PME 3100 – Mecânica I
Noções de Geometria Diferencial
Triedro de Frenet
Cinemática escalar do ponto

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

1 Noções de Geometria Diferencial

1.1 Curvas parametrizadas

Uma curva parametrizada é uma função definida em um intervalo J tal que a cada parâmetro u associa-se uma função $P(u)$

Ao *conjunto de pontos* $P(u)$ quando u percorre J denomina-se *traço da curva parametrizada* que possui u como parâmetro, vide fig. (1). Dado um sistema de referência tri-ortogonal $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ tem-se

$$(P(u) - O) = \vec{r}(u) \tag{1.1}$$

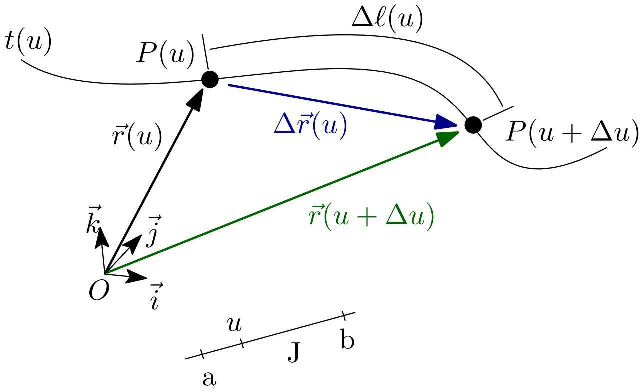

Figura 1: curva parametrizada.

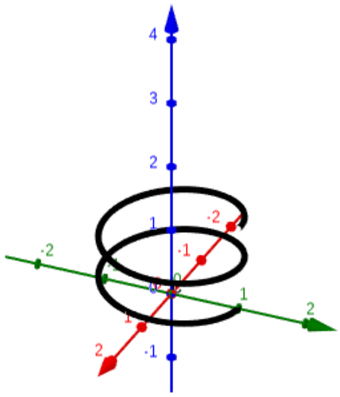

Figura 2: hélice cilíndrica circular reta.

Exemplo 1

Dado $0 \leq u \leq 2\pi$, as funções $x(u) = R\cos u$; $y(u) = R \operatorname{sen} u$; $z(u) = bu$, com R constante, definem uma hélice cilíndrica circular reta (vide fig. 2)

Exemplo 2

Um disco plano que rola sem escorregar sobre uma reta faz com que a curva descrita por um ponto de sua periferia seja uma ciclóide. Parametrizando-a tem-se, da fig 3,

$$x = \overline{OD} - \overline{BD} = \overline{OD} - \overline{EC}$$

mas

$\overline{OD} = Ru$ e $\overline{EC} = R\cos(u - \pi/2)$

$\therefore x = R(u - \operatorname{sen} u)$

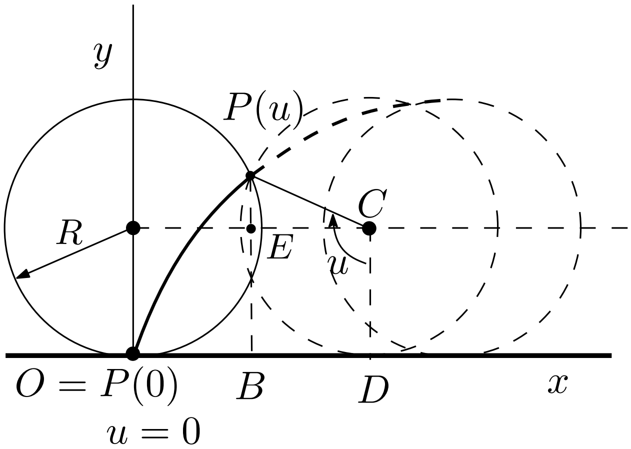

Figura 3: ciclóide.

Da mesma forma,

$$y = \overline{PE} + \overline{EB} \Rightarrow$$

$$y = R\,\mathrm{sen}(u - \pi/2) + R$$

$$\therefore y = R - R\cos u$$

Assim, $P(u) = R(1 - \mathrm{sen}\,u)\vec{i} + R(1 - \cos u)\vec{j}$

1.2 Componentes de arco parametrizado

Tendo como referência novamente a fig. (1), Dados $\{a, b\} \in J$, $a < b$, pontos de uma curva parametrizada P(u), à curva parametrizada obtida pela variação de u dá-se o nome de *arco parametrizado* dessa curva.

Deseja-se obter a dimensão do arco descrito entre a e b, função do parâmetro u. Novamente, em relação a um sistema de referência fixo, temos:

$$\Delta\vec{r}(u) = \vec{r}(u + \Delta u) - \vec{r}(u) \tag{1.2}$$

Porém

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\ell(u)}{||\Delta\vec{r}(u)||} = 1 \tag{1.3}$$

Assim, dividindo numerador e denominador por Δu vem:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta \ell(u)}{\Delta u}}{\frac{||\Delta \vec{r}(u)||}{\Delta u}} \Rightarrow \ell'(u) = ||\vec{r'}(u)|| \tag{1.4}$$

$$\therefore \quad \ell(u) = \int_u^{u+\Delta u} ||\vec{r'}(\nu)|| d\nu \tag{1.5}$$

Supondo que o ponto tenha se deslocado sobre a curva parametrizada entre os pontos a e b conforme mencionado anteriormente, basta utilizar a expressão acima para obter a dimensão procurada:

$$L|_a^b = \int_a^b ||\vec{r'}(u)|| du \tag{1.6}$$

Exemplo 3

Obter o comprimento do arco da cicloide do exemplo 2 quando $0 \leq u \leq 2\pi$.

Solução: do referido exemplo

$$\begin{aligned}
\vec{r}(u) &= R(u - \operatorname{sen} u)\vec{i} + R(1 - \cos u)\vec{j} \\
\vec{r'}(u) &= (R - R\cos u)\vec{i} + R \operatorname{sen} u \vec{j} \\
||\vec{r'}(u)|| &= (R^2 - 2R^2 \cos u + R^2 \cos^2 u + R^2 \operatorname{sen}^2 u)^{1/2} \\
||\vec{r'}(u)|| &= [2R^2(1 - \cos u)]^{1/2} \\
\ell(u) &= \int_0^{2\pi} [2R^2(1 - \cos u)]^{1/2} du
\end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos u = cos(u/2 + u/2) = \cos^2(u/2) - \operatorname{sen}^2(u/2)$ obtém-se, após algum trabalho algébrico, $L = \int_0^{2\pi} \ell(u) du = 8R$.

Percebe-se que o arco descrito pelo ponto material $P(u)$, que ocupa a periferia do disco, é maior que o comprimento da circunferência $(2\pi R)$

2 Triedro de Frenet (ou de Frenet-Serret)

Seja uma curva parametrizada $P(u)$, de domínio J, conforme mostrado na fig. (4). Deseja-se construir uma base ortonormal positiva (dextrógira) para cada $u \in J$. Esta base mostrará como $P(u)$ "caminha" ao longo de seu traço perante a variação de u.

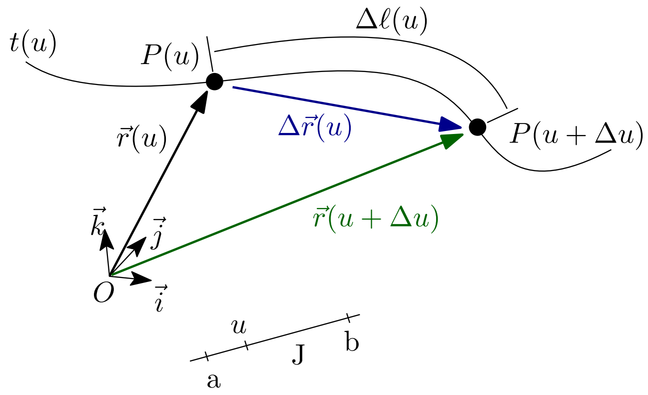

Figura 4: reprodução da fig. (1)

Considere $\vec{r}(u) = (P(u) - O)$, com O fixo, o vetor que define a posição de $P(u)$ sobre seu traço. Adota-se a hipótese $\vec{r'}(u) \neq \vec{0}, \forall u \in J$. Define-se o *vetor tangente ao traço* em $P(u)$ como

$$\vec{\tau} \triangleq \frac{\vec{r'}(u)}{||\vec{r'}(u)||} \tag{2.1}$$

Porém, em função da eq. 1.3, $||\vec{r'}(u)|| = \ell'(u)$ temos

$$\vec{\tau}(u) = \frac{\vec{r'}(u)}{\ell'(u)} \tag{2.2}$$

Considerando ainda $\vec{\tau'}(u) \neq \vec{0}, \forall u \in J$, define-se o *vetor normal principal* em $P(u)$ como

$$\vec{n} \triangleq \frac{\vec{\tau'}(u)}{||\vec{\tau'}(u)||} \tag{2.3}$$

Como $||\vec{\tau}(u)|| = 1$ (pois é um versor), podemos escrever

$$||\vec{\tau}(u)||^2 = \vec{\tau}(u)\bullet\vec{\tau}(u) = 1$$

Derivando essa expressão em relação a u tem-se

$$\vec{\tau'}(u)\bullet\vec{\tau}(u) + \vec{\tau}(u)\bullet\vec{\tau'}(u) = 0$$

$$\therefore \quad \vec{\tau'}(u) \perp \vec{\tau}(u), \tag{2.4}$$

ou seja, **um vetor de módulo constante é sempre ortogonal à sua derivada**. Como consequência,

$$\vec{n}(u) \parallel \vec{\tau'}(u) \Rightarrow \vec{n}(u) \perp \vec{\tau}(u) \tag{2.5}$$

Observação importante: dentre todos os infinitos versores ortogonais a $\vec{\tau}(u)$, $\vec{n}(u)$ está totalmente definido a partir da eq. 2.3.

Para finalizar a obtenção da base ortonormal que acompanha $P(u)$ sobre o traço da curva, define-se o vetor binormal ao traço em $P(u)$ como

$$\vec{b} \triangleq \vec{\tau} \wedge \vec{n} \tag{2.6}$$

Em alguns casos, a determinação do triedro de Frenet pela definição é trabalhosa devido à determinação de $\vec{\tau'}$. Uma forma alternativa de obter o triedro é mostrada a seguir.

Da eq. 2.2:

$$\begin{aligned}
\vec{r'}(u) &= \vec{\tau}(u)\ell'(u)\\
\vec{r''}(u) &= \vec{\tau'}(u)\ell'(u) + \vec{\tau}(u)\ell''(u)\\
\vec{r''}(u) &= \underbrace{||\vec{\tau'}(u)||\vec{n}(u)}_{\text{de 2.3}}\ell'(u) + \vec{\tau}(u)\ell''(u)
\end{aligned}$$

Calculemos

$$\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u) = \ell'(u)\vec{\tau}(u) \wedge \Big(\ell'(u)||\vec{\tau'}(u)||\vec{n}(u) + \ell''(u)\vec{\tau}(u)\Big)$$

$$\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u) = \ell'^2(u)||\vec{\tau'}(u)||\vec{b}(u) \tag{2.7}$$

O módulo desse vetor é, portanto,

$$||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)|| = \ell'^2(u)||\vec{\tau'}(u)||.1 \tag{2.8}$$

De 2.7 e 2.8,

$$\vec{b} = \frac{\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)}{\ell'^2(u)||\vec{\tau'}(u)||} \Rightarrow \vec{b} = \frac{\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)}{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||} \tag{2.9}$$

A expressão 2.9 fornece uma maneira de obter o triedro de Frenet sem a necessidade de calcular $\vec{\tau'}(u)$ ou seu módulo, desde que obedecida a seguinte sequência:

1. obter $\vec{r'}(u)$ e $||\vec{r'}(u)||$ para calcular $\vec{\tau}(u)$ (eq. 2.1);

2. obter $\vec{r''}(u)$, $\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)$, $||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||$ e $\vec{b}$ (eq. 2.9);

3. obter $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$.

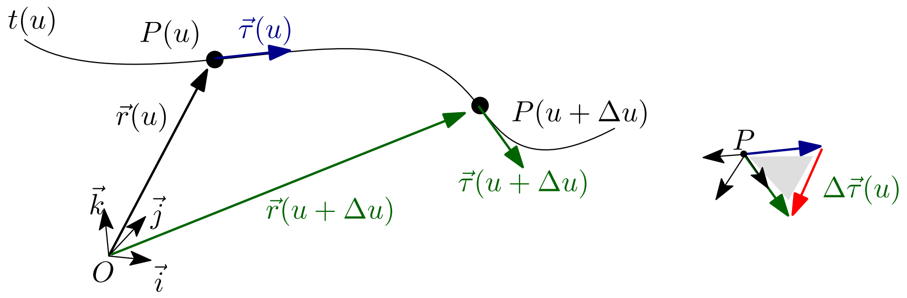

Figura 5:

3 Fórmulas de Frenet

3.1 Nomenclatura

Considere a fig. 5. Os versores $\vec{\tau}(u)$ e $\vec{\tau}(u + \Delta u)$ são tangentes ao traço em dois pontos distintos. Supondo um plano que passa por P e é paralelo ao plano definido por $\vec{\tau}(u)$ e $\vec{\tau}(u+\Delta u)$, este irá conter $\Delta\vec{\tau}(u) = \vec{\tau}(u + \Delta u) - \vec{\tau}(u)$. No limite em que Δu tende a zero,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{\tau}(u + \Delta u) - \vec{\tau}(u)}{\Delta u} = \vec{\tau}'(u), \tag{3.1}$$

essa derivada é ortogonal a $\vec{\tau}(u)$ e pertence ao plano formado por $\vec{\tau}(u)$ e $\vec{\tau}'(u)$. Ora, como, por definição, $\vec{n}$ é paralela a $\vec{\tau}'(u)$ em $P(u)$, segue que $P(u)$, $\vec{\tau}(u)$ e $\vec{n}(u)$ formam um plano; este plano é denominado *plano osculador*.

Tendo em conta a base tri-ortonormal $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, outros dois planos são definidos:

- *plano normal*: formato por $P(u)$, $\vec{n}(u)$ e $\vec{b}(u)$;
- *plano retificante*: formado por $P(u)$, $\vec{\tau}(u)$ e $\vec{b}(u)$;

Os três planos são mostrados na fig. 6.

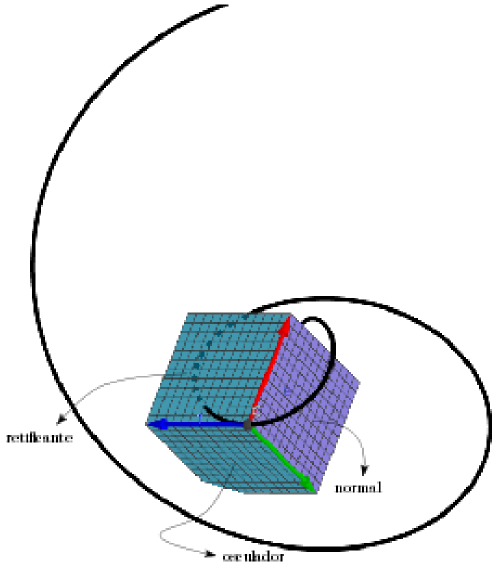

Figura 6: Triedro de Frenet e planos osculador, normal e retificante.

3.2 Curvatura e torção: as fórmulas de Frenet

Curvatura é o conceito envolvido na mudança de direção/orientação do traço de uma curva parametrizada visando a *quantificação* dessa condição. Seja o traço $P(u)$ da fig. 7 Percebe-se que, para $\Delta u \to 0$, $\Delta\vec{\tau}_2 < \Delta\vec{\tau}_1$ e, como ambos, no referido limite, possuem direção paralela (e coincidente) com as respectivas normais sobre os dois traços em $P(u)$, é de se esperar que a razão $\frac{||\Delta\vec{\tau}||}{\Delta\ell}$ forneça uma

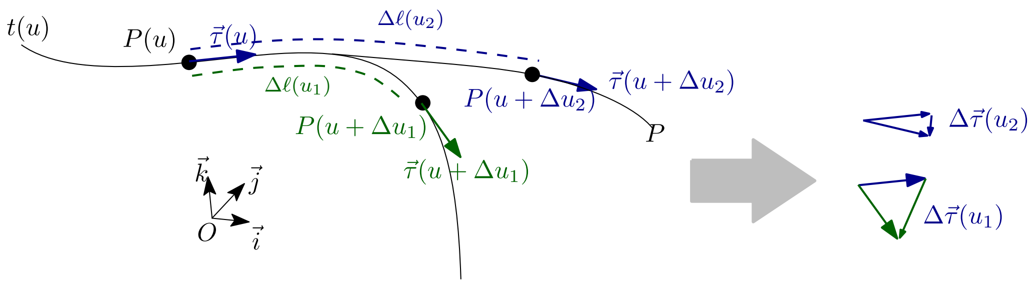

Figura 7: curvatura de uma curva.

indicação do "dobramento"da curva no espaço em $P(u)$. Para incluir o parâmetro u, definem-se

$$c(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\frac{||\Delta\vec{\tau}(u)||}{|\Delta u|}}{\frac{\Delta\ell}{|\Delta u|}}$$

$$c(u) \triangleq \frac{||\vec{\tau}'(u)||}{\ell'(u)}([m^{-1}]), \text{ curvatura do traço em } P(u) \tag{3.2}$$

$$\rho(u) \triangleq \frac{1}{c(u)}, ([m]) \text{ raio de curvatura do traço em } P(u) \tag{3.3}$$

É interessante obter $c(u)$ a partir de $\vec{r}(u)$: de 3.2, $||\vec{\tau}'(u)|| = c(u).\ell'(u)$. Por outro lado, de 2.8

$$||\vec{\tau}'(u)|| = \frac{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||}{\ell'^2(u)} \tag{3.4}$$

Assim,

$$c(u) = \frac{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||}{\ell'^3(u)} \tag{3.5}$$

Porém, como $\ell'(u) = ||\vec{r}'(u)||$,

$$c(u) = \frac{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||}{||\vec{r'}(u)||^3} \tag{3.6}$$

A primeira fórmula de Frenet é obtida a partir de $c(u)$ da seguinte forma:

$$\text{de } 2.3: \vec{\tau'}(u) = ||\vec{\tau'}(u)||\vec{n}$$
$$\text{com } 3.2: \vec{\tau'}(u) = c(u)\ell'(u)\vec{n}$$
$$\text{com } 1.2: \vec{\tau'}(u) = c(u)||\vec{r'}(u)||\vec{n} \qquad \textbf{1a. fórmula de Frenet} \tag{3.7}$$

Torção é a medida de quanto o traço da curva parametrizada se "torce"no espaço, levando consigo o plano osculador. Para tanto, estuda-se a variação do versor normal ao plano osculador, o vetor $\vec{b}(u)$, binormal. Por definição, $\vec{b}(u)\bullet\vec{\tau}(u) = 0$. Derivando essa expressão em relação a u temos:

$$\vec{b'}(u)\bullet\vec{\tau}(u) + \vec{b}(u)\bullet\vec{\tau'}(u) = 0. \text{ Como } \vec{\tau'}(u) = c(u)||\vec{r'}(u)||\vec{n} \text{ então } \vec{b}(u)\bullet\vec{\tau'}(u) = 0 \Rightarrow$$
$$\vec{b'}(u)\bullet\vec{\tau}(u) = 0 \tag{3.8}$$

A partir daqui, iremos suprimir a notação de função explícita na variável u para simplificar a notação. Lembrando que $\vec{b'}\bullet\vec{b} = 0$ (pois $||\vec{b}||$ é constante) e escrevendo $\vec{b'}$ em termos de suas projeções no triedro de Frenet vem

$$\vec{b'} = \underbrace{(\vec{b'}\bullet\vec{\tau})}_{=0}\vec{\tau} + (\vec{b'}\bullet\vec{n})\vec{n} + \underbrace{(\vec{b'}\bullet\vec{b})}_{=0}\vec{b}$$

$$\therefore \quad \vec{b'} = (\vec{b'}\bullet\vec{n})\vec{n} \tag{3.9}$$

A torção é definida como

$$\vec{\gamma} \triangleq \frac{\vec{b'}\bullet\vec{n}}{\ell'} \tag{3.10}$$

e, como $||\vec{r'}|| = \ell'$,

$$\vec{b'}(u) = \gamma(u)||\vec{r'}(u)||\,\vec{n} \qquad \textbf{3a. fórmula de Frenet} \tag{3.11}$$

Para obter a 2a. fórmula, utiliza-se a decomposição de $\vec{n'}$ em termos do triedro de Frenet conforme mostrado a seguir.

$$\vec{n'} = (\vec{n'}\bullet\vec{\tau})\vec{\tau} + \underbrace{(\vec{n'}\bullet\vec{n})}_{=0}\vec{n} + (\vec{n'}\bullet\vec{b})\vec{b} \tag{3.12}$$

Como

$$\vec{n}\bullet\vec{\tau} = 0 \Rightarrow$$
$$\vec{n'}\bullet\vec{\tau} + \vec{n}\bullet\vec{\tau'} = 0 \Rightarrow$$
$$\vec{n'}\bullet\vec{\tau} = -\vec{n}\bullet\vec{\tau'} \tag{3.13}$$

Utilizando a 1a. fórmula,

$$\vec{n'}\bullet\vec{\tau} = -c||\vec{r'}||\vec{n}\bullet\vec{n} = -c||\vec{r'}|| \tag{3.14}$$

De

$$\vec{n}\bullet\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{n'}\bullet\vec{b} + \vec{n}\bullet\vec{b'} = 0 \quad \text{e com a 3a. fórmula}$$
$$\vec{n'}\bullet\vec{b} = -||\vec{r'}||\gamma\vec{n}\bullet\vec{n} = -||\vec{r'}||\gamma \tag{3.15}$$

Finalmente, substituindo 3.14 e 3.15 em 3.12 obtém-se a 2a. fórmula de Frenet:

$$\vec{n}'(u) = -c(u)||\vec{r}'(u)||\vec{\tau} - \gamma(u)||\vec{r}'(u)||\vec{b}(u) \qquad \textbf{2a. fórmula de Frenet} \tag{3.16}$$

Resumindo, as fórmulas de Frenet são:

$$\vec{\tau}'(u) = c(u)||\vec{r}'(u)||\vec{n}$$
$$\vec{n}'(u) = -c(u)||\vec{r}'(u)||\vec{\tau} - \gamma(u)||\vec{r}'(u)||\vec{b}(u)$$
$$\vec{b}'(u) = \gamma(u)||\vec{r}'(u)||\ \vec{n}$$

Observação: normalmente, parametriza-se a curva de tal forma que $||\vec{r}'(u)|| = 1$.

4 Velocidades e acelerações de um ponto material – expressões intrínsecas

Quando as componentes de velocidade e aceleração são dadas em termos do triedro de Frenet, denominam-se *intrínsecas*, pois dependem explicitamente apenas da trajetória. Observe a fig. 8 (a). Dado um ponto P que percorre uma trajetória à medida que transcorre o tempo, definem-se o vetor velocidade $\vec{v}(t)$ e o vetor aceleração $\vec{a}(t)$ como

$$\vec{v}(t) \triangleq \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{4.1}$$
$$\vec{a}(t) \triangleq \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}(t) \tag{4.2}$$

Para que seja possível parametrizar velocidades e acelerações em termos do arco percorrido sobre a

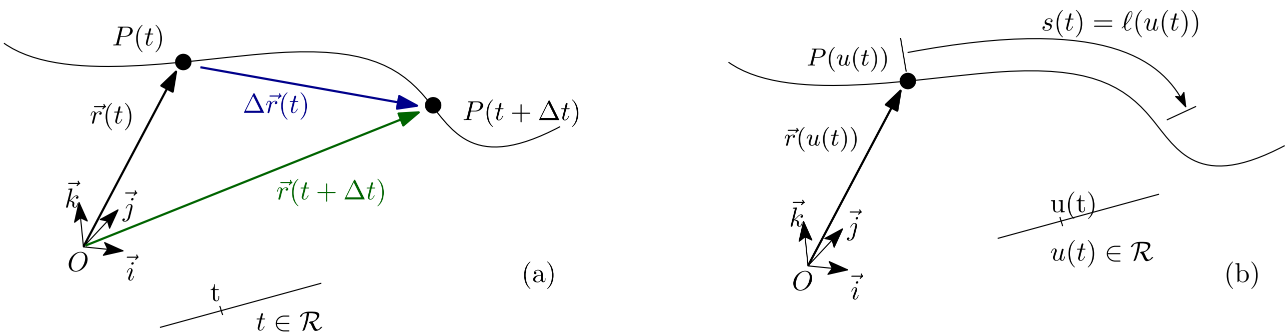

Figura 8: (a) variação vetorial de posição; (b) parametrização da trajetória.

trajetória, vamos adotar uma curva parametrizada em u, parâmetro da curva, porém estabelecer que u é, ele próprio, uma função do tempo, conforme mostra a fig. 8(b).

Assim, a cada $u(t)$ corresponde uma *abscissa curvilínea* $s(t) = \ell(u(t))$ (por definição), que é percorrida pelo ponto material P sobre a trajetória $P(u(t))$.

Vamos obter, então, as componentes intrínsecas da velocidade e da aceleração a partir das respectivas definições. Para a velocidade,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(u(t))}{dt} = \vec{r'}(u).\dot{u}(t)$$

$$\text{Como} \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{r'}(u)}{||\vec{r'}(u)||}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = ||\vec{r'}(u)||.\dot{u}(t)\vec{\tau} \tag{4.3}$$

Definindo a coordenada curvilínea $s(t) \triangleq \ell(u(t))$ sobre a curva parametrizada e efetuando sua derivação em relação ao tempo obtemos

$$\dot{s}(t) = \ell'(u).\dot{u}(t) \ \text{ e, como } \ ||\vec{r'}(u)|| = \ell'(u)$$

de 4.3 resulta

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{\tau}, \tag{4.4}$$

com $\dot{s}(t) \triangleq$ *velocidade escalar.*

Para obter a aceleração, derivamos diretamente a eq. 4.4 em relação ao tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{s}(t)\vec{\tau} + \dot{s}(t).\vec{\tau'}(u).\dot{u}(t) \tag{4.5}$$

Como $\vec{\tau'}(u) = c(u)||\vec{r'}(u)||\vec{n}$ (1a. fórmula de Frenet),

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\vec{\tau} + \dot{s}(t)c(u)\underbrace{||\vec{r'}(u)||.\dot{u}(t)}_{\dot{s}(t)}\vec{n}(u)$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\vec{\tau} + \dot{s}^2(t)c(u)\vec{n} \quad \text{ou} \tag{4.6}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\vec{\tau} + \frac{v^2(t)}{\rho(u)}\vec{n} \tag{4.7}$$

com $\dot{v}(t) \triangleq a_\tau(t)$ ***aceleração tangencial*** e $\frac{v^2(t)}{\rho(u)} \triangleq a_n(t)$ ***aceleração normal***.

Caso já tenham sido obtdos os vetores $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em expressões explícitas, isto é, caso estejam disponíveis expressões explícitas no tempo (sem o parâmetro $c(u)$, pode-se utilizar a equação 3.6 deduzida anteriormente,

$$c(u) = \frac{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||}{||\vec{r'}(u)||^3}$$

para obter $c(u)$, bastando para isso associar $\vec{v}(t) \sim \vec{r'}(u)$ e $\vec{a}(t) \sim \vec{r''}(u)$, resultando em

$$c(u) = \frac{||\vec{v}(t) \wedge \vec{a}(t)||}{||\vec{v}(t)||^3} \tag{4.8}$$

Exemplos resolvidos

1. Determinar o triedro de Frenet para a hélice cilíndrica dada por $\vec{r}(u) = R\cos u\ \vec{i} + R\,\mathrm{sen}\, u\ \vec{j} + bu\ \vec{k}$

   Solução

Vamos utilizar a sequência dada ao final da pg. 6.

$$\vec{r'}(u) = -R \operatorname{sen} u\, \vec{i} + R \cos u\, \vec{j} + b\, \vec{k}$$

$$\vec{\tau}(u) = \frac{\vec{r'}(u)}{||\vec{r'}(u)||} = \frac{-R \operatorname{sen} u\, \vec{i} + R \cos u\, \vec{j} + b\, \vec{k}}{(b^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\vec{r''}(u) = -R \cos u\, \vec{i} - R \operatorname{sen} u\, \vec{j}$$

$$\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u) = bR(\operatorname{sen} u\, \vec{i} - \cos u\, \vec{j}) + R^2(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)\vec{k}$$

$$\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u) = bR(\operatorname{sen} u\, \vec{i} - \cos u\, \vec{j}) + R^2\vec{k}$$

$$||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)|| = \left(b^2R^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2R^2 \cos^2 u + R^4\right)^{1/2} = R\left(b^2 + R^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{b}(u) = \frac{\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)}{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||} = \frac{bR(\operatorname{sen} u\, \vec{i} - \cos u\, \vec{j}) + R^2\vec{k}}{R\,(b^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\vec{b}(u) = \frac{b(\operatorname{sen} u\, \vec{i} - \cos u\, \vec{j}) + R\vec{k}}{(b^2 + R^2)^{1/2}} \quad \text{(verifica-se que } ||\vec{b}(u)|| = 1\text{)}$$

$$\vec{n}(u) = \vec{b}(u) \wedge \vec{\tau}(u) = \frac{1}{(b^2 + R^2)^{1/2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b \operatorname{sen} u & -b \cos u & R \\ -R \operatorname{sen} u & R \cos u & b \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}(u) = \frac{-\left(b^2 + R^2\right) \cos u\, \vec{i} - \left(b^2 + R^2\right) \operatorname{sen} u\, \vec{j}}{(b^2 + R^2)} \Rightarrow \vec{n}(u) = -\cos u\, \vec{i} - \operatorname{sen} u\, \vec{j}$$

2. (exemplo 16.4.1, pg 186, ref. [2]) O movimento de um ponto é dado por $\vec{r}(u(t)) = \operatorname{sen}(1 - t^2)\vec{i} + \cos(1 - t^2)\vec{j}$. Determinar a expressão intrínseca da aceleração.

Solução

Seja $u(t) = 1 - t^2 \Rightarrow \vec{r}(u) = \operatorname{sen} u\vec{i} + \cos u\vec{j}$

$$\dot{s}(t) = \ell'(u).\dot{u}(t) = ||\vec{r'}(u)||.\dot{u}(t)$$

$$||\vec{r'}(u)|| = ||\cos u\vec{i} - \operatorname{sen} u\vec{j}|| = 1$$

$$\dot{s}(t) = 1.(-2t) = -2t \Rightarrow \vec{v}(t) = -2t\, \vec{\tau}\ [m/s]$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}\vec{n}$$

Cálculo de ρ:

$$\frac{1}{\rho(u)} = c(u) = \frac{||\vec{r'}(u) \wedge \vec{r''}(u)||}{||\vec{r'}(u)||^3}$$

$$c(u) = \frac{||(\cos u\vec{i} - \operatorname{sen} u\vec{j}) \wedge (-\operatorname{sen} u\vec{i} - \cos u\vec{j}||}{||\cos u\vec{i} - \operatorname{sen} u\vec{j}||^3} = \frac{||(-\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u)\vec{k}||}{1} = \frac{1}{1}$$

$$c(u) = 1\ [m^{-1}] \Rightarrow \rho = 1\ [m]$$

Com isso,

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{a}(t) = -2\vec{\tau} + 4t^2\vec{n}\ [m/s^2]$$

É interessante notar o que irá acontecer caso os versores do triedro de Frenet venham a ser calculados. Tente obtê-los e substituir nas expressões da velocidade e aceleração intrínsecas acima.

3. Um ponto P se move em relação ao sistema $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ segundo as equações paramétricas escalares

$$x(t) = 2 + \cos t$$

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} t)$$

$$z(t) = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} t)$$

Obter $\vec{v}, \vec{a}, a_\tau, a_n, v, \rho$

Solução

Seja $u = \operatorname{sen} t \Rightarrow \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \Rightarrow \cos t = (1 - u^2)^{1/2}$ Portanto,

$$x(u) = 2 + (1 - u^2)^{1/2}$$

$$y(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + u)$$

$$z(u) = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + u)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k})$$

$$\vec{v}(t) = -\operatorname{sen} t\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(-\operatorname{sen} t\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\vec{k})$$
$$\vec{a}(t) = -\cos t\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\vec{k}$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \ell'(u).\dot{u}(t) \quad \text{velocidade escalar}$$
$$\vec{r}(u) = 2 + (1-u^2)^{1/2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(2+u)\vec{j} + 4 - \frac{\sqrt{2}}{2}(2+u)\vec{k}$$
$$\vec{r'}(u) = \frac{1}{2}(-2u)(1-u^2)^{-1/2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$
$$\ell'(u) = ||\vec{r'}(u)|| = \left(\frac{u^2}{1-u^2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\right)^{1/2} = \left(\frac{u^2+1-u^2}{1-u^2}\right)^{1/2}$$
$$\ell'(u) = \left(\frac{u^2+1-u^2}{1-u^2}\right)^{1/2}$$
$$v(t) = \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 t)^{1/2}}.\dot{u}(t) = \frac{1}{\cos t}.\cos t = 1$$
$$\therefore\ v(t) = 1\ [m/s]$$

Se fosse também solicitado o vetor $\vec{v}(t)$ em componentes do triedro de Frenet, bastaria escrever

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{\tau} = 1\vec{\tau}\ [m/s]$$

$$a_\tau(t) = \ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = 0 \quad \text{aceleração tangencial}$$

Para o cálculo da aceleração normal, $a_n = \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}$, é necessário primeiro obter o raio de curvatura,

$$\rho = \frac{||\dot{s}(t)||^3}{||\vec{v}\wedge\vec{a}||} = \frac{1}{||(-\operatorname{sen} t\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\vec{k}) \wedge (-\cos t\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\vec{k})||}$$
$$\rho = \frac{1}{\left(||\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}||\right)} = \frac{1}{1}$$
$$\rho = 1\ [m]$$

Assim

$$a_n = \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho} = \frac{1}{1} = 1\ [m/s^2] \quad \text{aceleração normal}$$

Se fosse também solicitado o vetor $\vec{a}(t)$ em componentes do triedro de Frenet, bastaria escrever

$$\vec{a}(t) = 0\vec{\tau} + 1\vec{n}\ [m/s^2]$$

5 Cinemática escalar

Conhecida a trajetória de um ponto, escolhe-se a origem a partir da qual, em sentido positivo, a posição do ponto sobre a trajetória fica determinada, como se a curva correspondente à trajetória fosse "esticada", definindo a chamada *coordenada curvilínea.*

Lei horária do movimento

É a função $s(t)$ que define a posição do ponto material (coordenada curvilínea) em função do tempo.

Velocidade escalar média

Define-se a velocidade escalar média:

$$v_M \triangleq \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{5.1}$$

Velocidade escalar instantânea

Define-se a velocidade escalar instantânea:

$$v(t) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \tag{5.2}$$

Aceleração escalar média

Define-se a aceleração escalar média:

$$a_M \triangleq = \frac{\Delta v}{Deltat} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{5.3}$$

Aceleração escalar instantânea

Define-se a aceleração escalar instantânea:

$$a(t) \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) \tag{5.4}$$

Problemas típicos em cinemática escalar

Os problemas típicos em cinemática escalar consistem em situações nas quais se procura a *lei horária do movimento*, supondo conhecida apenas a aceleração; para tanto, deve-se integrar as expressões da aceleração para se obter a lei horária. *Na prática, resolvem-se equações diferenciais.*

Visando evitar interpretações errôneas, antes de apresentar este tópico cabe destacar um ponto essencial, conforme discute a ref. [2].

Quando se menciona que "a velocidade v é função da posição s", trata-se do uso de linguagem com pouco rigor matemático. Ela denota uma simplificação que *pode ocorrer dependendo da relação particular entre essas grandezas.*

Na verdade, a variável presente em problemas de cinemática (e de dinâmica também) e que fornece a ligação entre s, v e a é sempre o tempo. Há, entretanto, casos particulares como mostra o exemplo a seguir. Suponhamos que $s(t) = e^{2t}$. Então, $v(t) = 2e^{2t} \Rightarrow v = 2s$, que é escrito por abuso de notação e carrega o sentido de que "v é função de s". O correto, entretanto, seria $v(t) = 2s(t)$.

Quando a situação particular permitir escrever $v = v(s)$, nunca devemos nos esquecer de que a velocidade é uma função do tempo e, portanto, se escrevermos $a = \frac{dv}{ds}$ simplesmente, estaremos incorrendo em erro. Perceba o que acontece fazendo isso no exemplo acima:

$$\begin{array}{rl} \text{cálculo correto} & s(t) = e^{2t} \Rightarrow v(t) = 2e^{2t} \Rightarrow a(t) = 4e^{2t} \Rightarrow a = 4s \\ \text{cálculo incorreto} & s(t) = e^{2t} \Rightarrow v(t) = 2e^{2t} \Rightarrow v = 2s \Rightarrow a = \dfrac{dv}{ds} \Rightarrow a = 2 \end{array}$$

Esclarecido este ponto, iremos analisar 3 casos em que a função de aceleração do ponto material, de acordo com o mencionado abuso de notação, é dada: $a = a(t)$, $a = a(v)$ e $a = a(s)$.

1. $a = a(t)$. Nesse caso, a aceleração é uma função explícita de t. Pode-se obter $v(t)$ e $s(t)$:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a(t)dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} d\zeta = \int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi$$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow ds(t) = v(t)dt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} d\zeta = \int_{t_0}^{t} v(\xi)d\xi$$

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\xi)d\xi$$

2. $a = a(s)$ Nesse caso, a aceleração é uma função explícita da posição. Pode-se obter $v(s)$:

$$a(s) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} = v.\frac{dv}{ds}$$

$$a(s)\ ds = v\ dv \Rightarrow \int_{s_0}^{s} a(\zeta)d\zeta = \int_{v_0}^{v} \xi\ d\xi$$

$$v^2(s) = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a(\zeta)d\zeta \qquad \textbf{\textit{equação de Torricelli generalizada}}$$

3. $a = a(v)$. Nesse caso, a aceleração é função explícita da velocidade. Pode-se obter t e $s(v)$:

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a(v)dt \Rightarrow dt = \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \int_{t_0} td\zeta = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(\xi)}d\xi$$

$$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(\xi)}d\xi$$

$$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \Rightarrow$$

$$a(v)ds = v\ dv \Rightarrow ds = \frac{v}{a(v)}dv \Rightarrow \int_{s_0}^{s} d\zeta = \int_{v_0}^{v} \frac{\xi}{a(\xi)}d\xi$$

$$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\xi}{a(\xi)}d\xi$$

Referências

[1] Giacaglia, G.E.O. Mecânica Geral (10a. ed. revisada). Rio de Janeiro: Campus, 1982.

[2] Boulos, P. & Zagotis. D.L. Mecânica e Cálculo – um curso integrado, Vol. 1. São Paulo: Edgar Blücher, 2a. ed, 2000.

[3] Hildebrand, F.B. Advanced Calculus for Applications. New York: Prentice-Hall, 2a. ed. 1976.