidade angular e vetor rotação

sua posição final. A projeção de P sobre o eixo de rotação é B, idêntica à de P' (pelas propriedades de rigidez). Assim,

$$||(P - B)|| = ||(P' - B)|| = ||\vec{r}|| \operatorname{sen} \phi, \tag{3.2}$$

que é o raio da trajetória de P. Este ponto descreve uma trajetória circular de raio $||\vec{r}|| \operatorname{sen} \phi$ com velocidade angular $\omega = \dot{\theta} = d\theta/dt$, ou seja, idêntica à velocidade angular do corpo rígido. Caso outros dois pontos quais do corpo rígido, por exempo, não pertencentes ao eixo de rotação, tivessem sido analisados ante o mesmo deslocamento angular imposto, chegaríamos ao mesmo resultado da equação 3.2. Essas constatações permitem-nos concluir que **o vetor rotação de um corpo rígido é um vetor livre**, isto é, **ele não depende do ponto de aplicação**.

Ainda com relação à fig. 6 temos:

$$
\begin{aligned}
||\Delta\vec{r}|| &\approx \Delta\theta||\vec{r}||\,\mathrm{sen}\ \phi \\
\frac{||\Delta\vec{r}||}{\Delta t} &\approx \frac{\Delta\theta}{\Delta t}||\vec{r}||\,\mathrm{sen}\ \phi \\
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{||\Delta\vec{r}||}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)||\vec{r}||\,\mathrm{sen}\ \phi \\
||\vec{v}_P|| &= \omega||\vec{r}||\,\mathrm{sen}\ \phi \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Porém $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ e, portanto,

$$||\vec{v}_P|| = ||\vec{\omega}||.||\vec{r}||\,\mathrm{sen}\ \phi \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{\omega}\wedge\vec{r} = \vec{\omega}\wedge(P-O) \qquad (3.4)$$

Da eq. 3.4, conclui-se as velocidades de quaisquer pontos de um corpo rígido que execute movimento de rotação possuem direção ortogonal ao plano formado pelos vetores $\vec{\omega}$ e $(P-O)$ e sentido dado pela regra da mão direita.

Outra importante conclusão a partir da eq. 3.4 é que a derivada temporal de um vetor de módulo constante ($\vec{r}$ pertence a um corpo rígido, portanto seu módulo é constante) é ortogonal a esse vetor. Observe que, de acordo com 3.4

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\wedge(P-O) = \vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

mas

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} \qquad (3.5)$$

Como será visto mais adiante, em situações nas quais o referencial é acelerado, portanto não inercial, será necessário, no cálculo das derivadas de vetores, considerar tanto a variação no seu módulo quanto na sua direção/sentido, ou seja, *será necessário efetuar a derivação dos versores da base*.

Considera-se agora uma situação em que dados dois pontos P e O pertencentes a um corpo rígido que executa um movimento geral. O vetor de posição relativa entre esses pontos é $\vec{r} = (P-O)$ quando observados com respeito a um referencial inercial externo. Efetuando-se a derivação com relação ao tempo desse vetor temos

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(P - O) = \vec{v}_P - \vec{v}_O$$

mas

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

igualando as duas equações

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{3.6}$$

A equação 3.6 é denominada *equação fundamental da cinemática do corpo rígido, ou equação do campo de velocidades*[i]. Ela relaciona as velocidades de dois pontos do mesmo corpo rígido para qualquer tipo de movimento, desde que conhecido vetor rotação instantâneo do corpo.

Pode-se demonstrar a existência e a unicidade do vetor rotação. A demonstração de existência não é difícil, mas é longa; por esse motivo, não será efetuada neste momento. Quanto à unicidade, suponha que para um mesmo corpo rígido houvesse, a cada instante, dois vetores rotação, $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega}'$. Quaisquer dois pontos P e O do corpo rígido teriam que estar relacionados pela equação fundamental. Então, poderíamos escrever

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega'} \wedge (P - O)$$
$$\ominus$$
$$(\vec{\omega} - \vec{\omega'}) \wedge (P - O) = \vec{0} \tag{3.7}$$

A eq. 3.7 somente terá solução se $(\vec{\omega} - \vec{\omega'}) = \vec{0}$ ou se $(P - O) = \vec{0}$. Como P e O são quaisquer, basta escolhermos ao acaso $P \neq O$ para concluirmos que $\vec{\omega} = \vec{\omega'}$, **vetor rotação instantânea do corpo rígido**.

[i]Em alguns textos disponíveis nas referências da disciplina essa equação também é denominada *fórmula de Poisson*.

4 Atos de movimento instantâneo de um corpo rígido e campo de velocidades

Considere novamente a eq. 3.6. Multiplicando-a escalarmente ambos os lados pelo vetor rotação do corpo rígido, $\vec{\omega}$, tem-se:

$$\vec{v}_p \bullet \vec{\omega} = \vec{v}_O \bullet \vec{\omega} + [\vec{\omega} \wedge (P - O)] \bullet \vec{\omega}$$
$$\vec{v}_p \bullet \vec{\omega} = \vec{v}_O \bullet \vec{\omega} = \text{ constante.} \tag{4.1}$$

A eq. 4.1 expressa um **invariante** no movimento dos corpos rígidos: *a cada instante, as projeções das velocidades de todos os pontos de um corpo rígido na direção do seu vetor de rotação instantânea $\vec{\omega}$ são constantes*.

Essa propriedade nos permite classificar os atos de movimento de um corpo rígido. Há duas possibilidades principais para o resultado da eq. 4.1: zero ou diferente de zero. Analisemos cada caso.

1. $\vec{v}_P \bullet \vec{\omega} = 0$. Há 4 possibilidades
   (a) $\vec{v}_P = \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \vec{0} \Longrightarrow$ ato de repouso instantâneo;
   (b) $\vec{v}_P \neq \vec{0}$ e $\vec{\omega} = \vec{0} \Longrightarrow$ ato de movimento instantâneo de translação;
   (c) $\vec{v}_P = \vec{0}$ e $\vec{\omega} \neq \vec{0} \Longrightarrow$ ato de movimento instantâneo de rotação em torno de um eixo instantâneo de rotação (EIR) que possui pelo menos um ponto instantaneamente fixo. Um caso particular do EIR é o do pião, que possui um ponto sempre fixo, embora o eixo continue sendo instantâneo;
   (d) $\vec{v}_P \neq \vec{0}$ e $\vec{\omega} \neq \vec{0} \Longrightarrow \vec{v}_P \perp \vec{\omega} \Rightarrow$ nesse caso, os pontos P estão fora do EIR e há pontos para os quais a velocidade é instantaneamente nula, repetindo-se o caso (c). *Um caso particular dessa situação é o movimento plano.*

2. $\vec{v}_P \bullet \vec{\omega} \neq \vec{0} \Longrightarrow$ esse é o caso mais geral do movimento de um corpo rígido. Como a projeção das velocidades instantâneas de todos os pontos na direção do vetor rotação instantânea é constante, isso significa **que há um lugar geométrico de pontos que possuem velocidade instantânea mínima não nula**. Ocorre o **ato de movimento roto-translatório em torno de um eixo helicoidal instantâneo (EHI)**.

Como todos os casos do item (1) são casos particulares do ato de movimento em torno de um EHI, a obtenção de sua equação e o valor da velocidade mínima serão aqui demonstrados em primeiro lugar.

Velocidade

Formalmente, existem pontos E cuja velocidade é **mínima e paralela ao vetor rotação do corpo rígido**. Determina-se essa velocidade:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_E &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O) \\
h\vec{\omega} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O), \ h \in \mathcal{R}, \ [h] \equiv [m] \\
(h\vec{\omega})\bullet\vec{\omega} &= [\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O)]\bullet\vec{\omega} \\
h||\vec{\omega}||^2 &= \vec{v}_O\bullet\vec{\omega} + 0 \\
\Rightarrow h &= \frac{\vec{v}_O\bullet\vec{\omega}}{||\vec{\omega}||^2} \ \therefore \ \vec{v}_E = h\vec{\omega} = \frac{\vec{v}_O\bullet\vec{\omega}}{||\vec{\omega}||^2}\vec{\omega} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

(por exemplo, suponha que se tenha obtido $h = 5$ e que, nesse instante, $\vec{\omega} = 2\vec{i}\ rad/s$. Então, $\vec{v}_E = 10\vec{i}\ m/s$).

Eixo helicoidal instantâneo – EHI

Para melhor compreensão desses conceitos e do campo de velocidades de um corpo rígido, dado pela eq. 3.6, vide fig. 7.

Deve-se obter o lugar geométrico dos pontos E, onde a velocidade é mínima e igual a $h\vec{\omega}$, resultado que é diretamente utilizado na eq. 3.6:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_E &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O) \\
h\vec{\omega} &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O) \\
(E - O) \wedge \vec{\omega} &= \vec{v}_O - h\vec{\omega} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

A eq. 4.3 é uma equação vetorial do tipo $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$ análoga à que foi resolvida na obtenção do eixo central de momentos na Estática. Portanto, sua solução é conhecida:

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{||\vec{a}||^2} + \lambda\vec{a}$$

Fazendo a correspondência adequada tem-se:

$$\begin{aligned}(E-O) &= \frac{\vec{\omega}\wedge(\vec{v}_O - h\vec{\omega})}{||\vec{\omega}||^2} + \lambda\vec{\omega},\ \lambda\in\mathcal{R},\ [\lambda]\equiv[m\ s] \\ E &= \underbrace{O + \frac{\vec{\omega}\wedge\vec{v}_O}{||\vec{\omega}||^2}} + \lambda\vec{\omega} \\ E &= \quad A + \lambda\vec{\omega}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Consequências:

- nota-se, nas eqs. 4.3 e 4.4, que no caso particular em que $\vec{v}_O \bullet \vec{\omega} = 0$ com $\vec{v}_O \neq \vec{0}$ e $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, ambos os vetores são ortogonais e o EHI torna-se o EIR, pois a velocidade mínima é $\vec{v}_E = \vec{0}$;
- quando $\vec{v}_O = \vec{0}$ com $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, o EIR passa instantaneamente pelo próprio ponto O;
- quando o movimento é *plano*, **todos os pontos do corpo rígido se deslocam em planos paralelos ao plano do movimento** e, assim, $\vec{v}_O \bullet \vec{\omega} = 0$ sempre, pois $\vec{\omega}$ será sempre ortogonal ao plano e todas as velocidades sempre estarão em planos ortogonais ao vetor rotação. Em outras palavras, no movimento plano a componente $h\vec{\omega}$ será *sempre* nula. Nessa situação, o traço do EIR no plano do movimento irá definir um ponto especial denominado *centro instantâneo de rotação, o CIR*.

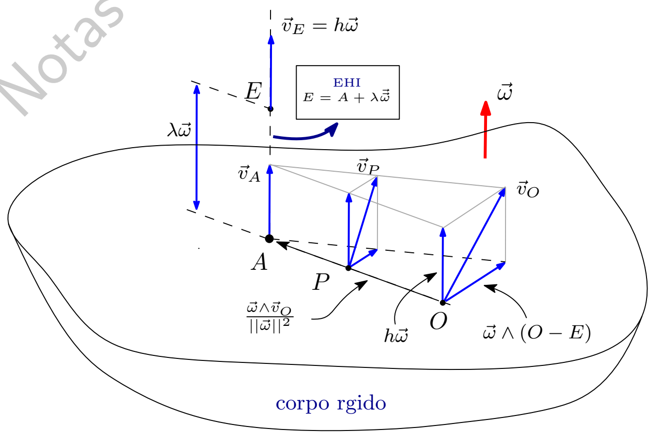


Figura 7: campo de velocidades na seção de um corpo rígido por um plano ortogonal ao vetor rotação instantânea $\vec{\omega}$.

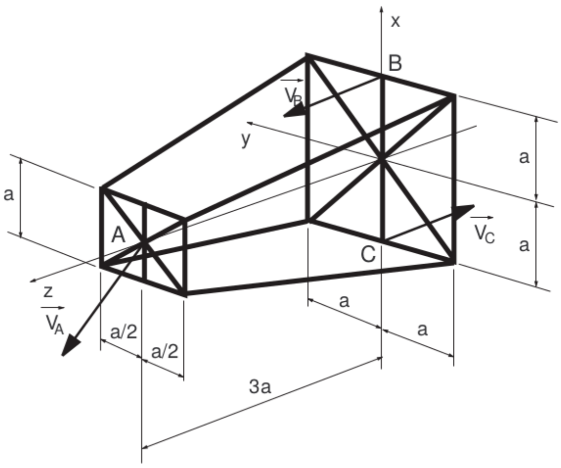
Exemplos: propriedade fundamental, campo de velocidades e EHI

1 (q1, P2 de 2001)

PMC 2100 – MECÂNICA A
Segunda Prova – 26 de outubro de 2001 – Duração: 100 minutos
(Não é permitido o uso de calculadoras)

Questão 1 (3,0 pontos)
A plataforma esquematizada na figura foi instrumentada nos pontos A, B e C com a finalidade de registrar seu movimento. A velocidade desses pontos num instante vale:
$\vec{v}_A = -6v\vec{i} + v\vec{k}$ $\quad \vec{v}_B = 3v\vec{k}$ $\quad \vec{v}_C = -v\vec{k}$

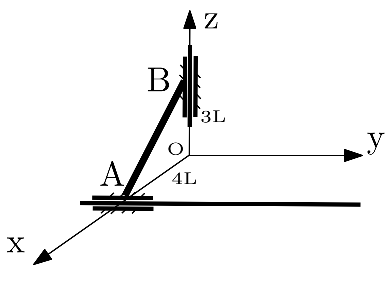
Pede-se:
a) Verificar que as velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ respeitam a condição de corpo rígido da plataforma.
b) Determinar o vetor velocidade angular da plataforma
$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$



c) Esboçar o EHI

2

A barra AB representada na figura tem comprimento $5L$; sua extremidade B desloca-se ao longo do eixo Oz, e o ponto A desloca-se ao longo de um eixo paralelo a Oy com velocidade instantânea de módulo v no sentido positivo. A barra AB não possui rotação em torno de AB, isto é, a projeção de seu vetor rotação na direção AB é nula. No instante representado e em função dos parâmetros conhecidos, determinar: a) o **vetor** velocidade instantânea de B; b) o vetor rotação instantânea da barra; c) obter e esboçar o EHI ou o EIR



5 Campo de acelerações no movimento geral

Para obtermos o campo de acelerações de um corpo rígido no movimento mais geral, iremos efetuar a derivada da equação fundamental da cinemática (equação do campo de velocidades) em relação ao tempo e sob o ponto de vista de um observador em um referencial inercial, conforme mostra a fig. 8 (a):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{\vec{v}_P\} &= \frac{d}{dt}\{\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)\} \\
\vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}\{(P-O)\} \\
\vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \underbrace{(\vec{v}_P - \vec{v}_O)} \\
\vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

A eq. 5.1 expressa o campo de acelerações de um corpo rígido em um movimento geral. O campo de acelerações é de difícil visualização no movimento geral, mas simplifica-se no movimento plano, que será visto mais adiante.

A dificuldade em utilizar a eq. 5.1 é normalmente o cálculo de $\dot{\vec{\omega}}$. Com respeito à fig. 8 (b), supondo-se por simplicidade que, nesse instante, $O'Z \parallel Oz$ e que o vetor posição de P em relação a O seja descrito em coordenadas da base móvel, vamos obter as expressões dos campos de velocidade e de aceleração de P por derivação direta do vetor posição em relação ao tempo.

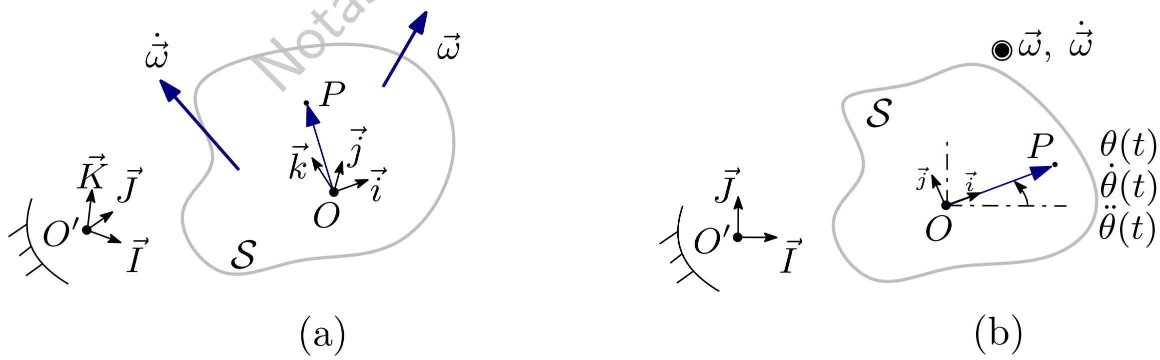


Figura 8: campo de acelerações no movimento geral. $O'\vec{I}\,\vec{J}\,\vec{K}$ é inercial e $O\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ é rigidamente ligado ao corpo rígido $\mathcal{S}$. Em: (a) posição genérica; (b) configuração particular instantânea em que $O'\,\vec{K} \parallel O\,\vec{k}$.

Como temos dois referenciais, um inercial e outro não inercial, analisemos o que ocorre com as derivadas com respeito ao tempo em cada um desses referenciais, lembrando sempre que $\vec{r} = (P-O) = r\vec{i}$:

- observador rigidamente ligado a $O\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ (não-inercial)

$$\vec{r} = r\vec{i} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{i} + r\dot{\vec{i}} = 0\vec{i} + r\vec{0} = \vec{0}$$

- observador em $O'\vec{I}\,\vec{J}\,\vec{K}$ (inercial)

$$\vec{r} = r\vec{i} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{i} + r\dot{\vec{i}} = 0\vec{i} + r\dot{\vec{i}} \neq \vec{0}$$

Como era de se esperar, os resultados foram diferentes. Ocorre que as Leis de Newton *somente são válidas para referenciais inerciais* e, assim, devemos obter a variação temporal do vetor posição nesse tipo de referencial, embora as componentes do vetor a ser derivado possam ser escritas em qualquer sistema de coordenadas, inercial ou não. O problema específico aqui é obter $\dot{\vec{i}}$.

Do ponto de vista do observador no sistema inercial, o versor $\vec{i}$ *varia no tempo* (ele muda de direção, mas não de módulo) e sua variação deve ser calculada. Para obtê-la, é necessário escrever os versores da base móvel em coordenadas da base fixa **em uma posição genérica** e efetuar a derivação no tempo a partir do ponto de vista do observador no referencial inercial:

$$\vec{i} = \cos\theta(t)\vec{I} + \operatorname{sen}\theta(t)\vec{J} \Rightarrow \dot{\vec{i}} = \underbrace{\left(-\operatorname{sen}\theta(t)\vec{I} + \cos\theta(t)\vec{J}\right)}_{\vec{j}\ \therefore\ \dot{\vec{i}} = \dot{\theta}(t)\vec{j}}\dot{\theta}(t)$$

$$\vec{j} = -\operatorname{sen}\theta(t)\vec{I} + \cos\theta(t)\vec{J} \Rightarrow \dot{\vec{j}} = \underbrace{\left(-\cos\theta(t)\vec{I} - \operatorname{sen}\theta(t)\vec{J}\right)}_{\vec{i}\ \therefore\ \dot{\vec{j}} = -\dot{\theta}(t)\vec{i}}\dot{\theta}(t)$$

$$\vec{k} = \vec{K} \Rightarrow \dot{\vec{k}} = \dot{\vec{K}}$$

Assim, para o observador no sistema inercial,

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}(t)\vec{j} \tag{5.2}$$

Mas

$$\vec{r} = r\vec{i} \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}(t)\vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \tag{5.3}$$

vetor que é ortogonal a $\vec{r}$. No caso geral, para qualquer vetor $\vec{a}$ cujo módulo seja constante, quando representado em coordenadas de um sistema não inercial cujo vetor rotação instantânea seja $\vec{\omega}$, vale a equação

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{a} \tag{5.4}$$

A partir da eq. 5.4, pode-se deduzir diretamente as equações dos campos de velocidade e de aceleração de um corpo quando seu movimento é descrito em componentes de um sistema não inercial solidário a esse corpo:

$$\vec{r} = (P - O) \Rightarrow \vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{5.5}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O)}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - O]}_{\vec{a}_n} \tag{5.6}$$

As eqs. 5.5 e 5.6 são idênticas às obtidas anteriormente. A fig. 9 mostra a composição de acelerações para um corpo rígido.

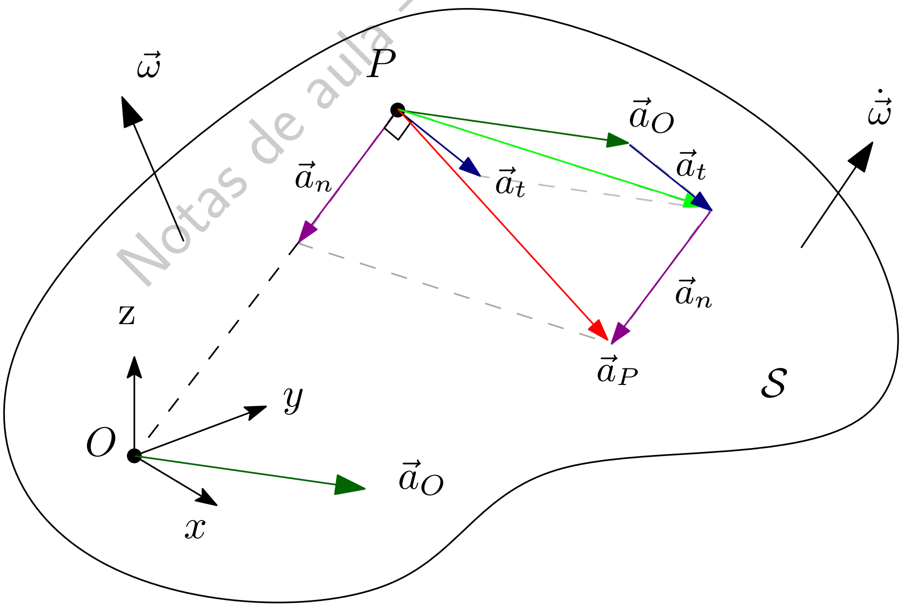


Figura 9: composição de acelerações em um corpo rígido.

6 Movimento plano

O movimento plano é um caso particular do movimento geral e pode ser identificado quando, para um corpo rígido, o produto escalar da velocidade de qualquer de seus pontos P pelo seu vetor rotação instantânea $\vec{\omega}$, $\vec{v}_P \bullet \vec{\omega} = 0$ *durante todo o movimento*. Para entender o movimento plano:

- supondo-se $P,\ O\ \forall, \in$ plano. Em qualquer situação, é válida a equação do campo de velocidades $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)$;
- se o movimento é plano, $\vec{v}_P, \vec{v}_O, \vec{\omega} \wedge (P - O)\ \in$ plano ;
- como $\vec{\omega} \wedge (P - O) \in$ plano e $(P - O) \in$ plano $\Rightarrow \vec{\omega} \perp$ plano;
- como $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ (por hipótese), todo o movimento ocorre em torno de um *eixo instantâneo de rotação*, EIR.

O traço do EIR no plano do movimento é um ponto cuja velocidade é *instantaneamente* nula e recebe um nome especial: **centro instantâneo de rotação, CIR**. O CIR, traço do EIR no plano do movimento, é o ponto de velocidade mínima, no caso, *zero*. Isso significa que, naquele instante, todos os pontos pertencentes a um plano do corpo rígido (que representa o movimento de **todo** o corpo) ou à sua extensão hipotética sem massa, *efetuam ato de movimento de rotação em torno do CIR*.

Assim, conforme mostra a fig. 10, o corpo rigido pode ser estudado a partir do movimento de uma "placa" representativa de uma seção reta do corpo que se desloca paralelamente a um dado plano e sempre ortogonalmente à sua velocidade e aceleração angulares, $\vec{\omega}$ e $\dot{\vec{\omega}}$.

6.1 Métodos de obtenção do CIR

1. tendo $\vec{v}_O\ \forall\ O\ \in \mathcal{S}$ ou a uma extensão hipotética sem massa, diretamente a partir da equação do EHI:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_{CIR} = \vec{0} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (E - O) \tag{6.1}$$

$$CIR = O + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{||\vec{\omega}||^2} \quad \text{(note que se fez } \lambda = 0 \text{ pois o movimento se dá no plano)}$$

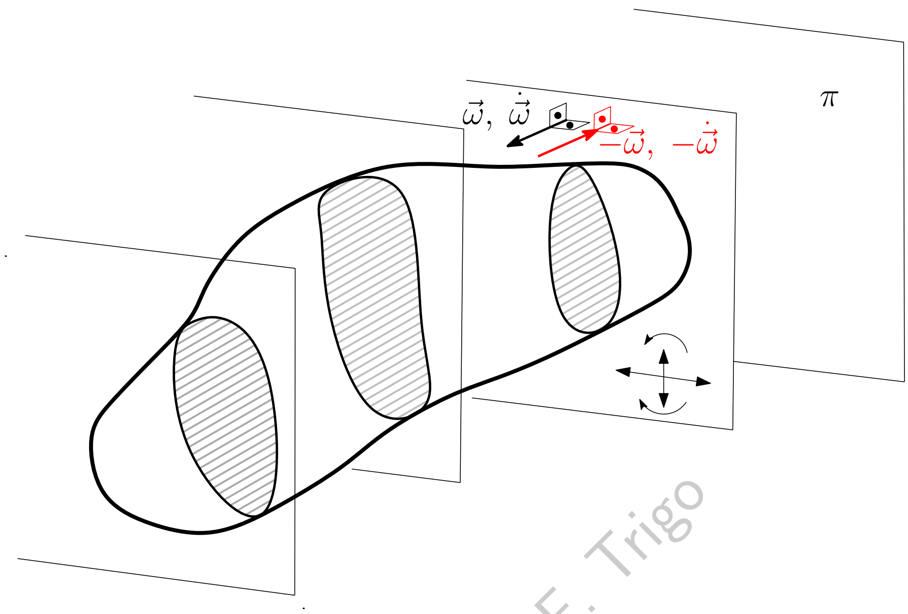
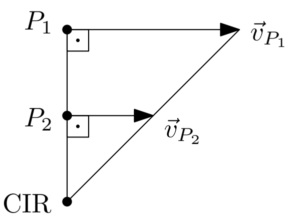


Figura 10: representação do movimento plano. Qualquer plano seccional do corpo que seja paralelo ao plano π realiza um movimento plano.

2. conhecidas as direções das velocidades de 2 pontos P_1 e P_2 do corpo rígido, *desde que não sejam paralelas*, basta traçar perpendiculares às direções dessas velocidades. O ponto de encontro das perpendiculares é o CIR.

3. se $\vec{v}_{P_1} \parallel \vec{v}_{P_2}$, o CIR estará na interseção da reta que passa por P_1 e P_2 com aquela que une as extremidades dos vetores $\vec{v}_{P_1}$ e $\vec{v}_{P_2}$, vide fig. 11.



$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_1 - CIR) \qquad \vec{v}_{P_2} = \vec{\omega} \wedge (P_2 - CIR)$$
$$||\vec{\omega}|| = \frac{||\vec{v}_{P_1}||}{||(P_1 - CIR)||} \qquad ||\vec{\omega}|| = \frac{||\vec{v}_{P_2}||}{||(P_2 - CIR)||}$$

$$||\vec{v}_{P_1}||.||(P_2 - CIR)|| = ||\vec{v}_{P_2}||.||(P_1 - CIR)||$$

Figura 11: detreminação do CIR para velocidades paralelas.

Portanto, para não violar a propriedade de corpo rígido, quando 2 pontos possuem velocidades paralelas, ou estão na mesma reta ortogonal às respectivas velocidades ou as velocidades são iguais e o corpo executa ato de movimento de translação.

7 Campo de acelerações no movimento plano

No movimento plano, os vetores rotação e aceleração angular serão sempre ortogonais ao plano. Voltando à fig. 8 (b), na qual o plano do movimento é admitido Oxy, utilizando os versores da base móvel, vamos efetuar a derivação dos vetores posição e velocidade do ponto P em relação ao tempo *e por um observador no referencial inercial*:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (P - O) = r\vec{i} \\
\vec{v}_P &= \vec{v}_O + \dot{r}\vec{i} + r\dot{\vec{i}} \\
\vec{v}_P &= \vec{v}_O + \vec{0} + r\vec{\omega} \wedge \vec{i} \\
\vec{v}_P &= \vec{v}_O + r\omega\vec{k} \wedge \vec{i} \\
\vec{v}_P &= \vec{v}_O + \omega r\vec{j}
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Derivando novamente em relação ao tempo,

$$\begin{aligned}
\vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\omega}r\vec{j} + \omega r\dot{\vec{j}} \\
\vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\omega}r\vec{j} + \omega r(\omega\vec{k} \wedge \vec{j}) \\
\vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\omega}r\vec{j} - \omega^2 r\vec{i}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Comparando as eqs. 5.6 do movimento geral e 7.2 do movimento plano, concluímos que

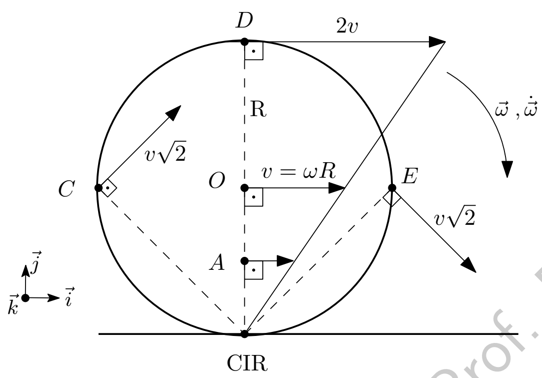
$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} \sim \dot{\omega}r\vec{j} = \ddot{\theta}(t)r\vec{j} &\quad \text{componente tangencial ao redor de } O \\
\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}] \sim -\omega^2 r\vec{i} = -\dot{\theta}^2(t)r\vec{i} &\quad \text{componente normal ao redor de } O
\end{aligned}$$

A componente normal é responsável por modificar a direção do vetor velocidade instantânea, ao passo que a componente tangencial modifica seu módulo. <u>Observação importante</u>: **não** se tratam de componentes intrínsecas, uma vez que **não** houve parametrização da trajetória de nenhum ponto material genérico P.

Salienta-se também que a aceleração de um ponto qualquer de um corpo rígido em movimento plano é a soma da aceleração do polo (no caso, O) com a que teria o ponto P caso o movimento fosse de rotação em torno de um eixo ortogonal ao plano do movimento e passando pelo polo O. Em outras palavras, a aceleração de um ponto é igual à de outro ponto mais sua **aceleração ao redo**r deste último.

Um caso particular de grande interesse no movimento plano é o de um disco ou esfera que rola sem escorregamento sobre uma superfície horizontal com velocidade e aceleração angulares instantâneas $\omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$ e $\dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k}$.

A fig. 12 mostra essa situação e o respectivo campo de velocidades. O CIR possui velocidade nula e, a partir do conhecimento da geometria do corpo, a obtenção de velocidades para quaisquer outros pontos é imediata.



$$\vec{v}_O = \vec{v}_{CIR} - \omega\vec{k} \wedge (O - CIR)$$
$$\vec{v}_O = \vec{v}_{CIR} - \omega\vec{k} \wedge R\vec{j}$$
$$\vec{v}_O = \omega R\vec{i}$$

Figura 12: campo de velocidades e CIR para um disco rolando sem escorregamento sobre uma superfície plana.

Para as acelerações a tarefa é mais complexa, principalmente para o cálculo da **aceleração do CIR**. Vamos obtê-la em dois casos:

- 1a. hipótese: a aceleração angular é *nula*, ou seja, o centro do disco (ponto O) se desloca com *velocidade* constante. Podemos obter a aceleração do CIR a partir da equação geral do campo de acelerações:

$$\vec{a}_{CIR} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (CIR - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (CIR - O)]$$
$$\vec{a}_{CIR} = \vec{0} + \vec{0} \wedge (-R\vec{j}) + (-\omega\vec{k}) \wedge \left[(-\omega\vec{k}) \wedge (-R\vec{j})\right]$$
$$\vec{a}_{CIR} = \omega^2 R\vec{j} \tag{7.3}$$

- 2a. hipótese: a aceleração angular não é instantaneamente nula. A pergunta natural é: não é possível obter a aceleração do CIR simplesmente derivando sua velocidade? A resposta é *sim*, mas com muita cautela. Como a velocidade do CIR é nula, o erro que se comete é derivar essa velocidade e concluir que também a aceleração é nula. Isso ocorre sempre que se tenta derivar um vetor em uma posição **particular** (geralmente, quando estes são instantaneamente nulos ou ocupando posições com geometria muito particular, por exemplo, formando ângulos retos com outras direções principais). Assim, para efetuar a derivação desse vetor, vamos calcular a velocidade de um ponto muito próximo ao CIR, mas não o próprio e, após isso, derivá-lo para obter sua aceleração. Como mostrado na fig. 13, o ponto escolhido é A. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (A - O) \\
&\vec{v}_O = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (O - CIR) = -\omega\vec{k} \wedge R\vec{j} = \omega R\vec{i} \\
\Rightarrow\ &\vec{v}_A = \omega R\vec{i} + (-\omega\vec{k}) \wedge R(-\operatorname{sen}\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}) \\
&\vec{v}_A = (\omega R - \omega R\cos\theta)\vec{i} + \omega R\operatorname{sen}\theta\vec{j} \\
&\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(\omega R - \omega R\cos\theta)\vec{i} + \omega R\operatorname{sen}\theta\vec{j}\right] \\
&\vec{a}_A = (\dot{\omega}R - \dot{\omega}R\cos\theta + \omega R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta)\vec{i} + (\dot{\omega}R\operatorname{sen}\theta + \omega R\dot{\theta}\cos\theta)\vec{j}
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\dot{\theta} = \omega$, vamos levar a última expressão ao limite em que $\theta \to 0$. Com isso temos:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}_{A\to CIR} = (\dot{\omega}R - \dot{\omega}R) + 0)\vec{i} + (0 + \omega^2 R)\vec{j} \\
&\vec{a}_{CIR} = \omega^2 R\vec{j} \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

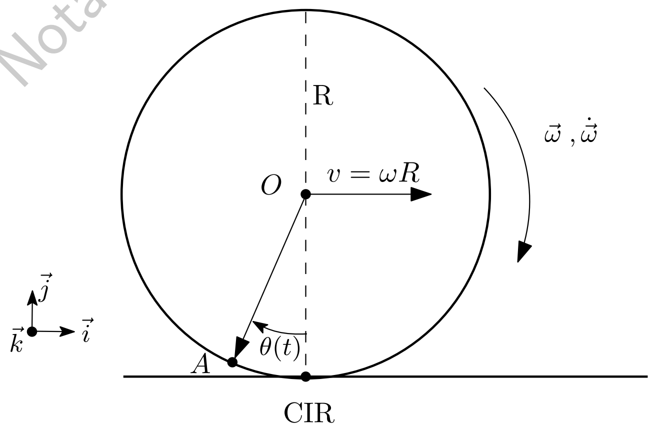


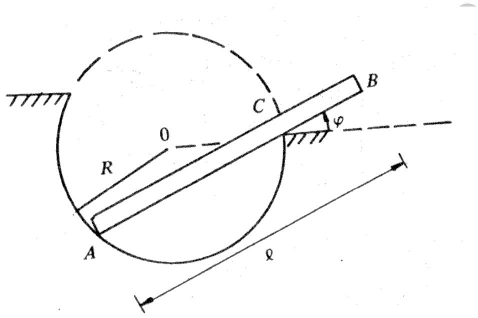
Figura 13: obtenção da aceleração do CIR quando a aceleração angular não é instantaneamente nula.

Conclusão: no movimento de rolamento sem escorregamento de um disco sobre uma superfície plana, a aceleração do CIR é *centrípeta*, independentemente de sua aceleração angular. Tente responder a seguinte questão: por quê não pode haver componente tangencial de aceleração quando o CIR coincide com o ponto de contato de rolamento sem escorregamento entre duas superfícies?

Exemplos: movimento plano, CIR, campo de acelerações

1 ([3], 9.3, pg 269)

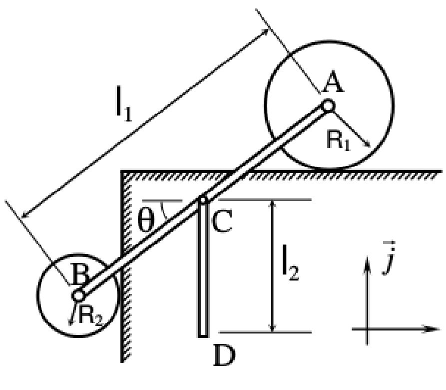
A barra AB da figura escorrega sobre o ponto C da circunferência fixa de centro O e raio R. A extremidade A da barra percorre a mesma circunferência com velocidade de módulo constante V Pedem-se, nesse instante: (a) o CIR da barra; (b) o vetor rotação da barra; (c) $\vec{v}_B$ e $\vec{a}_B$; (d) $\vec{v}_C$ e $\vec{a}_C$ para $C \in$ barra.



2 (q1, P2, 2008)

1ª Questão (3,5 pontos)
Os discos de raio R_1 e R_2 rolam sem escorregar e estão sempre em contato com a superfície mostrada na figura. A barra CD está articulada ao centro da barra AB, de forma que permanece sempre paralela ao versor $\vec{j}$. Sabendo que o vetor de rotação do disco com centro em A (de raio R_1) vale $\omega_1 \vec{k}$, constante, determine:

(a) A velocidade $\vec{v}_A$ do ponto A.
(b) O centro instantâneo de rotação da barra AB.
(c) O vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB e o vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ do disco com centro em B.
(d) A velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D.



Diversos

Com os conhecimentos adquiridos até aqui, vocês devem ser capazes de fazer até o exercício 19 da lista 2. Em especial, 10, 12, 15, 17, 19.

8 Composição de movimentos

8.1 Definições

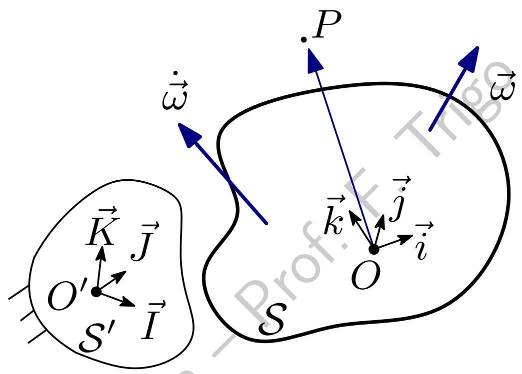


Figura 14: composição de movimentos de P.

De acordo com a fig 14, consideram-se dois sistemas de referência: (i) o corpo rígido $\mathcal{S}'$, fixo no espaço inercial, cujo sistema de coordenadas e respectiva base associada é $O'\ \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$, e (ii) o corpo rígido $\mathcal{S}$, móvel, que possui rigidamente ligado um sistema de coordenadas e respectiva base associada $O\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Considera-se, ainda, um ponto P genérico, móvel no espaço tridimensional e que não está ligado nem a $\mathcal{S}$ e nem a $\mathcal{S}'$.

Definir o movimento de $\mathcal{S}$ em relação a $\mathcal{S}'$ equivale a fornecer a velocidade da origem O e o vetor rotação instantânea $\vec{\omega}$ de $\mathcal{S}$. O vetor $\vec{\omega}$ pode ser descrito em relação a qualquer dos sistemas de referência como, por exemplo, em coordenadas do sistema de referência rigidamente ligado a $\mathcal{S}$, cujo movimento se deseja definir.

Movimento relativo:

é o movimento que P possui quando observado por um observador que é solidário a $\mathcal{S}$;

Movimento de arrastamento:

é o movimento de P em relação a $\mathcal{S}'$ quando se supõe P rigidamente ligado a $\mathcal{S}$. Movimento de arrastamento é, portanto, o movimento que o ponto P teria caso pertencesse a $\mathcal{S}$ a partir do ponto de vista (= observado por) de um observador em $\mathcal{S}'$.

Movimento absoluto ou resultante:

é o movimento de P com respeito a $\mathcal{S}'$, isto é, como observado por um observador em $\mathcal{S}'$.

8.2 Composição de posições, velocidades e acelerações

1. composição dos vetores de posição:

   da fig. 14 tem-se

$$\begin{aligned} (P-O') &= (O-O') + (P-O) \text{ ou} \\ \vec{r}_P &= \vec{r}_O + \vec{r}_{P/O} \end{aligned} \tag{8.1}$$

2. composição de velocidades:

   com $(P-O) = \vec{r}_{P/O} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, efetua-se a derivação desse vetor a partir do ponto de vista de um observador em $\mathcal{S}'$: tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(P-O') &= \frac{d}{dt}(O-O') + \frac{d}{dt}(P-O) \\ \vec{v}_P - \vec{v}_{O'} &= \vec{v}_O - \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} \end{aligned} \tag{8.2}$$

   Observa-se que, como o ponto P **não pertence** a $\mathcal{S}$, os termos $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ **não se anulam**, pois existe a liberdade de movimento de P em relação a O. Assim,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\vec{\omega} \wedge \vec{i} + y\vec{\omega} \wedge \vec{j} + z\vec{\omega} \wedge \vec{k}$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge x\vec{i} + \vec{\omega} \wedge y\vec{j} + \vec{\omega} \wedge z\vec{k}$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$
$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge (P - O)$$
$$\underbrace{\vec{v}_P}_{\vec{v}_{P,abs}} = \underbrace{\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O)}_{\vec{v}_{P,arr}} + \underbrace{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}_{\vec{v}_{P,rel}} \tag{8.3}$$

Para um observador solidário a $\mathcal{S}$ $(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$, a velocidade observada de P é a derivada do vetor de posição de P com respeito a $\mathcal{S}$, *como se $\mathcal{S}$ fosse fixo no espaço inercial*. Essa componente da velocidade de P é denominada *velocidade relativa* de P e representada por $\vec{v}_{P,rel}$ ou $\vec{v}_{P,r}$. Assim,

$$\vec{v}_{P,rel} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{8.4}$$

No movimento de arrastamento, P é suposto rigidamente ligado a $\mathcal{S}$, que é um corpo rígido e para o qual pode ser utilizada a fórmula fundamental da cinemática do corpo rígido. A velocidade de arrastamento de P, representada por $\vec{v}_{P,arr}$ ou $\vec{v}_{P,a}$ é calculada como se P e O pertencessem ao mesmo corpo rígido:

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) \tag{8.5}$$

Finalmente, a velocidade absoluta, representada por $\vec{v}_{P,abs}$ ou simplesmente $\vec{v}_P$ é aquela observada a partir de $\mathcal{S}'$ e é dada por

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel} \tag{8.6}$$

3. composição de acelerações:

efetua-se a derivação do vetor velocidade absoluta expresso na eq. 8.3 a partir do ponto de vista de um observador em $\mathcal{S}'$:

$$\dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_O + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge (P - O)\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right)$$
$$\dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - O) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) + \dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}) + \\
&\quad (\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}) + \dot{x}\vec{\omega} \wedge \vec{i} + \dot{y}\vec{\omega} \wedge \vec{j} + \dot{z}\vec{\omega} \wedge \vec{k} \\
&\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge (x\vec{\omega} \wedge \vec{i} + y\vec{\omega} \wedge \vec{j} + z\vec{\omega} \wedge \vec{k}) + \dot{\vec{v}}_{P,rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel}
\end{aligned}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \underbrace{\vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-O))}_{\vec{a}_{P,arr}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel}}_{\vec{a}_{P,C}} + \underbrace{(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})}_{\vec{a}_{P,rel}} \tag{8.8}$$

Para um observador em $\mathcal{S}$, a direção dos versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ não varia; assim, a aceleração de P, para um observador em O, seria

$$\vec{a}_{P,rel} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \tag{8.9}$$

denominada **aceleração relativa** de P. **Importante**: de acordo com a dedução acima, $a_{P,rel}$ concerne apenas à variação no módulo de $v_{P,rel}$, uma vez que, para um observador no referencial não inercial $\mathcal{S}$, $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ é **fixo**. Portanto, $\vec{a}_{P,rel}$ **é a derivada temporal de** $\vec{v}_{P,rel}$ **em relação ao seu próprio referencial**.

Por outro lado, se P estivesse rigidamente ligado a $\mathcal{S}$, sua aceleração, observada a partir de $\mathcal{S}'$ seria a que respeita a condição de corpo rígido, dada pela derivada da equação fundamental da cinemática do corpo rígido e expressa por

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-O)) \tag{8.10}$$

e denominada **aceleração de arrastamento** de P.

O termo restante,

$$\vec{a}_{P,C} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} \tag{8.11}$$

é **denominado aceleração complementar** ou **de Coriolis**.

A lei de composição de acelerações fica, portanto:

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,C} \tag{8.12}$$

Cabe salientar que a velocidade e a aceleração de arrastamento são calculadas fixando-se P em $\mathcal{S}'$. A velocidade e a aceleração relativas são obtidas considerando-se $\mathcal{S}$ fixo e ignorando-se $\mathcal{S}'$. A aceleração de

Coriolis, no entanto, depende da simultaneidade dos movimentos relativo e de arrastamento e não pode ser identificada em nenhum deles estudado separadamente.

A aceleração de Coriolis é nula nos seguintes casos:

1. $\vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{S}$ executa ato de movimento de translação;
2. $\vec{v}_{rel} = \vec{0} \Rightarrow$ o ponto P possui, no instante considerado, velocidade nula em relação a $\mathcal{S}$;
3. $\vec{v}_{rel} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow$ a velocidade de P em relação a $\mathcal{S}$ é paralela ao vetor de rotação de $\mathcal{S}$ (rotação de arrastamento)

8.3 Composição de movimentos para um corpo rígido

Até o presente vimos como se efetua a composição de movimentos para um ponto qualquer que não possui vínculo de corpo rígido com outros pontos. A situação em que o ponto sujeito ao movimento relativo pertence a um corpo rígido é estudada a seguir.

Considere um sistema de referência fixo (inercial) $O'\vec{I}\vec{J}\vec{K}$ ligado ao corpo rígido $\mathcal{S}'$, um sistema de referência $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ solidário a um corpo rígido $\mathcal{S}$ móvel e um corpo rígido Σ que efetua um movimento qualquer não rigidamente ligado a $\mathcal{S}$ ou a $\mathcal{S}'$.

Considere $\vec{\omega}_a$ o vetor rotação instantânea de $\mathcal{S}$ e $\vec{\omega}_r$ o vetor rotação instantânea de Σ. Finalmente, sejam P e Q dois pontos quaisquer pertencentes a Σ. Essa situação é mostrada na fig. 15.

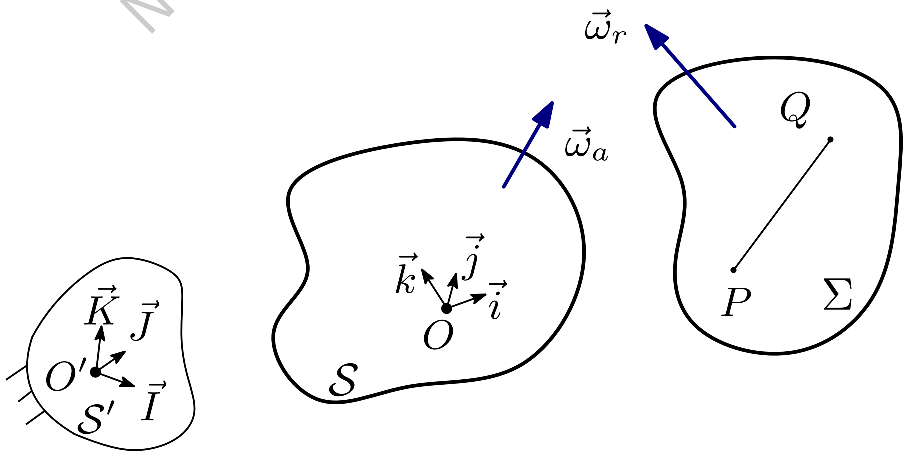


Figura 15: composição de movimentos para um corpo rígido.

Definem-se:

- $\vec{v}_{P,rel}$: velocidade de P com respeito a $\mathcal{S}$
- $\vec{v}_{Q,rel}$: velocidade de Q com respeito a $\mathcal{S}$
- $\vec{v}_{P,arr}$: velocidade de arrastamento de P
- $\vec{v}_{Q,arr}$: velocidade de arrastamento de Q
- $\vec{v}_{P,abs}$, $\vec{v}_{Q,abs}$: velocidades absolutas de P e Q
- $\vec{\omega}$: vetor rotação absoluta de Σ
- $\vec{\omega}_r$: vetor rotação de Σ com respeito ao referencial móvel, $\mathcal{S}$ (vetor rotação relativa)
- $\vec{\omega}_a$: vetor rotação de arrastamento de $\mathcal{S}$ com respeito ao referencial fixo, $\mathcal{S}'$

O objetivo aqui é obter uma expressão para o vetor rotação absoluta $\vec{\omega}$, conhecidas as demais grandezas vetoriais acima.

Como P e $Q \in \Sigma$, pode-se utilizar a equação fundamental da cinemática do corpo rígido considerando os movimentos absoluto, relativo e de arrastamento:

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{Q,abs} + \vec{\omega} \wedge (P - Q) \tag{8.13}$$

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{Q,rel} + \vec{\omega}_r \wedge (P - Q) \tag{8.14}$$

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (P - O) \tag{8.15}$$

Da lei de composição de velocidades temos

$$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \tag{8.16}$$

Com (8.14) e (8.15) em (8.16) fica

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{Q,rel} + \vec{\omega}_r \wedge (P-Q) + \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (P-O) \\
&\qquad \text{mas } \ (P-O) = (P-Q) + (Q-O) \\
&\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{Q,rel} + \vec{\omega}_r \wedge (P-Q) + \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (P-Q) + \vec{\omega}_a \wedge (Q-O) \\
&\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (Q-O) + \vec{v}_{Q,rel} + (\vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r) \wedge (P-Q) \\
&\qquad \text{mas } \ \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (Q-O) + \vec{v}_{Q,rel} = \vec{v}_{Q,abs} \\
&\qquad \text{então } \ \vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{Q,abs} + (\vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r) \wedge (P-Q)
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Comparando a eq. 8.17 e a eq. 8.13 chega-se à **lei de composição de vetores rotação**:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a \tag{8.18}$$

Para obter a aceleração angular (ou rotacional), faremos a derivação da eq. 8.18 em relação ao tempo com respeito a um observador no referencial inercial $\mathcal{S}'$.

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a \tag{8.19}$$

A derivada da aceleração de arrastamento é a própria aceleração angular (ou rotacional) de arrastamento $\vec{\alpha}_a$. Quanto à aceleração angular relativa $\dot{\vec{\omega}}_r$, lembrando que

$$\vec{\omega}_r = \omega_{r_x}\vec{i} + \omega_{r_y}\vec{j} + \omega_{r_z}\vec{k}, \tag{8.20}$$

efetuemos a derivação com relação ao tempo com respeito ao referencial inercial $\mathcal{S}'$ e, portanto, considerando que todas as parcelas da eq. 8.20 **são variantes** sob esse ponto de vista:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{\omega}}_r &= \dot{\omega}_{r_x}\vec{i} + \omega_{r_x}\dot{\vec{i}} + \dot{\omega}_{r_y}\vec{j} + \omega_{r_y}\dot{\vec{j}} + \dot{\omega}_{r_z}\vec{k} + \omega_{r_z}\dot{\vec{k}} \\
\dot{\vec{\omega}}_r &= \dot{\omega}_{r_x}\vec{i} + \dot{\omega}_{r_y}\vec{j} + \dot{\omega}_{r_z}\vec{k} + \omega_{r_x}\vec{\omega}_a \wedge \vec{i} + \omega_{r_y}\vec{\omega}_a \wedge \vec{j} + \omega_{r_z}\vec{\omega}_a \wedge \vec{k} \\
\dot{\vec{\omega}}_r &= \dot{\omega}_{r_x}\vec{i} + \dot{\omega}_{r_y}\vec{j} + \dot{\omega}_{r_z}\vec{k} + \vec{\omega}_a \wedge \left(\omega_{r_x}\vec{i} + \omega_{r_y}\vec{j} + \omega_{r_z}\vec{k}\right) \\
\dot{\vec{\omega}}_r &= \underbrace{\dot{\omega}_{r_x}\vec{i} + \dot{\omega}_{r_y}\vec{j} + \dot{\omega}_{r_z}\vec{k}}_{\vec{\alpha}_r} + \vec{\omega}_a \wedge \underbrace{\left(\omega_{r_x}\vec{i} + \omega_{r_y}\vec{j} + \omega_{r_z}\vec{k}\right)}_{\vec{\omega}_r} \\
\dot{\vec{\omega}}_r &= \qquad \vec{\alpha}_r \qquad \vec{\omega}_a \qquad \vec{\omega}_r \\
\dot{\vec{\omega}}_r &= \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

Voltando à eq. 8.19, obtemos a **lei de composição de acelerações angulares**:

$$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}_a + \dot{\vec{\omega}}_r$$
$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_a + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r$$
$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_a + \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_C \tag{8.22}$$

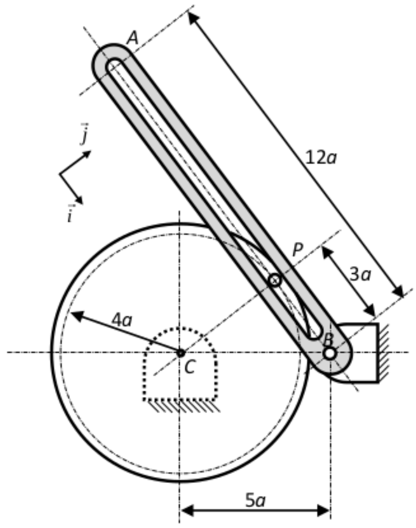
O vetor $\vec{\alpha}_C \triangleq \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r$ é a *aceleração complementar* (em alguns documentos no site da disciplina também denominada *de Résal*).

A aceleração relativa $\vec{\alpha}_r$ admite apenas a variação do módulo de $\vec{\omega}_r$, uma vez que, para um observador no referencial não inercial $\mathcal{S}$, $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ é fixo. Portanto, $\vec{\alpha}_r$ **é a derivada temporal de $\vec{\omega}_r$ com respeito ao seu próprio referencial**.

Exemplos: composição de movimentos

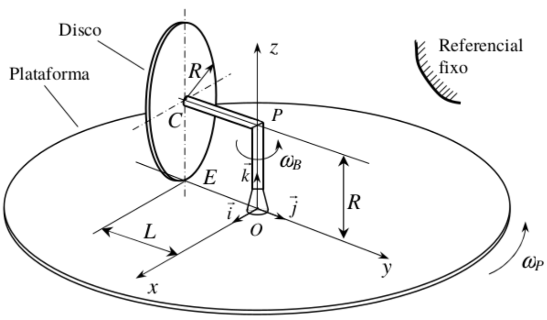
Exemplo 1: q2, p2 2011

A figura mostra parte de um mecanismo de retorno rápido. A roda de centro C está articulada em C, que é um ponto fixo. A peça AB está articulada em B, que é um ponto fixo. O pino P está preso no disco a uma distância $4a$ do centro C, e percorre o rasgo da peça AB. O vetor de rotação do disco de centro C é $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$, com $\omega > 0$, constante, e seu eixo de rotação passa pelo ponto C. A direção do versor $\vec{i}$ é sempre paralela ao segmento AB. Considere a peça AB como sendo o referencial móvel. No instante mostrado na figura, determine: (a) as velocidades absoluta ($\vec{v}_{P,abs}$), relativa ($\vec{v}_{P,rel}$) e de arrastamento ($\vec{v}_{P,arr}$) do pino P, bem como o vetor de rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da peça AB; (b) as acelerações absoluta ($\vec{a}_{P,abs}$), relativa ($\vec{a}_{P,rel}$), de arrastamento ($\vec{a}_{P,arr}$) e de Coriolis ($\vec{a}_{P,Cor}$) do pino P, bem como o vetor de aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}_{AB}$ da peça AB.



Exemplo 2: q2, psub 2009

O disco de centro C e raio R rola sem escorregar sobre a plataforma de centro O. O mancal em C, que conecta o disco à peça CPO, impõe que a face do disco se mantenha sempre ortogonal ao segmento CP durante o movimento. O eixo Oy está sempre na direção do segmento OE, onde E é o ponto de contato entre o disco e a plataforma, sendo os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ solidários à peça CPO. Em relação ao referencial fixo, os vetores de rotação da peça CPO e da plataforma são respectivamente, $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k}$ e $\vec{\omega}_P = \omega_P \vec{k}$, ambos constantes, e os pontos P e O são fixos. Adotando a peça CPO como referencial móvel, determine: (a) a velocidade $\vec{v}_C$ e a aceleração $\vec{a}_C$ absolutas do ponto C; (b) os vetores rotação absoluto $\vec{\omega}_D$, relativo $\vec{\omega}_{D,r}$ e de arrastamento $\vec{\omega}_{D,a}$ do disco; (c) as acelerações absoluta $\vec{a}_E$, de arrastamento $\vec{a}_{E,a}$ e a de Coriolis $\vec{a}_{E,C}$ do ponto E do disco.



Referências

[1] Beer, F. e Johnston, E.R. Mecânica Vetorial para Engenheiros, vol. I - Estática (5a. ed). São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

[2] França, L.N.F. e Matsumura, A.Z. Mecânica Geral. São Paulo: Edgar Blücher, 2011.

[3] Giacaglia, G.E.O. Mecânica Geral (10a. ed. revisada). Rio de Janeiro: Campus, 1982.

[4] Shames, I.H. Mecânica para Engenharia – Vol. 2 – Dinâmica. São Paulo: Prentice Hall, 2003.