PME 3100 – Mecânica 1 – 2020

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

Universidade de São Paulo

Introdução

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
    - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:

Introdução

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
  - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:
    - no estudo dos corpos celestes, faz sentido que a Terra seja considerada uma "partícula"com massa concentrada em seu centro;

Introdução

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
  - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:
    - no estudo dos corpos celestes, faz sentido que a Terra seja considerada uma "partícula"com massa concentrada em seu centro;
    - para o estudo do movimento de um satélite artificial, a Terra modelada como acima é inconcebível.

Introdução

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
  - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:
    - no estudo dos corpos celestes, faz sentido que a Terra seja considerada uma "partícula"com massa concentrada em seu centro;
    - para o estudo do movimento de um satélite artificial, a Terra modelada como acima é inconcebível.

- Processo geral da Mecânica

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
  - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:
    - no estudo dos corpos celestes, faz sentido que a Terra seja considerada uma "partícula"com massa concentrada em seu centro;
    - para o estudo do movimento de um satélite artificial, a Terra modelada como acima é inconcebível.

- Processo geral da Mecânica
  - algum fenômeno suscita a curiosidade sobre o porquê de sua existência, os mecanismos de sua ocorrência e as consequências que gera;

Introdução

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
  - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:
    - no estudo dos corpos celestes, faz sentido que a Terra seja considerada uma "partícula"com massa concentrada em seu centro;
    - para o estudo do movimento de um satélite artificial, a Terra modelada como acima é inconcebível.

- Processo geral da Mecânica
  - algum fenômeno suscita a curiosidade sobre o porquê de sua existência, os mecanismos de sua ocorrência e as consequências que gera;
  - simplifica-se o universo físico através de um modelo matemático $\rightarrow$ habilidade do engenheiro;

Introdução

- Modelo: o que é *modelar* ou *elaborar um modelo*?
    - modelar é **desvincular objetos materiais de seus atributos reais que, para o estudo em questão, sejam irrelevantes**, por exemplo:
        - no estudo dos corpos celestes, faz sentido que a Terra seja considerada uma "partícula"com massa concentrada em seu centro;
        - para o estudo do movimento de um satélite artificial, a Terra modelada como acima é inconcebível.

- Processo geral da Mecânica
    - algum fenômeno suscita a curiosidade sobre o porquê de sua existência, os mecanismos de sua ocorrência e as consequências que gera;
    - simplifica-se o universo físico através de um modelo matemático $\rightarrow$ habilidade do engenheiro;
    - aplicação do raciocínio matemático para obter respostas às questões anteriores.

- Elementos da Mecânica
  - massa

Introdução

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento
  - continuidade

Introdução

- Elementos da Mecânica
    - massa
    - tempo
    - comprimento
    - continuidade
    - corpo rígido =

- Elementos da Mecânica
    - massa
    - tempo
    - comprimento
    - continuidade
    - corpo rígido = *continuidade*

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento
  - continuidade
  - corpo rígido $=$ *continuidade* $+$ *indeformabilidade*

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento
  - continuidade
  - corpo rígido = *continuidade* + *indeformabilidade*
  - referencial ou sistema de referência: é um conjunto de pontos que possuem distância fixa entre si com respeito ao tempo (portanto, **não** é necessariamente **fixo**);

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento
  - continuidade
  - corpo rígido = *continuidade* + *indeformabilidade*
  - referencial ou sistema de referência: é um conjunto de pontos que possuem distância fixa entre si com respeito ao tempo (portanto, **não** é necessariamente **fixo**);
    - qualquer corpo rígido pode ser um sistema de referência;

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento
  - continuidade
  - corpo rígido = *continuidade* + *indeformabilidade*
  - referencial ou sistema de referência: é um conjunto de pontos que possuem distância fixa entre si com respeito ao tempo (portanto, **não** é necessariamente **fixo**);
    - qualquer corpo rígido pode ser um sistema de referência;
    - não confundir sistema de referência com sistema de coordenadas. A um sistema de referência associam-se sistemas de coordenadas permitindo, dessa forma posicionar eventos.

- Elementos da Mecânica
  - massa
  - tempo
  - comprimento
  - continuidade
  - corpo rígido = *continuidade* + *indeformabilidade*
  - referencial ou sistema de referência: é um conjunto de pontos que possuem distância fixa entre si com respeito ao tempo (portanto, **não** é necessariamente **fixo**);
    - qualquer corpo rígido pode ser um sistema de referência;
    - não confundir sistema de referência com sistema de coordenadas. A um sistema de referência associam-se sistemas de coordenadas permitindo, dessa forma posicionar eventos.

- Elementos da Mecânica
  - exemplos de sistemas de coordenadas:
    - retangular (cartesiano);

- Elementos da Mecânica
  - exemplos de sistemas de coordenadas:
    - retangular (cartesiano);
    - polar no plano;

- Elementos da Mecânica
  - exemplos de sistemas de coordenadas:
    - retangular (cartesiano);
    - polar no plano;
    - cilíndrico;

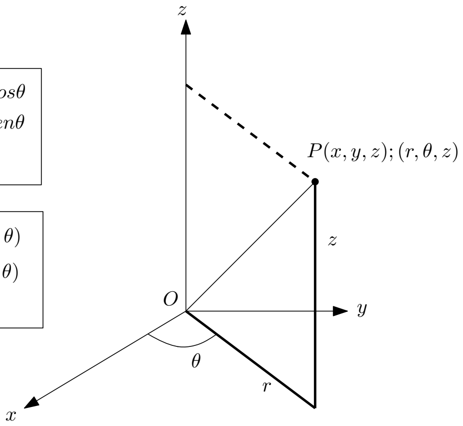
- Elementos da Mecânica
  - exemplos de sistemas de coordenadas:
    - retangular (cartesiano);
    - polar no plano;
    - cilíndrico;
    - esférico.

- Elementos da Mecânica
  - exemplos de sistemas de coordenadas:
    - retangular (cartesiano);
    - polar no plano;
    - cilíndrico;
    - esférico.
    - em Mecânica Analítica, fala-se em *coordenadas generalizadas.*

- Elementos da Mecânica
    - exemplos de sistemas de coordenadas:
        - retangular (cartesiano);
        - polar no plano;
        - cilíndrico;
        - esférico.
        - em Mecânica Analítica, fala-se em *coordenadas generalizadas.*

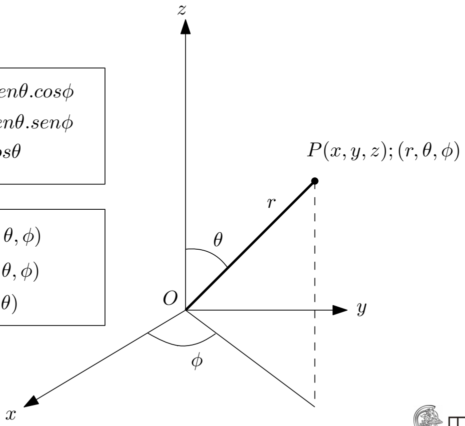
$$x = r.cos\theta$$
$$y = r.sen\theta$$
$$z = z$$

$$x = x(r, \theta)$$
$$y = y(r, \theta)$$
$$z = z$$



$$x = r.sen\theta.cos\phi$$
$$y = r.sen\theta.sen\phi$$
$$z = r.cos\theta$$

$$x = x(r, \theta, \phi)$$
$$y = y(r, \theta, \phi)$$
$$z = z(r, \theta)$$



- Elementos da Mecânica
  - Vetores: entes matemáticos que possuem módulo, direção e sentido e que se somam de acordo com a Lei do Paralelogramo. Classificam-se em 3 categorias:

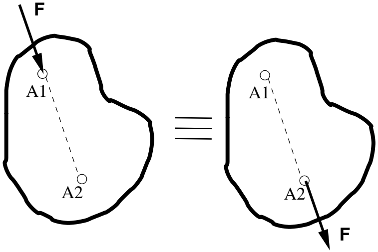
- Elementos da Mecânica
  - Vetores: entes matemáticos que possuem módulo, direção e sentido e que se somam de acordo com a Lei do Paralelogramo. Classificam-se em 3 categorias:
    - livres:

- Elementos da Mecânica
  - Vetores: entes matemáticos que possuem módulo, direção e sentido e que se somam de acordo com a Lei do Paralelogramo. Classificam-se em 3 categorias:
    - livres: binário (a ser estudado em breve);

- Elementos da Mecânica
    - Vetores: entes matemáticos que possuem módulo, direção e sentido e que se somam de acordo com a Lei do Paralelogramo. Classificam-se em 3 categorias:
        - livres: binário (a ser estudado em breve);
        - deslizantes:

- Elementos da Mecânica
  - Vetores: entes matemáticos que possuem módulo, direção e sentido e que se somam de acordo com a Lei do Paralelogramo. Classificam-se em 3 categorias:
    - livres: binário (a ser estudado em breve);
    - deslizantes: qualquer vetor que pode se mover ao longo de sua *linha de ação* sem modificar o efeito sobre o corpo ao qual é aplicado;

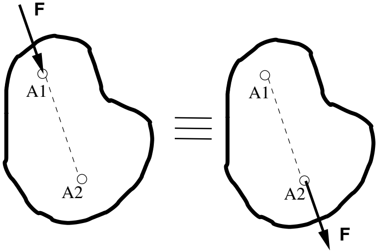
- Elementos da Mecânica
  - Vetores: entes matemáticos que possuem módulo, direção e sentido e que se somam de acordo com a Lei do Paralelogramo. Classificam-se em 3 categorias:
    - livres: binário (a ser estudado em breve);
    - deslizantes: qualquer vetor que pode se mover ao longo de sua *linha de ação* sem modificar o efeito sobre o corpo ao qual é aplicado;
    - aplicados: qualquer vetor cujo efeito sobre o corpo em que atua depende do ponto de aplicação. **Força é um vetor aplicado**.



Linha de ação de uma força é o vetor

$$\boxed{(X - P) = \lambda \vec{F}, \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}} \qquad (1)$$

A eq. 1 exprime o *Princípio da Transmissibilidade*
Em um corpo rígido, o vetor força é um vetor deslizante.

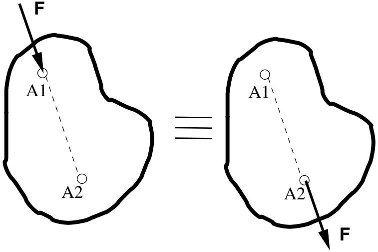


Na figura: $(A_2 - A_1) = \lambda\vec{F}$ ou

Linha de ação de uma força é o vetor

$$\boxed{(X - P) = \lambda\vec{F}, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}} \quad (1)$$

A eq. 1 exprime o *Princípio da Transmissibilidade*
Em um corpo rígido, o vetor força é um vetor deslizante.



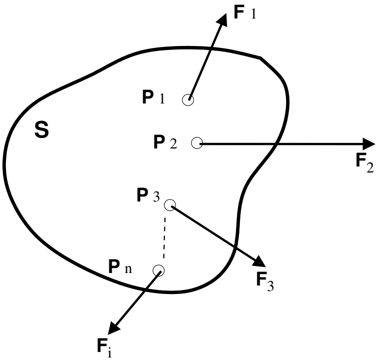
Linha de ação de uma força é o vetor

$$\boxed{(X - P) = \lambda \vec{F}, \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}} \tag{1}$$

A eq. 1 exprime o *Princípio da Transmissibilidade*
Em um corpo rígido, o vetor força é um vetor deslizante.

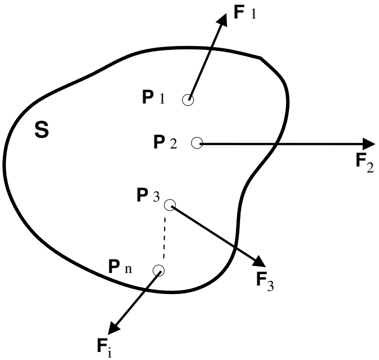
Na figura: $(A_2 - A_1) = \lambda \vec{F}$ ou
$(x_{A_2} - x_{A_1})\vec{i} + (y_{A_2} - y_{A_1})\vec{j} + (z_{A_2} - z_{A_1})\vec{k} = \lambda(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$

Sistemas de forças



Ao conjunto de forças que atuam sobre um corpo ou sobre um sistema de corpos, rígidos ou não, dá-se o nome de *sistema de forças*;

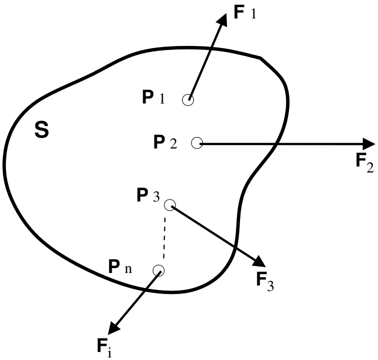
Sistemas de forças



Ao conjunto de forças que atuam sobre um corpo ou sobre um sistema de corpos, rígidos ou não, dá-se o nome de *sistema de forças*;

No caso da figura ao lado, o sistema de forças é $S = (\vec{F}_i, P_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sistemas de forças



Ao conjunto de forças que atuam sobre um corpo ou sobre um sistema de corpos, rígidos ou não, dá-se o nome de *sistema de forças*;

No caso da figura ao lado, o sistema de forças é $S = (\vec{F}_i, P_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

A *resultante* de um sistemas de forças é o vetor

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i} \tag{2}$$

A resultante (ou o vetor resultante) $\vec{R}$ **não é uma força** pois:

- força é vetor aplicado;

A resultante (ou o vetor resultante) $\vec{R}$ **não é uma força** pois:

- força é vetor aplicado;
- o vetor resultante, ao contrário da força, é decorrente de um conjunto de operações elementares com os vetores-força individuais e ...

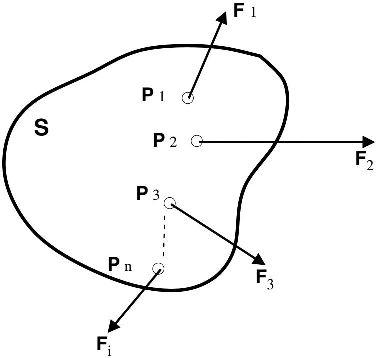
A resultante (ou o vetor resultante) $\vec{R}$ **não é uma força** pois:

- força é vetor aplicado;
- o vetor resultante, ao contrário da força, é decorrente de um conjunto de operações elementares com os vetores-força individuais e ...
- ... **não possui ponto de aplicação definido**. Portanto,

Sistemas de forças

A resultante (ou o vetor resultante) $\vec{R}$ **não é uma força** pois:

- força é vetor aplicado;
- o vetor resultante, ao contrário da força, é decorrente de um conjunto de operações elementares com os vetores-força individuais e ...
- **... não possui ponto de aplicação definido**. Portanto,
- $\vec{R}$ **é um vetor livre**.



Sistemas de forças

Dado um sistema ortogonal de referência e um sistema de coordenadas cartesianas associadas pode-se escrever

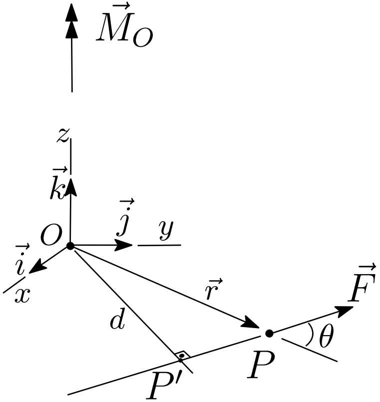
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{i=1}^{n} (F_{x_i}\vec{i} + F_{y_i}\vec{j} + F_{z_i}\vec{k}) \\ \Longrightarrow \vec{R} &= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \end{aligned}} \qquad (3)$$

com

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \qquad F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{y_i} \qquad F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{z_i}$$

Momento de um sistema de forças

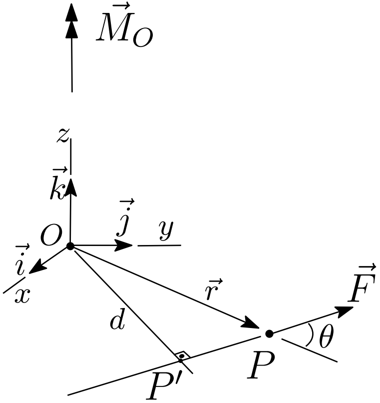
Momento de uma força



Define-se momento de uma força em relação a um pólo arbitrário como o vetor obtido pelo produto vetorial do vetor da posiçao relativa entre o ponto de aplicação da força e o pólo pelo vetor força propriamente dito.

$$\vec{M}_O \triangleq (P - O) \wedge \vec{F} \tag{4}$$

$$\vec{M}_O \triangleq \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{5}$$



Momento de um sistema de forças

Momento de uma força

- o sinal de $\vec{M}_O$ é dado pela regra da mão direita;
- $(P-O)\wedge\vec{F}$ terá mesma orientação de $\vec{k}$ se $(P-O)$, $\vec{F}$, $\vec{k}$ tiver orientação concordante com $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$.

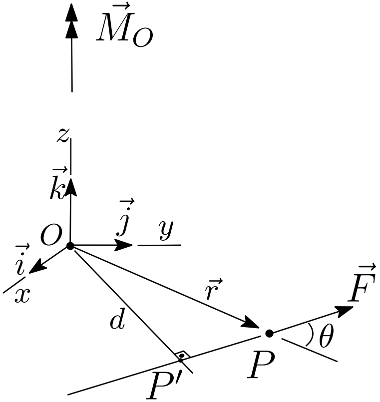
Como

$$||\vec{M}_O|| = (||(P-O)||)(||\vec{F}||)\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e}$$

$$||(P-O)||\,\mathrm{sen}\,\theta = d \Rightarrow$$

$$d = \frac{||\vec{M}_O||}{||\vec{F}||} \quad \text{ou}$$

$$||\vec{M}_O|| = d||\vec{F}||$$



Propriedades

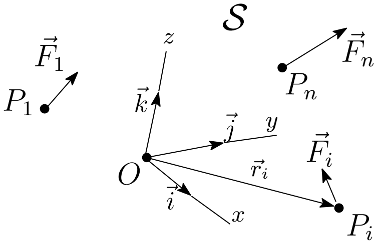
- $\vec{M}_O$ não se altera quando $\vec{F}$ se desloca sobre sua linha de ação. Prova: para $P' \in \lambda\vec{F}$

$$(P' - O) \wedge \vec{F} = \{(P' - P) + (P - O)\} \wedge \vec{F} \Rightarrow$$
$$(P' - P) \wedge \vec{F} + (P - O) \wedge \vec{F} = (P - O) \wedge \vec{F},$$

haja vista que $(P' - P) \wedge \vec{F} = \vec{0}$ pois $(P' - P) \parallel \vec{F}$.

Para um sistema $\mathcal{S} = (\vec{F}_i, P_i)$,

$$\boxed{\vec{M}_O \triangleq \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i} \qquad (6)$$

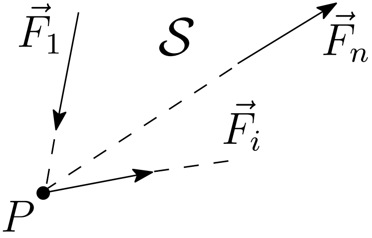


$$\vec{M}_O = (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + \ldots + (P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \ldots + (P_n - O) \wedge \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{\vec{F}_1,O} + \ldots \vec{M}_{\vec{F}_i,O} + \ldots \vec{M}_{\vec{F}_n,O}$$

Varignon (1654-1722): dado um sistema de forças concorrentes em um ponto P, $(\mathcal{S} = (\vec{F}_i, P))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, Varignon (1654-1722): dado um sistema de forças concorrentes em um ponto P, $(\mathcal{S} = (\vec{F}_i, P))$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

"o momento de um sistema de forças concorrentes em um ponto P com respeito a qualquer polo O é igual ao momento da resultante do sistema, suposta aplicada no ponto de concurso das forças, com respeito ao polo O;"



Prova: pela definição de momento de um sistema de forças em relação a um polo qualquer,

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (P - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{R}} \tag{7}$$

Dado $\mathcal{S} = (\vec{F}_i, P_i)$

Dado $\mathcal{S} = (\vec{F}_i, P_i)$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

Para outro polo, por exemplo para O'

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O') \wedge \vec{F}_i$$

Fazendo-se

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{n}(P_i - O') \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^{n}(P_i - O) \wedge \vec{F}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(P_i - O') - (P_i - O)] \wedge \vec{F}_i \\
&= (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i
\end{aligned}
$$

Fazendo-se

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_{O'} - \vec{M}_O &= \sum_{i=1}^{n} (P_i - O') \wedge \vec{F}_i - \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(P_i - O') - (P_i - O)] \wedge \vec{F}_i \\
&= (O - O') \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\therefore \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}} \tag{8}
$$

Consequências da fórmla de mudança de polo $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$:

Consequências da fórmla de mudança de polo $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$:

- se $\vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow$ o momento independe do polo escolhido;

Consequências da fórmla de mudança de polo $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$:

- se $\vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow$ o momento independe do polo escolhido;
- se $(O - O') \wedge \vec{R} = \vec{0}$ com $O \neq O'$ e $\vec{R} \neq \vec{0} \Longrightarrow (O - O') \parallel \vec{R}$.

Consequências da fórmla de mudança de polo $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$:

- se $\vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow$ o momento independe do polo escolhido;
- se $(O - O') \wedge \vec{R} = \vec{0}$ com $O \neq O'$ e $\vec{R} \neq \vec{0} \Longrightarrow (O - O') \parallel \vec{R}$.

  Prova: seja $(O - O') = \lambda\vec{R}$, λ constante e *com unidades consistentes*, ou seja $\frac{[m]}{[N]}$.

  Então $(O - O') \wedge \vec{R} = \lambda\vec{R} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

  Portanto: $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$

Consequências da fórmla de mudança de polo $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$:

- se $\vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow$ o momento independe do polo escolhido;
- se $(O - O') \wedge \vec{R} = \vec{0}$ com $O \neq O'$ e $\vec{R} \neq \vec{0} \Longrightarrow (O - O') \parallel \vec{R}$.

  Prova: seja $(O - O') = \lambda \vec{R}$, λ constante e *com unidades consistentes*, ou seja $\frac{[m]}{[N]}$.

  Então $(O - O') \wedge \vec{R} = \lambda \vec{R} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

  Portanto: $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$

- **invariante escalar**: multiplicando-se escalarmente a fórmula de mudança de polo por $\vec{R}$ em ambos os lados,

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + [(O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R}$$

$$(O - O') \wedge \vec{R} \perp \vec{R} \Longrightarrow$$

- **invariante escalar**: multiplicando-se escalarmente a fórmula de mudança de polo por $\vec{R}$ em ambos os lados,

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + [(O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R}$$

$$(O - O') \wedge \vec{R} \perp \vec{R} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \triangleq I \quad \textbf{invariante escalar}} \qquad (9)$$

- **invariante escalar**: multiplicando-se escalarmente a fórmula de mudança de polo por $\vec{R}$ em ambos os lados,

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} + [(O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R}$$

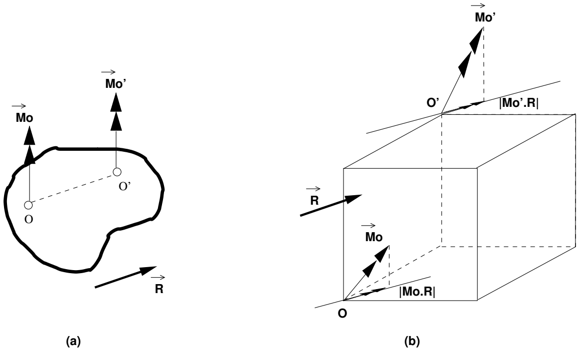
$$(O - O') \wedge \vec{R} \perp \vec{R} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \triangleq I \quad \textbf{invariante escalar}} \tag{9}$$

O ***invariante escalar*** será útil no estudo da ***redução de sistemas de forças***

I expressa o fato de que a projeção do vetor momento na direção do vetor resultante é constante

I **expressa o fato de que a projeção do vetor momento na direção do vetor resultante é constante**



Exemplos de aplicação

Dado um polo O e um eixo que passa por este ponto e é orientado por um versor $\vec{u}$, define-se momento de um sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ em relação ao eixo $O\vec{u}$ o **escalar**

$$\boxed{M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}} \tag{10}$$

Dado um polo O e um eixo que passa por este ponto e é orientado por um versor $\vec{u}$, define-se momento de um sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ em relação ao eixo $O\vec{u}$ o **escalar**

$$\boxed{M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}} \tag{10}$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \right) \cdot \vec{u} = M_u = \sum_{i=1}^{n} M_{u_i}$$

Dado um polo O e um eixo que passa por este ponto e é orientado por um versor $\vec{u}$, define-se momento de um sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ em relação ao eixo $O\vec{u}$ o **escalar**

$$\boxed{M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u}} \tag{10}$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \right) \cdot \vec{u} = M_u = \sum_{i=1}^{n} M_{u_i}$$

Na Mecânica, momentos de forças em relação a eixos são comumente denominados ***torques***.

Momento de um sistema de forças

Momento em relação a um eixo

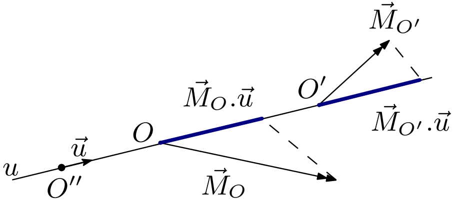
Para $O, O', \in O''\vec{u}$, $O' \neq O$:

$$M_{u'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} \Rightarrow$$

$$M_{u'} = [\vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u}$$

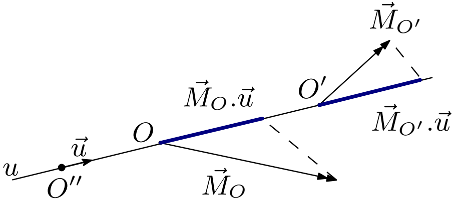
como $(O - O') \parallel O''\vec{u} \Rightarrow (O - O') \wedge \vec{R} \perp \vec{u}$

$$\Rightarrow [(O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u} = 0$$



Momento de um sistema de forças

Momento em relação a um eixo



Para $O, O', \in O''\vec{u}$, $O' \neq O$:

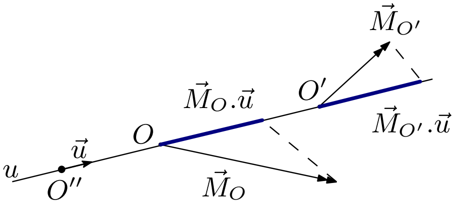
$$M_{u'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} \Rightarrow$$

$$M_{u'} = [\vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u}$$

como $(O - O') \parallel O''\vec{u} \Rightarrow (O - O') \wedge \vec{R} \perp \vec{u}$

$$\Rightarrow [(O - O') \wedge \vec{R}] \cdot \vec{u} = 0$$

$$\boxed{M_{u'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = M_u} \qquad (11)$$



- o momento em relação a um eixo é também um invariante escalar;
- *(justifica-se, assim, a nomenclatura)*;
- no SI, o momento possui unidade $[N.m]$

Casos clássicos (por simplicidade admite-se, $\mathcal{S}(\vec{F}, P)$)

- $\vec{F} \parallel \vec{u}$ ($\vec{F} = \lambda\vec{u}, \lambda \in R$) (caso 1)

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} = (P - O) \wedge \lambda\vec{u}$$

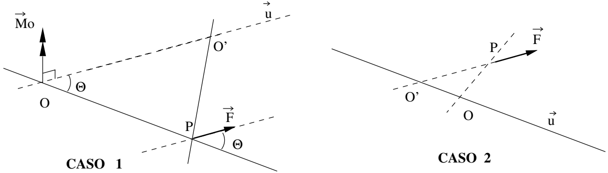
$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = [(P - O) \wedge \lambda\vec{u}] \cdot \vec{u} = 0$$

Casos clássicos (por simplicidade admite-se, $\mathcal{S}(\vec{F}, P)$)

- $\vec{F} \parallel \vec{u}$ $(\vec{F} = \lambda\vec{u}, \lambda \in R)$ (caso 1)

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} = (P - O) \wedge \lambda\vec{u}$$
$$M_u = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = [(P - O) \wedge \lambda\vec{u}] \cdot \vec{u} = 0$$

Conclusão: uma força cuja linha de ação é paralela à direção de determinado eixo não produz momento em relação a este eixo.



Casos clássicos (por simplicidade admite-se, $\mathcal{S}(\vec{F}, P)$)

- $(\vec{F}, P) \quad | \quad \vec{F} = \lambda(P - O')$ e $O' \in O\vec{u}$ (a linha de ação de $\vec{F}$ intercepta o eixo – caso 2)

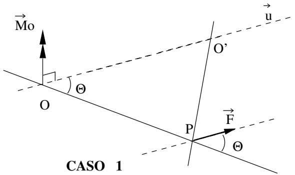
$$\vec{M}_{O'} = (P - O') \wedge \vec{F} \Rightarrow$$
$$M_{u'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = [(P - O') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} = \vec{0} \cdot \vec{u} = M_u = 0,$$

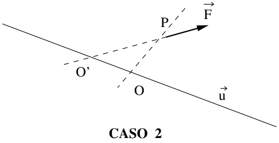
Casos clássicos (por simplicidade admite-se, $\mathcal{S}(\vec{F}, P)$)

- $(\vec{F}, P) \quad | \quad \vec{F} = \lambda(P - O')$ e $O' \in O\vec{u}$ (a linha de ação de $\vec{F}$ intercepta o eixo – caso 2)

$$\vec{M}_{O'} = (P - O') \wedge \vec{F} \Rightarrow$$
$$M_{u'} = \vec{M}_{O'} \cdot \vec{u} = [(P - O') \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u} = \vec{0} \cdot \vec{u} = M_u = 0,$$

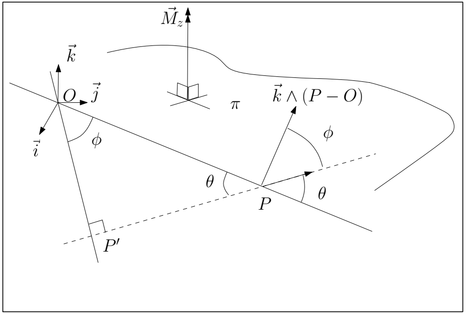
Conclusão: uma força cuja linha de ação intercepta determinado eixo não produz momento em relação a este eixo.





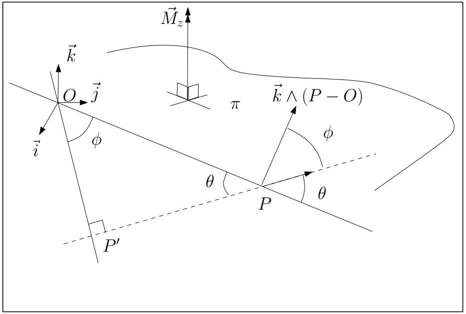
Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo



Problema: obter $||\vec{M}_z||$

Considera-se



Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo

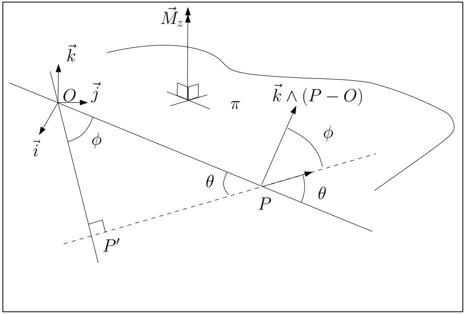
Problema: obter $||\vec{M}_z||$

Considera-se

- π, plano $\perp Oz$

Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo



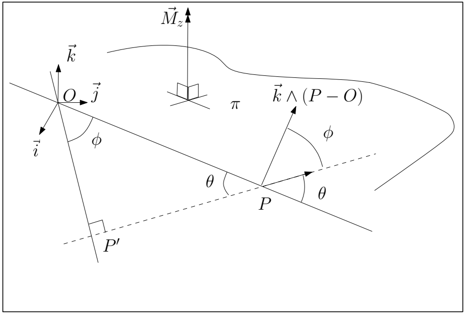
Problema: obter $||\vec{M}_z||$

Considera-se

- π, plano $\perp$ Oz
- traço de z no plano π é O

Momento de um sistema de forças

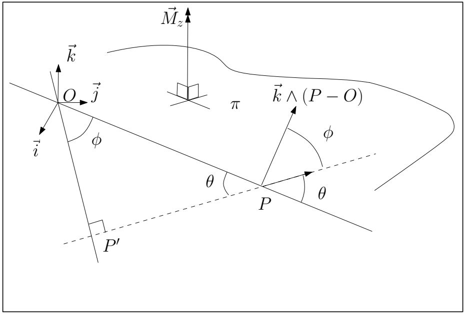
Módulo do momento em relação a um eixo



Problema: obter $||\vec{M}_z||$

Considera-se

- π, plano $\perp Oz$
- traço de z no plano π é O
- $(\vec{F}, P) \in \pi$ e ortogonal a Oz



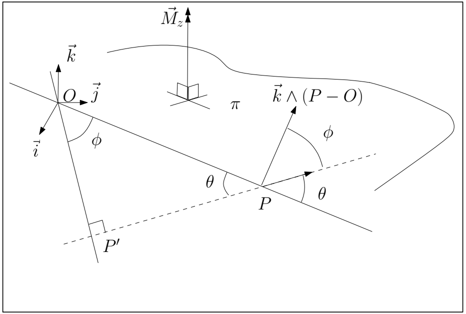
Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo

Problema: obter $||\vec{M}_z||$

Considera-se

- π, plano $\perp Oz$
- traço de z no plano π é O
- $(\vec{F}, P) \in \pi$ e ortogonal a Oz
- $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ é a base ortonormal que orienta o sistema Cartesiano de coordenadas

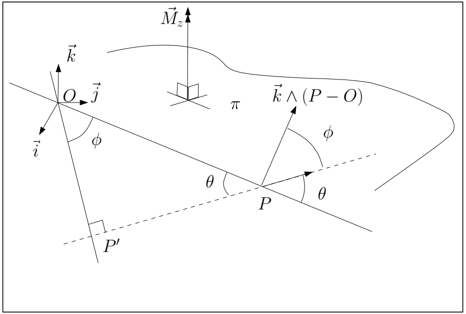


Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo

Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$



Momento de um sistema de forças

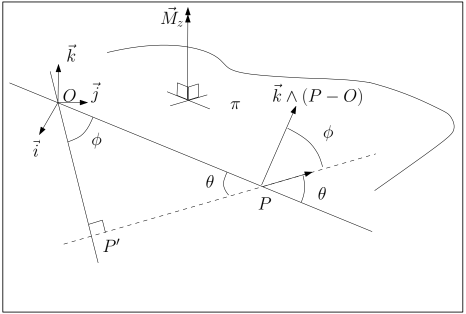
Módulo do momento em relação a um eixo

Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P-O)||.||\vec{F}||\,\mathrm{sen}\,\theta$

Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo

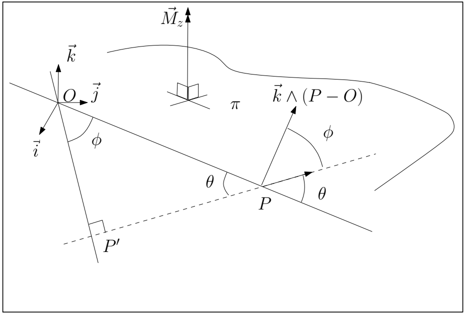


Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P-O)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen}\theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$

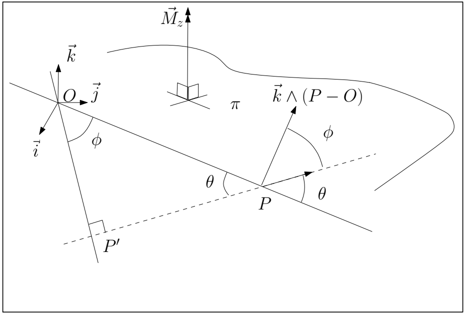
Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo



Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P - O)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen} \theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$
- M_z é a projeção de $\vec{M}_O$ sobre Oz:



Momento de um sistema de forças

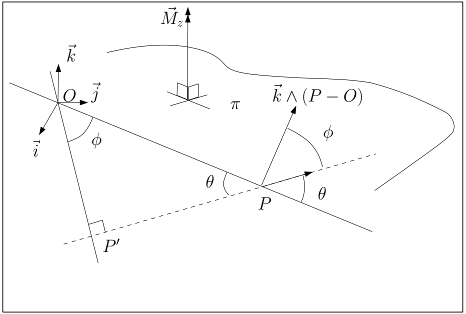
Módulo do momento em relação a um eixo

Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P-O)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen} \theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$
- M_z é a projeção de $\vec{M}_O$ sobre Oz:
  - $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = [(P-O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{k}$

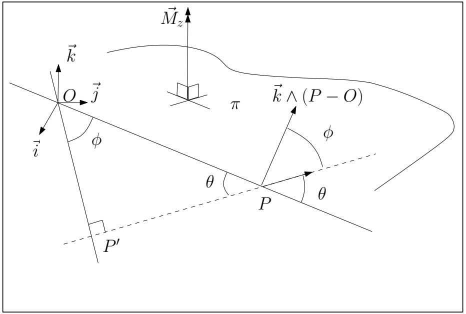
Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo



Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P-O)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen}\theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$
- M_z é a projeção de $\vec{M}_O$ sobre Oz:
  - $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = [(P-O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{k}$
- propriedade cíclica do produto misto:



Momento de um sistema de forças

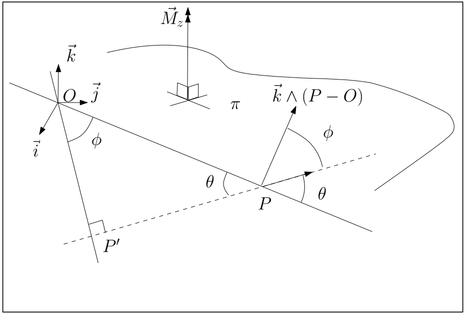
Módulo do momento em relação a um eixo

Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P-O)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen} \theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$
- M_z é a projeção de $\vec{M}_O$ sobre Oz:
  - $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = [(P-O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{k}$
- propriedade cíclica do produto misto:
- $M_z = [\vec{k} \wedge (P-O)] \cdot \vec{F}$

Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo

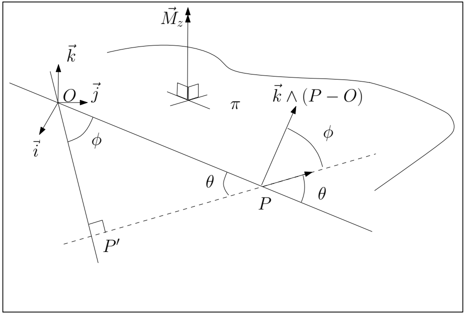


Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P-O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P-O)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen} \theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$
- M_z é a projeção de $\vec{M}_O$ sobre Oz:
  - $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = [(P-O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{k}$
- propriedade cíclica do produto misto:
- $M_z = [\vec{k} \wedge (P-O)] \cdot \vec{F}$
- $M_z = ||\vec{k}||.||(P-O)||. \operatorname{sen}(\pi/2).|\vec{F}| \cos \phi$

Momento de um sistema de forças

Módulo do momento em relação a um eixo



Solução

- da definição $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$
- $||\vec{M}_O|| = ||(P - O)||.||\vec{F}||\,\mathrm{sen}\,\theta$
- $||\vec{M}_O|| = ||\vec{F}||.d$
- M_z é a projeção de $\vec{M}_O$ sobre Oz:
  - $M_z = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = [(P - O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{k}$
- propriedade cíclica do produto misto:
- $M_z = [\vec{k} \wedge (P - O)] \cdot \vec{F}$
- $M_z = ||\vec{k}||.||(P - O)||.\,\mathrm{sen}(\pi/2).|\vec{F}|\cos\phi$
- $M_z = ||(P - O)||\cos\phi.||\vec{F}|| = d.||\vec{F}||$

- o vetor momento em relação a um polo pode ser descrito por suas componentes, projeções do vetor em 3 direções ortogonais

$$\vec{M}_{\vec{F},O} = (P - O) \wedge \vec{F} \quad \text{com}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \quad \text{e}$$

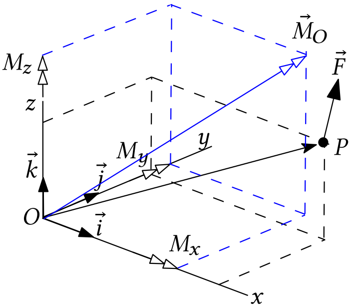
$$P = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}, \text{ temos:}$$

$$\vec{M}_{\vec{F},O} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_P & y_P & z_P \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Desenvolve-se o determinante

$$\vec{M}_{\vec{F},O} = (y_P F_z - z_P F_y)\vec{i} + (z_P F_x - x_P F_z)\vec{j} + (x_P F_y - y_P F_x)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F},O} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}} \qquad (12)$$



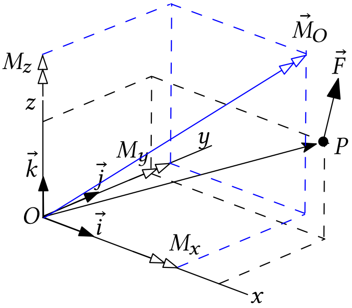
Os escalares

$$M_x = (y_P F_z - z_P F_y) = (\vec{M}_{\vec{F},O}) \cdot \vec{i}$$

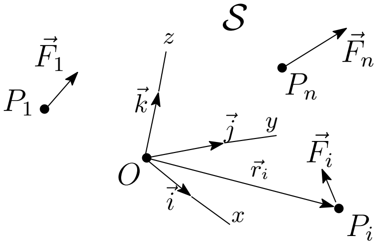
$$M_y = (z_P F_x - x_P F_z) = (\vec{M}_{\vec{F},O}) \cdot \vec{j}$$

$$M_z = (x_P F_y - y_p F_x) = (\vec{M}_{\vec{F},O}) \cdot \vec{k}$$

são os componentes do momento da força $(\vec{F}, P)$ em relação aos eixos coordenados ortogonais que passam por O



Para um sistema $\mathcal{S} = (\vec{F}_i, P_i)$ as expressões são análogas às anteriores:



$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \Big((y_{P_i} F_{z_i} - z_{P_i} F_{y_i})\vec{i} + (z_{P_i} F_{x_i} - x_{P_i} F_{z_i})\vec{j} + (x_{P_i} F_{y_i} - y_{P_i} F_{x_i})\vec{k} \Big)$$

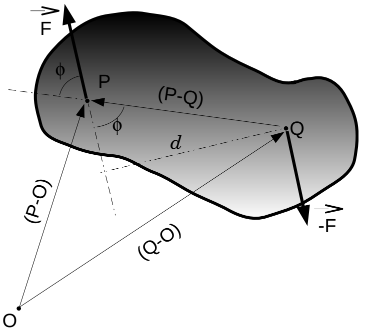
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(M_{x_i}\vec{i} + M_{y_i}\vec{j} + M_{z_i}\vec{k} \right)$$

Dado um sistema de forças de mesmo módulo e direção, porém de sentidos opostos e linhas de ação distintas, $(\vec{F}, P)$ e $(-\vec{F}, Q)$.

Problema: calcular a resultante e o momento desse sistema em relação a um polo arbitrário O.

Solução:

- $\vec{R} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$

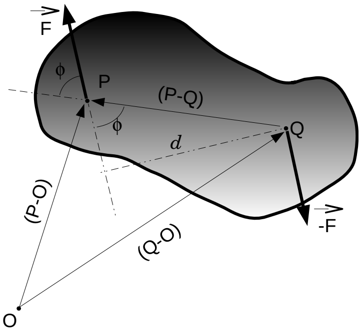


Dado um sistema de forças de mesmo módulo e direção, porém de sentidos opostos e linhas de ação distintas, $(\vec{F}, P)$ e $(-\vec{F}, Q)$.

Problema: calcular a resultante e o momento desse sistema em relação a um polo arbitrário O.

Solução:

- $\vec{R} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$
- $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (Q - O) \wedge (-\vec{F})$

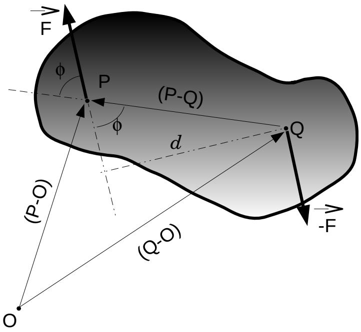


Dado um sistema de forças de mesmo módulo e direção, porém de sentidos opostos e linhas de ação distintas, $(\vec{F}, P)$ e $(-\vec{F}, Q)$.

Problema: calcular a resultante e o momento desse sistema em relação a um polo arbitrário O.

Solução:

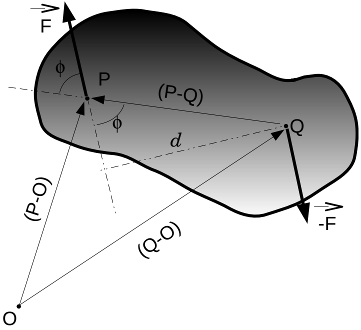
- $\vec{R} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$
- $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (Q - O) \wedge (-\vec{F})$
- $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (O - Q) \wedge \vec{F}$



Binário

Dado um sistema de forças de mesmo módulo e direção, porém de sentidos opostos e linhas de ação distintas, $(\vec{F}, P)$ e $(-\vec{F}, Q)$.

Problema: calcular a resultante e o momento desse sistema em relação a um polo arbitrário O.



Solução:

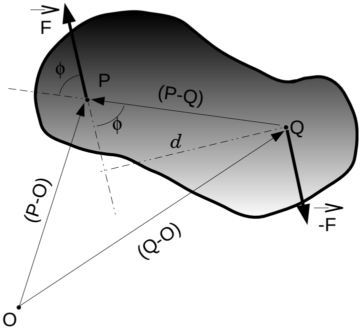
- $\vec{R} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F_i} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$
- $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (Q - O) \wedge (-\vec{F})$
- $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F} + (O - Q) \wedge \vec{F}$
- $\vec{M}_O = [(P - O) + (O - Q)] \wedge \vec{F}$

▸ ⇒ 4 casos

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - Q) \wedge \vec{F}} \tag{13}$$

Conclusão:

- o binário é um sistema de forças particular cuja resultante é **nula** e cujo momento **independe** do polo



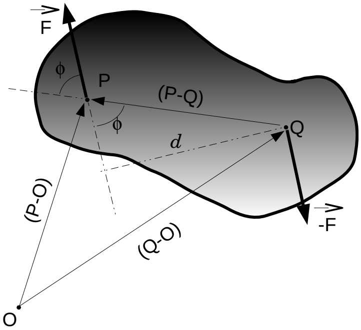
⇒ 4 casos

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - Q) \wedge \vec{F}} \qquad (13)$$

Conclusão:

- o binário é um sistema de forças particular cuja resultante é **nula** e cujo momento **independe** do polo
- o módulo de um binário é dado por

$$||\vec{M}|| = ||(P - Q)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen}\phi$$
$$d = ||(P - Q)|| \operatorname{sen}\phi \Rightarrow ||\vec{M}|| = ||\vec{F}||.d$$



▸ $\Rightarrow$ 4 casos

$$\boxed{\vec{M}_O = (P - Q) \wedge \vec{F}} \tag{13}$$

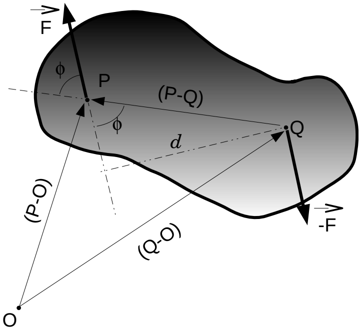
Conclusão:

- o binário é um sistema de forças particular cuja resultante é **nula** e cujo momento **independe** do polo
- o módulo de um binário é dado por

$$||\vec{M}|| = ||(P - Q)||.||\vec{F}||\,\text{sen}\,\phi$$

$$d = ||(P - Q)||\,\text{sen}\,\phi \Rightarrow ||\vec{M}|| = ||\vec{F}||.d$$

- $d = \dfrac{||\vec{M}||}{||\vec{F}||}$ é o **braço do binário**



$\Rightarrow$ 4 casos

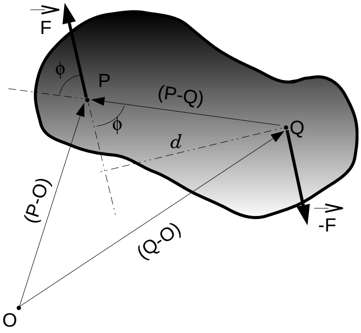
$$\boxed{\vec{M}_O = (P - Q) \wedge \vec{F}} \tag{13}$$

Conclusão:

- o binário é um sistema de forças particular cuja resultante é **nula** e cujo momento **independe** do polo
- o módulo de um binário é dado por

$$||\vec{M}|| = ||(P - Q)||.||\vec{F}|| \operatorname{sen} \phi$$
$$d = ||(P - Q)|| \operatorname{sen} \phi \Rightarrow ||\vec{M}|| = ||\vec{F}||.d$$

- $d = \frac{||\vec{M}||}{||\vec{F}||}$ é o **braço do binário**
- **o binário é um vetor livre**



Dois sistemas de forças são equivalentes se possuírem

Dois sistemas de forças são equivalentes se possuírem

- a mesma resultante;

Dois sistemas de forças são equivalentes se possuírem

- a mesma resultante;
- o mesmo momento em relação a um polo arbitrário

Dois sistemas de forças são equivalentes se possuírem

- a mesma resultante;
- o mesmo momento em relação a um polo arbitrário

Dois sistemas de forças são equivalentes se possuírem

- a mesma resultante;
- o mesmo momento em relação a um polo arbitrário

Equivalências

- **de uma força**: uma força $(\vec{F}, P)$ é equivalente ao par formado pela força $(\vec{F}, P)$ e pelo binário de transporte de $(\vec{F}, P)$ até O, $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$ (**vide quadro**)

Dois sistemas de forças são equivalentes se possuírem

- a mesma resultante;
- o mesmo momento em relação a um polo arbitrário

Equivalências

- **de uma força**: uma força $(\vec{F}, P)$ é equivalente ao par formado pela força $(\vec{F}, P)$ e pelo binário de transporte de $(\vec{F}, P)$ até O, $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$ **(vide quadro)**
- **teorema da equivalência**:
  todo sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ é equivalente a uma resultante aplicada em um polo (ponto) arbitrário e a um binário

Prova do teorema da equivalência

Seja o sistema $(\vec{F}_i, P_i)$ e O um polo arbitrário. Da definição de momento de um sistema de forças temos

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \Rightarrow$$

$$\vec{M}_O = (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (P_n - O) \wedge \vec{F}_n.$$

Além disso,

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n,$$

Prova do teorema da equivalência

Seja o sistema $(\vec{F}_i, P_i)$ e O um polo arbitrário. Da definição de momento de um sistema de forças temos

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \Rightarrow$$
$$\vec{M}_O = (P_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_2 + \ldots + (P_n - O) \wedge \vec{F}_n.$$

Além disso,

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n,$$

ou seja, o sistema $(\vec{F}_i, P_i)$ é equivalente ao sistema $(\vec{R}, O) \bigcup \vec{M}_O$.

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

Redução de sistemas de forças

Reduzir um sistema de forças é obter um outro sistema, mais simples, que seja equivalente ao primeiro.

Reduzir um sistema de forças é obter um outro sistema, mais simples, que seja equivalente ao primeiro.

A redução é efetuada com base no invariante escalar, $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

Redução de sistemas de forças

Há 4 casos possíveis de redução:

Há 4 casos possíveis de redução:

1. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \& \vec{R} = \vec{0}$ (sistema **equilibrado** ou **balanceado**)

⇒ binario

Há 4 casos possíveis de redução:

1. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \&\vec{R} = \vec{0}$ (sistema **equilibrado** ou **balanceado**)
2. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \&\vec{R} \neq \vec{0}$ (sistema redutível à **resultante** sobre o *eixo central*)

⇒ binario

Há 4 casos possíveis de redução:

1. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \&\vec{R} = \vec{0}$ (sistema **equilibrado** ou **balanceado**)
2. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \&\vec{R} \neq \vec{0}$ (sistema redutível à **resultante** sobre o *eixo central*)
3. $I = 0,\ \vec{M}_O \neq \vec{0}\ \&\vec{R} = \vec{0}$ (sistema equivalente a um **binário** de momento $\vec{M}$)

⇒ binario

Há 4 casos possíveis de redução:

1. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \&\vec{R} = \vec{0}$ (sistema **equilibrado** ou **balanceado**)
2. $I = 0,\ \vec{M}_O = \vec{0}\ \&\vec{R} \neq \vec{0}$ (sistema redutível à **resultante** sobre o *eixo central*)
3. $I = 0,\ \vec{M}_O \neq \vec{0}\ \&\vec{R} = \vec{0}$ (sistema equivalente a um **binário** de momento $\vec{M}$)
4. $$\vec{M}_O \neq \vec{0}\ \&\vec{R} \neq \vec{0} \begin{cases} I = 0 \text{ (sistema redutível à resultante sobre o eixo central)} \\ I \neq 0 \text{ (sistema redutível à resultante sobre o eixo central e a um binário)} \end{cases}$$

⇒ binario

Estudo do caso 4, $I = 0$ com $\vec{M}_O \neq \vec{0}\,\&\vec{R} \neq \vec{0}$

- (a) $\vec{R} \perp \vec{M}_O \Rightarrow \exists$ um lugar geométrico de pontos E tais que $\vec{M}_E = \vec{0}$ e o sistema é redutível à resultante sobre esse l.g., o eixo central

Estudo do caso 4, $I = 0$ com $\vec{M}_O \neq \vec{0}\ \& \vec{R} \neq \vec{0}$

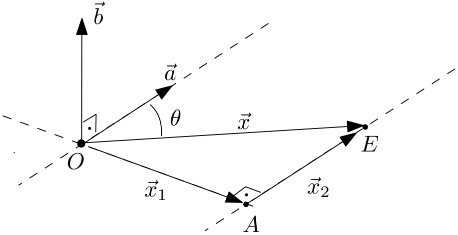
- (a) $\vec{R} \perp \vec{M}_O \Rightarrow \exists$ um lugar geométrico de pontos E tais que $\vec{M}_E = \vec{0}$ e o sistema é redutível à resultante sobre esse l.g., o eixo central

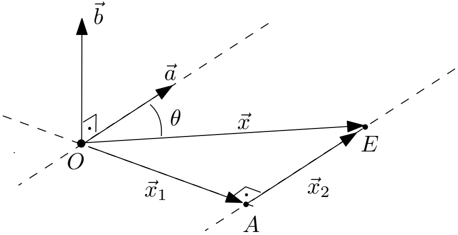
$$\vec{M}_E = \vec{0} = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}$$
$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O$$

Essa é uma equação vetorial do tipo

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \qquad \text{com}$$
$$\vec{x} = (E - O) \quad \vec{a} = \vec{R} \quad \vec{b} = \vec{M}_O$$

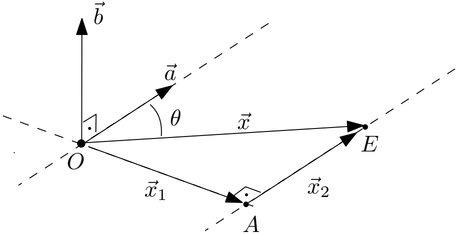
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$





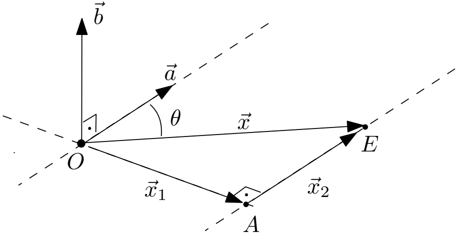
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||. \operatorname{sen}\theta$



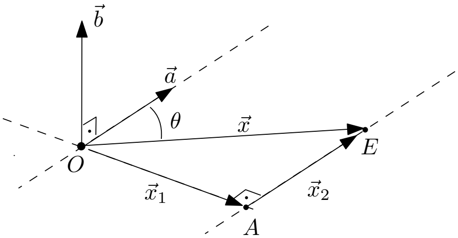
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||.\operatorname{sen}\theta$
- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$



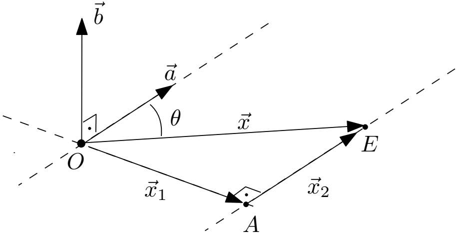
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||.\operatorname{sen}\theta$
- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $||\vec{x}||\operatorname{sen}\theta = ||\vec{x}_1|| \Rightarrow ||\vec{x}_1|| = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}$



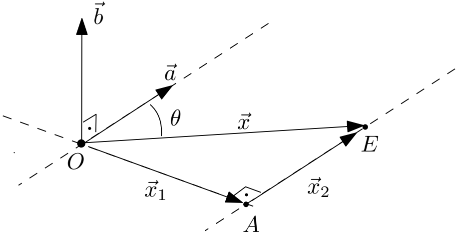
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||.\operatorname{sen}\theta$
- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $||\vec{x}||\operatorname{sen}\theta = ||\vec{x}_1|| \Rightarrow ||\vec{x}_1|| = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}$
- $\vec{x}_1 = ||\vec{x}_1||\vec{u}$ ($\vec{u}$, versor de $\vec{x}_1$)



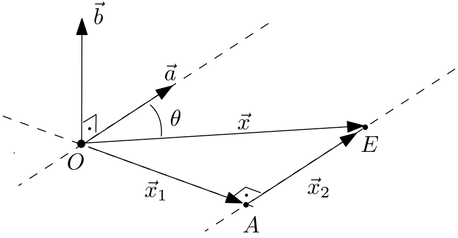
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||.\operatorname{sen}\theta$
- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $||\vec{x}||\operatorname{sen}\theta = ||\vec{x}_1|| \Rightarrow ||\vec{x}_1|| = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}$
- $\vec{x}_1 = ||\vec{x}_1||\vec{u}$ ($\vec{u}$, versor de $\vec{x}_1$)
- $\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{||\vec{a}||.||\vec{b}||.\operatorname{sen}\pi/2}$



Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

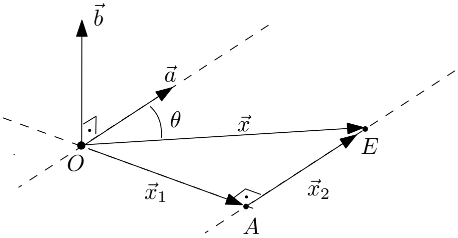
- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||.\operatorname{sen}\theta$
- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $||\vec{x}||\operatorname{sen}\theta = ||\vec{x}_1|| \Rightarrow ||\vec{x}_1|| = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}$
- $\vec{x}_1 = ||\vec{x}_1||\vec{u}$ ($\vec{u}$, versor de $\vec{x}_1$)
- $\vec{u} = \frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}||.||\vec{b}||.\operatorname{sen}\pi/2}$
- $\vec{x}_1 = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}||.||\vec{b}||}$

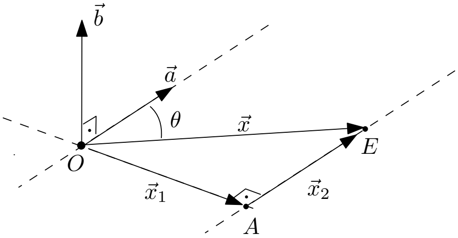


Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $||\vec{b}|| = ||\vec{x}||.||\vec{a}||.\operatorname{sen}\theta$
- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $||\vec{x}||\operatorname{sen}\theta = ||\vec{x}_1|| \Rightarrow ||\vec{x}_1|| = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}$
- $\vec{x}_1 = ||\vec{x}_1||\vec{u}$ ($\vec{u}$, versor de $\vec{x}_1$)
- $\vec{u} = \frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}||.||\vec{b}||.\operatorname{sen}\pi/2}$
- $\vec{x}_1 = \frac{||\vec{b}||}{||\vec{a}||}\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}||.||\vec{b}||}$
- $\vec{x}_1 = \frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{||\vec{a}||^2}$

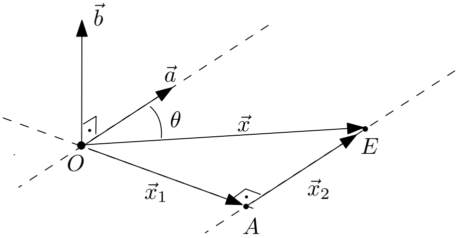
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$





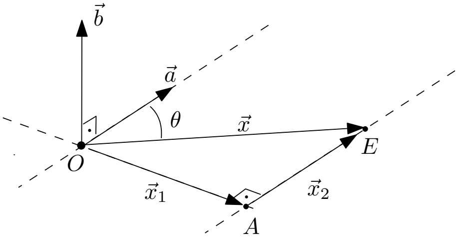
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$



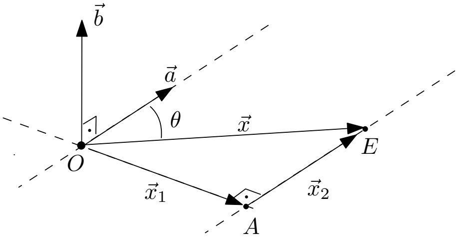
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $\vec{x}_2 \parallel \vec{a}$



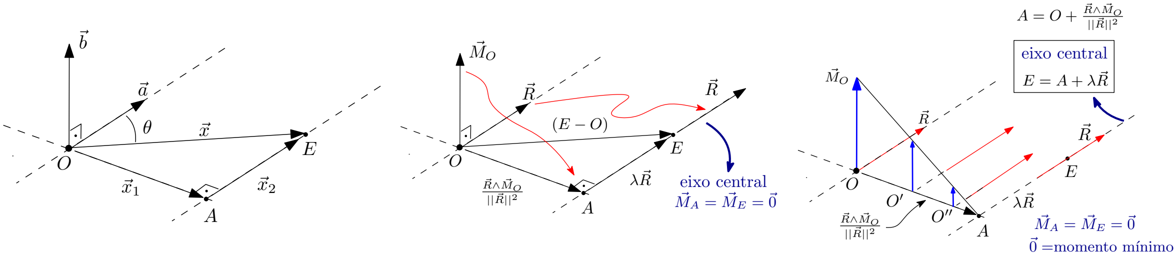
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $\vec{x}_2 \parallel \vec{a}$
- $\vec{x}_2 = \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathcal{R}$



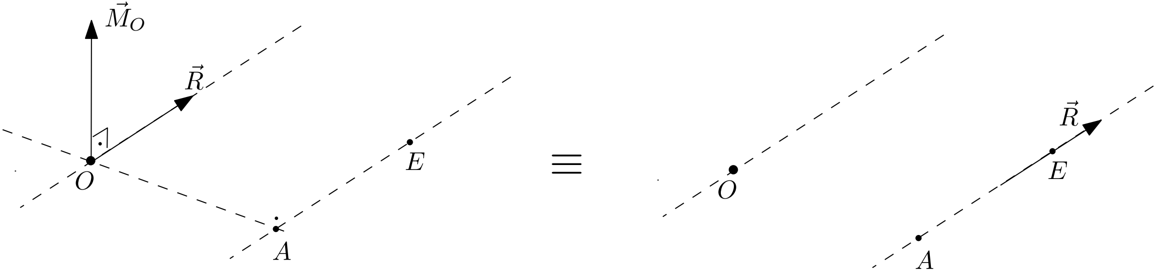
Solução de $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

- $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
- $\vec{x}_2 \parallel \vec{a}$
- $\vec{x}_2 = \lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathcal{R}$
- $$\boxed{\vec{x} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{||\vec{a}||^2} + \lambda \vec{a}} \qquad (14)$$


$\vec{b}$
$\vec{a}$
θ
$\vec{x}$
E
O
$\vec{x}_1$
$\vec{x}_2$
A
$\vec{M}_O$
$\vec{R}$
$(E - O)$
$\vec{R}$
E
O
$\frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_O}{||\vec{R}||^2}$
$\lambda\vec{R}$
A
eixo central
$\vec{M}_A = \vec{M}_E = \vec{0}$
$A = O + \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_O}{||\vec{R}||^2}$
eixo central
$E = A + \lambda\vec{R}$
$\vec{M}_O$
$\vec{R}$
$\vec{R}$
E
O
O'
O''
$\lambda\vec{R}$
A
$\frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_O}{||\vec{R}||^2}$
$\vec{M}_A = \vec{M}_E = \vec{0}$
$\vec{0}$ =momento mínimo

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

Eixo central de momentos – caso 4 (a)



Estudo do caso 4, $I \neq \vec{0}$

- (b) $\Rightarrow \exists$ um lugar geométrico de pontos E tais que o sistema é redutível à resultante sobre esse l.g., o eixo central, e a um momento $\vec{M}_E$
- o vetor momento é paralelo à resultante, $\vec{M}_E = h\vec{R}$, e possui o menor módulo para esse sistema, $||\vec{M}_E|| = h||\vec{R}||$ mínimo, com $h \in \mathcal{R}$ ainda desconhecido

Estudo do caso 4, $I \neq \vec{0}$

- (b) $\Rightarrow \exists$ um lugar geométrico de pontos E tais que o sistema é redutível à resultante sobre esse l.g., o eixo central, e a um momento $\vec{M}_E$
- o vetor momento é paralelo à resultante, $\vec{M}_E = h\vec{R}$, e possui o menor módulo para esse sistema, $||\vec{M}_E|| = h||\vec{R}||$ mínimo, com $h \in \mathcal{R}$ ainda desconhecido

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}$$
$$(E - O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_O - h\vec{R}$$

Novamente, a equação vetorial é do tipo

$$\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b} \qquad \text{com}$$
$$\vec{x} = (E - O) \quad \vec{a} = \vec{R} \quad \vec{b} = \vec{M}_O - h\vec{R}$$

A solução é análoga à anterior:

- $$(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_O - h\vec{R})}{||\vec{R}||^2} + \lambda\vec{R}$$

$$\boxed{(E - O) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{||\vec{R}||^2} + \lambda\vec{R}} \tag{15}$$

- determinação de h

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}$$
$$(\vec{M}_E) \cdot \vec{R} = \left(\vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}\right) \cdot \vec{R}$$

- determinação de h

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}$$
$$(\vec{M}_E) \cdot \vec{R} = \left(\vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}\right) \cdot \vec{R}$$

-

$$\vec{M}_E \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$
$$h\vec{R} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

- determinação de h

$$\vec{M}_E = \vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}$$
$$(\vec{M}_E) \cdot \vec{R} = \left(\vec{M}_O + (O - E) \wedge \vec{R}\right) \cdot \vec{R}$$

-

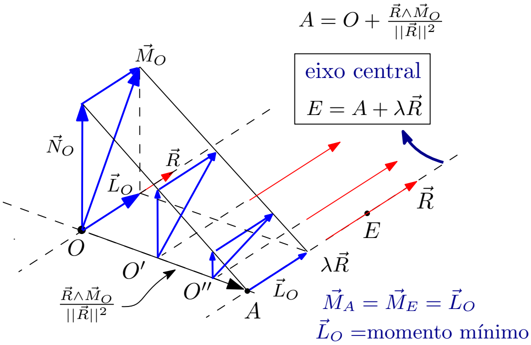
$$\vec{M}_E \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$
$$h\vec{R} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = I$$

-

$$\boxed{h = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{||\vec{R}||^2} = \frac{I}{||\vec{R}||^2}} \qquad (16)$$

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

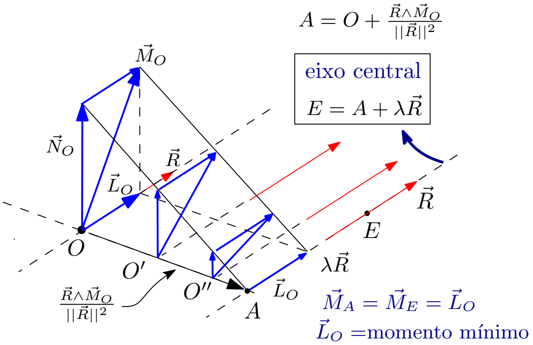
Eixo central de momentos – caso 4 (b)



- $\vec{M}_O = \vec{M}_O \parallel + \vec{M}_O \perp$

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

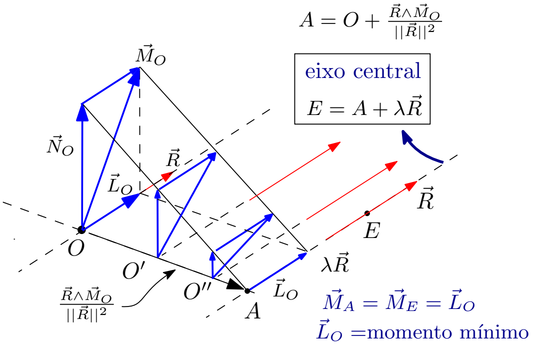
Eixo central de momentos – caso 4 (b)



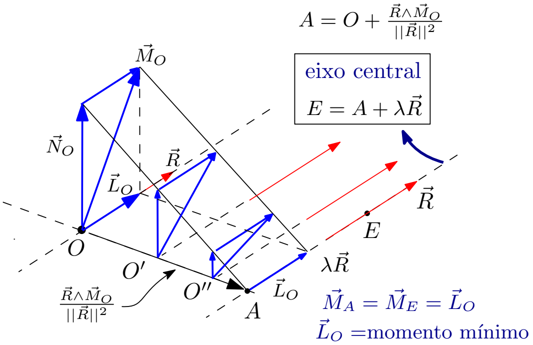
- $\vec{M}_O = \vec{M}_O \parallel + \vec{M}_O \perp$
- $\vec{M}_O = \vec{N}_O + \vec{L}_O$

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

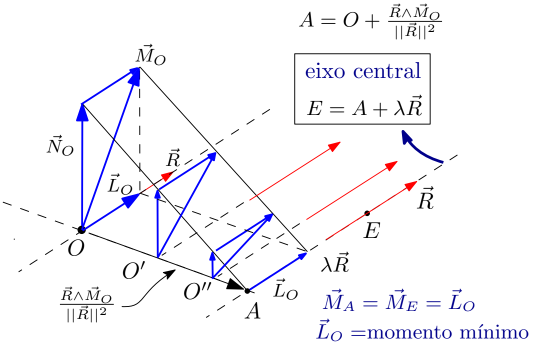
Eixo central de momentos – caso 4 (b)



- $\vec{M}_O = \vec{M}_O \parallel + \vec{M}_O \perp$
- $\vec{M}_O = \vec{N}_O + \vec{L}_O$
- $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (\vec{N}_O + \vec{L}_O) \cdot \vec{R}$



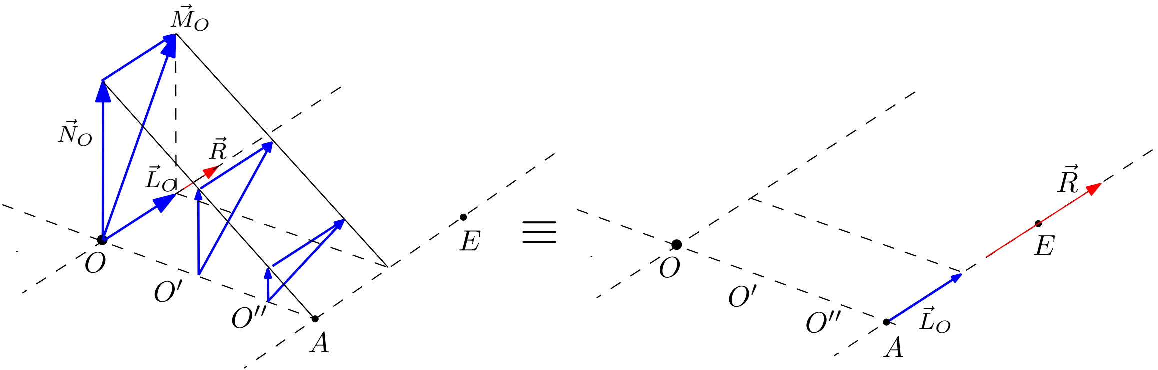
- $\vec{M}_O = \vec{M}_O \parallel + \vec{M}_O \perp$
- $\vec{M}_O = \vec{N}_O + \vec{L}_O$
- $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (\vec{N}_O + \vec{L}_O) \cdot \vec{R}$
- $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{L}_O \cdot \vec{R}$



- $\vec{M}_O = \vec{M}_O \parallel + \vec{M}_O \perp$
- $\vec{M}_O = \vec{N}_O + \vec{L}_O$
- $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = (\vec{N}_O + \vec{L}_O) \cdot \vec{R}$
- $\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{L}_O \cdot \vec{R}$
- $\vec{L}_O$ é mínimo

Sistemas equivalentes e redução de sistemas de forças

Eixo central de momentos – caso 4 (b)



Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- corpo rígido: é todo corpo material para o qual as distâncias relativas entre quaisquer de seus pontos são constantes, sob circunstâncias especiais de carregamento;

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- corpo rígido: é todo corpo material para o qual as distâncias relativas entre quaisquer de seus pontos são constantes, sob circunstâncias especiais de carregamento;
- o modelo básico de um corpo rígido é o de um aglomerado de pontos materiais que obedecem à condição acima;

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- corpo rígido: é todo corpo material para o qual as distâncias relativas entre quaisquer de seus pontos são constantes, sob circunstâncias especiais de carregamento;
- o modelo básico de um corpo rígido é o de um aglomerado de pontos materiais que obedecem à condição acima;
- sistema de corpos rígidos é a denominação de um conjunto arbitrariamente escolhido desses corpos, estejam eles fisicamente unidos ou não;

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- corpo rígido: é todo corpo material para o qual as distâncias relativas entre quaisquer de seus pontos são constantes, sob circunstâncias especiais de carregamento;
- o modelo básico de um corpo rígido é o de um aglomerado de pontos materiais que obedecem à condição acima;
- sistema de corpos rígidos é a denominação de um conjunto arbitrariamente escolhido desses corpos, estejam eles fisicamente unidos ou não;
- forças internas e externas: em um sistema de corpos rígidos unidos, denominam-se internas todas as forças provenientes de corpos que compõem o sistema, e externas todas aquelas decorrentes da interação dos corpos do sistema com o meio externo.

Equilíbrio estático – Princípios da Estática

- se nenhuma força for aplicada a um corpo rígido isolado e em equilíbrio em relação a um referencial inercial, ele permanecerá em equilíbrio;
- se apenas uma força for aplicada a um corpo rígido isolado e em equilíbrio em relação a um referencial inercial, ele não permanecerá em equilíbrio;
- se apenas duas forças não diretamente opostas forem aplicadas a um corpo rígido isolado e em equilíbrio em relação a um referencial inercial, ele não permanecerá em equilíbrio;

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

A condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um corpo rígido é que sejam nulos a resultante e o momento do sistema de todas as forças aplicadas a este corpo, em relação a um polo arbitrário

1. com $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}, \forall O$, o corpo rígido estará em equilíbrio pelo primeiro princípio, pois o sistema equivale a uma força nula;

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

A condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um corpo rígido é que sejam nulos a resultante e o momento do sistema de todas as forças aplicadas a este corpo, em relação a um polo arbitrário

1. com $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}, \forall O$, o corpo rígido estará em equilíbrio pelo primeiro princípio, pois o sistema equivale a uma força nula;
2. com $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$, pelo segundo princípio o corpo rígido não estará em equilíbrio pois é sujeito a uma única força não nula;

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

A condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um corpo rígido é que sejam nulos a resultante e o momento do sistema de todas as forças aplicadas a este corpo, em relação a um polo arbitrário

1. com $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}, \forall O$, o corpo rígido estará em equilíbrio pelo primeiro princípio, pois o sistema equivale a uma força nula;
2. com $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$, pelo segundo princípio o corpo rígido não estará em equilíbrio pois é sujeito a uma única força não nula;
3. com $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, o corpo não estará em equilíbrio de acordo com o terceiro princípio, pois estará sujeito a um sistema equivalente a um par de forças não diretamente opostas;

Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas

- anteriormente, corpo rígido = continuidade + indeformabilidade;

Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas

- anteriormente, corpo rígido = continuidade + indeformabilidade;
- matematicamente, dados um corpo rígido $\mathcal{C}$, $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow ||(P_1 - P_2)||^2 =$ constante.

Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas

- anteriormente, corpo rígido = continuidade + indeformabilidade;
- matematicamente, dados um corpo rígido $\mathcal{C}$, $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow ||(P_1 - P_2)||^2 =$ constante.
- $\mathcal{C}$ sujeito a $S(\vec{F}_i, P_i)$ externas e $\vec{f}_{ij}$ internas;

Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas

- anteriormente, corpo rígido = continuidade + indeformabilidade;
- matematicamente, dados um corpo rígido $\mathcal{C}$, $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow ||(P_1 - P_2)||^2 =$ constante.
- $\mathcal{C}$ sujeito a $S(\vec{F}_i, P_i)$ externas e $\vec{f}_{ij}$ internas;
-

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \vec{f}_{ij} \tag{17}$$

Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas

- anteriormente, corpo rígido = continuidade + indeformabilidade;
- matematicamente, dados um corpo rígido $\mathcal{C}$, $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow ||(P_1 - P_2)||^2 =$ constante.
- $\mathcal{C}$ sujeito a $S(\vec{F}_i, P_i)$ externas e $\vec{f}_{ij}$ internas;
-

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \vec{f}_{ij} \tag{17}$$

- 3o. Princípio:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \vec{f}_{ij} = \vec{0} \tag{18}$$

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;
- *(ii)* pelo princípio de ação e reação, conclui-se que o sistema de forças internas ao corpo rígido é equivalente a zero, uma vez que as forças internas se anulam mutuamente.

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;
- *(ii)* pelo princípio de ação e reação, conclui-se que o sistema de forças internas ao corpo rígido é equivalente a zero, uma vez que as forças internas se anulam mutuamente.

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;
- *(ii)* pelo princípio de ação e reação, conclui-se que o sistema de forças internas ao corpo rígido é equivalente a zero, uma vez que as forças internas se anulam mutuamente.

É possível, portanto, enunciar o seguinte teorema:

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;
- *(ii)* pelo princípio de ação e reação, conclui-se que o sistema de forças internas ao corpo rígido é equivalente a zero, uma vez que as forças internas se anulam mutuamente.

É possível, portanto, enunciar o seguinte teorema: *se um sistema material está em equilíbrio, é necessário que o sistema de forças externas seja equivalente a zero.*

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;
- *(ii)* pelo princípio de ação e reação, conclui-se que o sistema de forças internas ao corpo rígido é equivalente a zero, uma vez que as forças internas se anulam mutuamente.

É possível, portanto, enunciar o seguinte teorema: *se um sistema material está em equilíbrio, é necessário que o sistema de forças externas seja equivalente a zero.*

No caso de um corpo rígido, essas condições são também suficientes, e correspondem às

Equilíbrio estático – Condições de equilíbrio

Dado que qualquer corpo rígido é um conjunto (sistema) de pontos materiais conclui-se que:

- *(i)* se o sistema está em equilíbrio, todos os seus pontos estão em equilíbrio (pelo primeiro princípio), ou seja, a resultante de todas as forças atuantes em cada ponto é nula;
- *(ii)* pelo princípio de ação e reação, conclui-se que o sistema de forças internas ao corpo rígido é equivalente a zero, uma vez que as forças internas se anulam mutuamente.

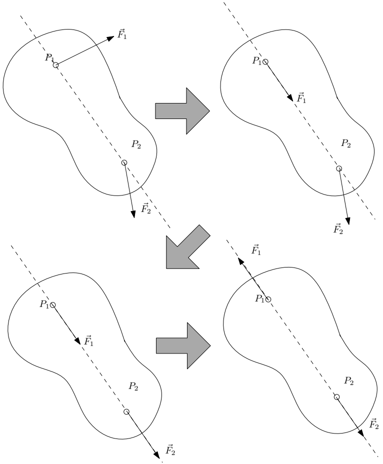
É possível, portanto, enunciar o seguinte teorema: *se um sistema material está em equilíbrio, é necessário que o sistema de forças externas seja equivalente a zero.*

No caso de um corpo rígido, essas condições são também suficientes, e correspondem às

equações fundamentais da estática

$$\vec{R} = \vec{0} \text{ e } \vec{M}_O = \vec{0}, \forall O$$

Equilíbrio estático de um corpo rígido – consequências



- *(i)* um corpo rígido sujeito unicamente a duas forças estará em equilíbrio somente se elas forem diretamente opostas;

Prova:

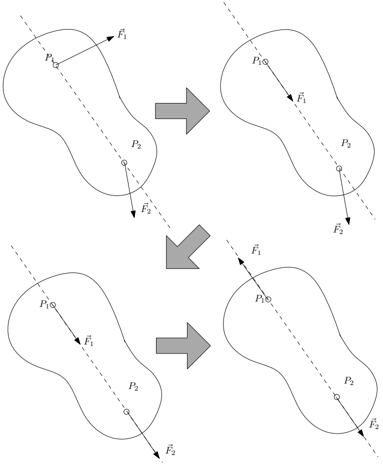
$$\vec{M}_O = \vec{0}, \forall O \Rightarrow \vec{M}_{P_2} = \vec{0} = \vec{M}_{\vec{F}_2,P_2} + \vec{M}_{\vec{F}_1,P_2}$$

$$\vec{M}_{\vec{F}_2,P_2} = \vec{0} \therefore \vec{M}_{\vec{F}_1,P_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 = \lambda_2(P_2 - P_1)$$

$$\vec{M}_O = \vec{0}, \forall O \Rightarrow \vec{M}_{P_1} = \vec{0} = \vec{M}_{\vec{F}_1,P_1} + \vec{M}_{\vec{F}_2,P_1}$$

$$\vec{M}_{\vec{F}_1,P_1} = \vec{0} \therefore \vec{M}_{\vec{F}_2,P_1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = \lambda_1(P_2 - P_1)$$

Equilíbrio estático de um corpo rígido – consequências



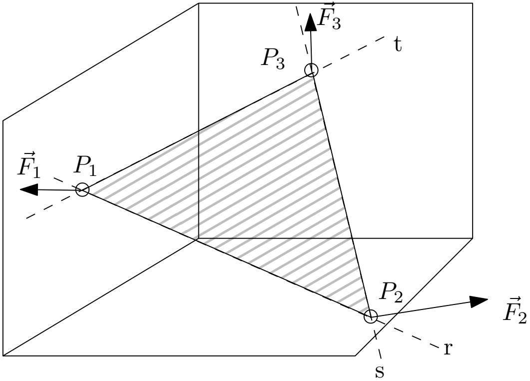
- *(i)* continuação
  Conclusão 1: as duas forças possuem a mesma linha de ação.

$$\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$
$$\therefore \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

  Conclusão 2: $\lambda_1 = -\lambda_2$ e as forças são diretamente opostas.

Equilíbrio estático de um corpo rígido – consequências

- *(ii)* se um corpo rígido em equilíbrio estiver sujeito unicamente à ação de 3 forças, estas serão **necessariamente coplanares** (paralelas ou concorrentes).
  Prova de coplanaridade: seja o sistema de forças $(\vec{F}_1, P1), (\vec{F}_2, P_2), (\vec{F}_3, P_3)$ e as retas r, s, t cujas direções são dadas por versores $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$.



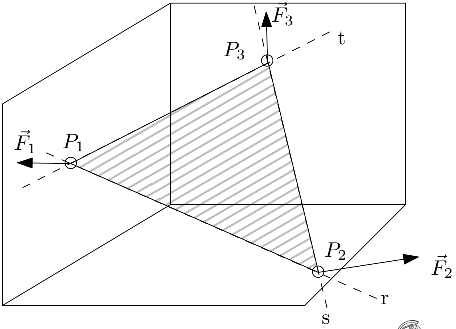
A condição de equilíbrio impõe que

$$\vec{M}_{\vec{F}_1,P_1} \cdot \vec{t} = \vec{M}_{\vec{F}_3,P_3} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_2,\forall P} \cdot \vec{t} = 0$$

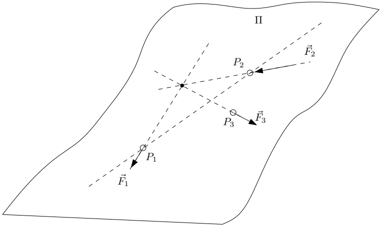
A condição de equilíbrio impõe que

$$\vec{M}_{\vec{F}_1,P_1} \cdot \vec{t} = \vec{M}_{\vec{F}_3,P_3} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_2,\forall P} \cdot \vec{t} = 0$$

Conclusão: como a condição de equilíbrio impõe que o momento de $\vec{F}_2$ em relação a qualquer polo seja nulo, a linha de ação de $\vec{F}_2$ deve interceptar t, ou seja, pertence ao plano $P_1P_2P_3$
Por raciocínio análogo, conclui-se que também as linhas de ação de $\vec{F}_1$ e de $\vec{F}_3$ devem pertencer a esse plano para que haja equilíbrio.



Equilíbrio estático de um corpo rígido – consequências



- *(ii)*
  Prova de paralelismo ou concorrência: se as forças $(\vec{F}_1, P1), (\vec{F}_2, P_2), (\vec{F}_3, P_3)$ não forem todas paralelas, sendo coplanares então pelo menos duas terão linhas de ação concorrentes. Como o momento em relação a qualquer polo deve ser nulo, a linha de ação da terceira deve interceptar o ponto de concorrência das linhas de ação das duas primeiras. Por outro lado, em sendo coplanares e paralelas, para que haja equilíbrio, devem possuir resultante nula e momento nulo em relação a qualquer polo. Portanto, devem estar sobre a mesma linha de ação, recaindo no primeiro caso, o de duas forças diretamente opostas (basta compor vetorialmente duas delas e o resultado com a terceira).

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- o estudo do equilíbrio dos corpos e dos sistemas de corpos é realizado com o auxílio do **diagrama de corpo livre – DCL**;

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- o estudo do equilíbrio dos corpos e dos sistemas de corpos é realizado com o auxílio do **diagrama de corpo livre – DCL**;
- no DCL, isolam-se materialmente os corpos de seus vínculos;

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- o estudo do equilíbrio dos corpos e dos sistemas de corpos é realizado com o auxílio do **diagrama de corpo livre – DCL**;
- no DCL, isolam-se materialmente os corpos de seus vínculos;
- os efeitos dos vínculos retirados **não podem** ser simplesmente desprezados;

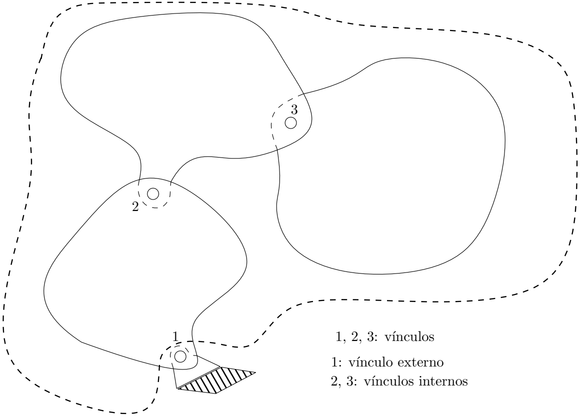
Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

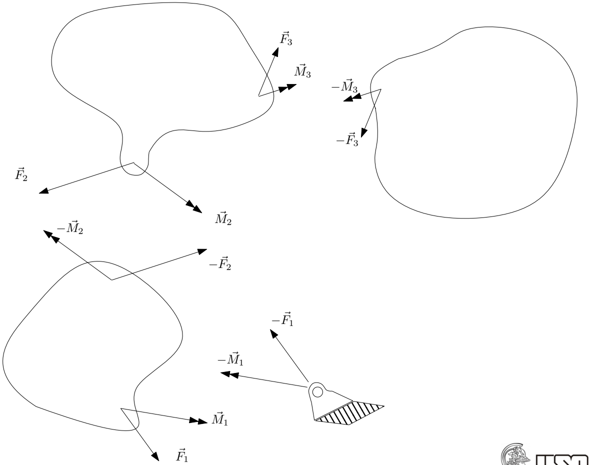
- o estudo do equilíbrio dos corpos e dos sistemas de corpos é realizado com o auxílio do **diagrama de corpo livre – DCL**;
- no DCL, isolam-se materialmente os corpos de seus vínculos;
- os efeitos dos vínculos retirados **não podem** ser simplesmente desprezados;
- para tanto, os DCLs apresentam o corpo – livre – porém contendo as forças e momentos que os vínculos lhes aplicavam;

Equilíbrio estático de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos

- o estudo do equilíbrio dos corpos e dos sistemas de corpos é realizado com o auxílio do **diagrama de corpo livre – DCL**;
- no DCL, isolam-se materialmente os corpos de seus vínculos;
- os efeitos dos vínculos retirados **não podem** ser simplesmente desprezados;
- para tanto, os DCLs apresentam o corpo – livre – porém contendo as forças e momentos que os vínculos lhes aplicavam;
- nesse sentido, o DCL **é uma representação equivalente à do corpo vinculado**;

Diagrama de corpo livre - DCL



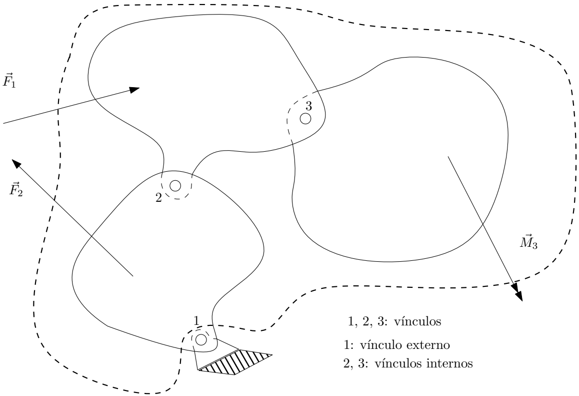


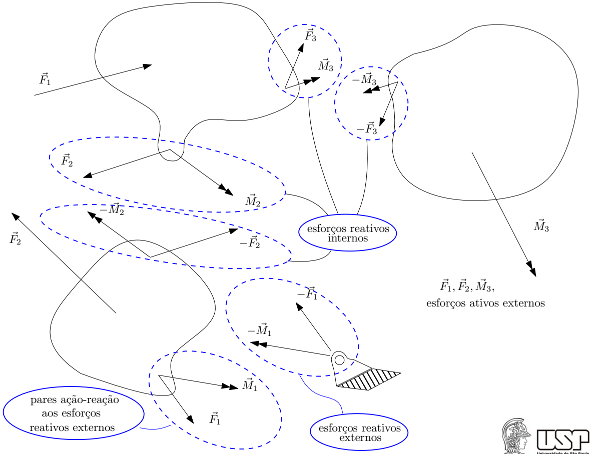
Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas

Em um sistema de corpos rígidos, forças e momentos (esforços):

- *externos* são os não provenientes da interação entre os componentes do sistema;
- *internos* são aqueles decorrentes de interações entre os componentes do sistema;
- *ativos* são aqueles não provenientes dos vínculos – podem ser externos ou internos;
- *reativos* ou *vinculares*, ou simplesmente *reações*, são aqueles impostos pelos vínculos – podem ser externos ou internos.

Equilíbrio estático – forças internas, externas, ativas, reativas





Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.

Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.
- em sendo *livre* o movimento dessa partícula, as três coordenadas são *independentes*, pois a partícula *pode ocupar qualquer posição no espaço*;

Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.
- em sendo *livre* o movimento dessa partícula, as três coordenadas são *independentes*, pois a partícula *pode ocupar qualquer posição no espaço*;
- nesse caso, pode-se afirmar que a partícula *possui 3 graus de liberdade no espaço*;

Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.
- em sendo *livre* o movimento dessa partícula, as três coordenadas são *independentes*, pois a partícula *pode ocupar qualquer posição no espaço*;
- nesse caso, pode-se afirmar que a partícula *possui 3 graus de liberdade no espaço*;
- a cada grau de liberdade corresponde uma coordenada independente (mais especificamente, uma possibilidade de movimento livre);

Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.
- em sendo *livre* o movimento dessa partícula, as três coordenadas são *independentes*, pois a partícula *pode ocupar qualquer posição no espaço*;
- nesse caso, pode-se afirmar que a partícula *possui 3 graus de liberdade no espaço*;
- a cada grau de liberdade corresponde uma coordenada independente (mais especificamente, uma possibilidade de movimento livre);
- da mesma forma, um *corpo rígido livre no espaço possui 6 graus de liberdade*, pois são necessários 6 parâmetros independentes para descrever univocamente sua posição e orientação, por exemplo:

Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.
- em sendo *livre* o movimento dessa partícula, as três coordenadas são *independentes*, pois a partícula *pode ocupar qualquer posição no espaço*;
- nesse caso, pode-se afirmar que a partícula *possui 3 graus de liberdade no espaço*;
- a cada grau de liberdade corresponde uma coordenada independente (mais especificamente, uma possibilidade de movimento livre);
- da mesma forma, um *corpo rígido livre no espaço possui 6 graus de liberdade*, pois são necessários 6 parâmetros independentes para descrever univocamente sua posição e orientação, por exemplo:
    - as 3 coordenadas cartesianas de um de seus pontos e 3 ângulos em relação a esse sistema de eixos;

Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

- a posição que uma partícula ocupa no espaço é perfeitamente definida por 3 coordenadas cartesianas, $(x; y; z)$.
- em sendo *livre* o movimento dessa partícula, as três coordenadas são *independentes*, pois a partícula *pode ocupar qualquer posição no espaço*;
- nesse caso, pode-se afirmar que a partícula *possui 3 graus de liberdade no espaço*;
- a cada grau de liberdade corresponde uma coordenada independente (mais especificamente, uma possibilidade de movimento livre);
- da mesma forma, um *corpo rígido livre no espaço possui 6 graus de liberdade*, pois são necessários 6 parâmetros independentes para descrever univocamente sua posição e orientação, por exemplo:
  - as 3 coordenadas cartesianas de um de seus pontos e 3 ângulos em relação a esse sistema de eixos;
  - 3 coordenadas de 3 pontos não alinhados.

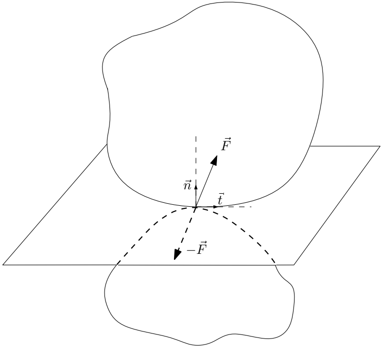
Equilíbrio estático – graus de liberdade (GL)

Portanto

- *graus de liberdade (GL) denotam o número mínimo de parâmetros independentes capazes de descrever univocamente a posição/orientação de um corpo rígido no espaço*;
- *um corpo rígido livre possui 3 GL no plano (2 deslocamentos lineares e uma rotação) e 6 GL no espaço tridimensional (três deslocamentos lineares e 3 rotações)*;
- *a cada grau de liberdade restringido corresponde uma reação vincular, na forma de força (limita deslocamentos lineares) e/ou momento (binário, limita rotações), denominados reativos, vinculares ou apenas reações.*

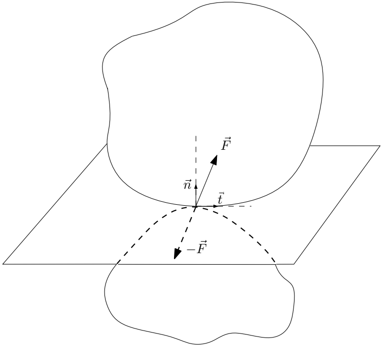
Equilíbrio estático – vínculos

- nosso modelo de contato entre os corpos é pontual



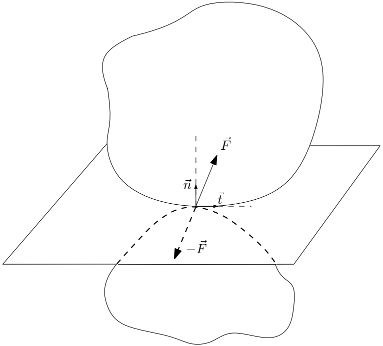
Equilíbrio estático – vínculos

- nosso modelo de contato entre os corpos é pontual
- pelo 3o. Princípio, $\vec{F} = N\vec{n} + T\vec{t}$



Equilíbrio estático – vínculos

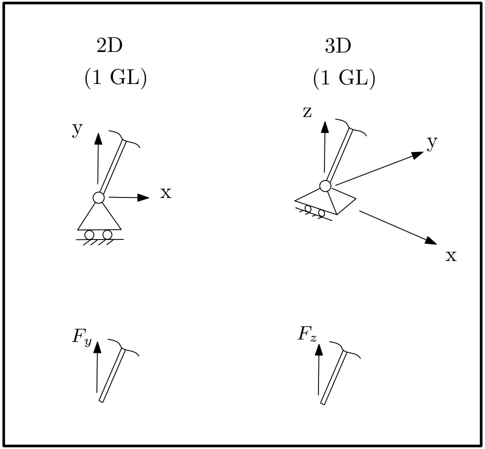
- nosso modelo de contato entre os corpos é pontual
- pelo 3o. Princípio, $\vec{F} = N\vec{n} + T\vec{t}$
- quando $\vec{T} = T\vec{t} = \vec{0}$ o vínculo é *sem atrito* ou *ideal*



Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Apoio simples (uni ou bidirecional):

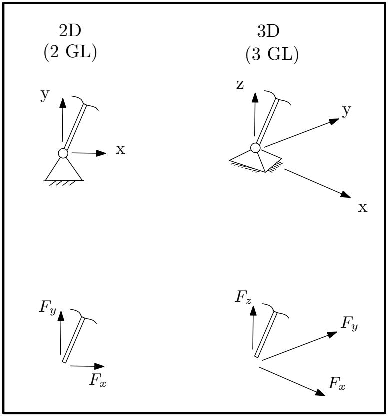
- limita 1 GL no plano e 1 GL no espaço;
- o GL limitado é um deslocamento linear;
- impõe uma *força de reação* de qualquer módulo e sentido em um ponto determinado (o ponto de apoio), *porém sempre perpendicular a um plano* (o plano do apoio).



Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Articulação:

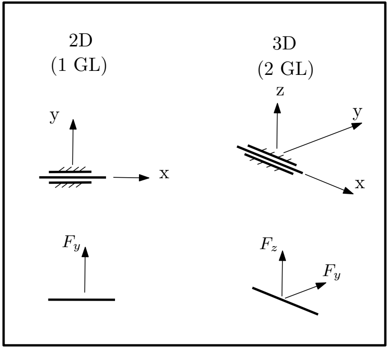
- limita 2 GL no plano e 3 GL no espaço;
- os GL limitados são deslocamentos lineares;
- impõe uma *força de reação* de qualquer módulo, direção e sentido em um ponto determinado (o centro da articulação);
- como a direção e o sentido não são conhecidos a priori, trabalha-se com as componentes cartesianas da força (2 no 2D e 3 no 3D).



Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Anel (também mancal ou guia):

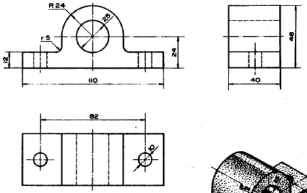
- limita 1 GL no plano e 2 GL no espaço;
- os GL limitados são deslocamentos lineares;
- impõe uma *força de reação* de qualquer módulo e sentido *sempre em direção perpendicular a uma reta* – o eixo do anel;
- como a direção e o sentido não são conhecidos a priori, no 3D trabalha-se com as duas componentes cartesianas da força.

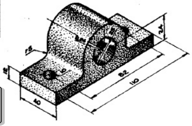


Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Articulação esférica e mancal

Articulação (junta esférica)





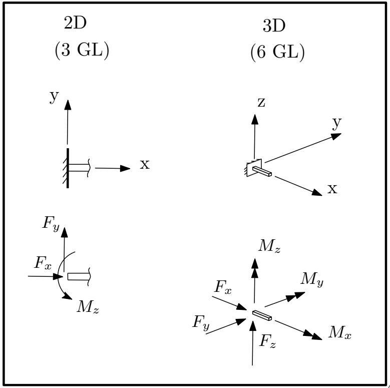
Anel ou mancal
(nomenclatura técnica)

Figura:

Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Engastamento ou engaste:

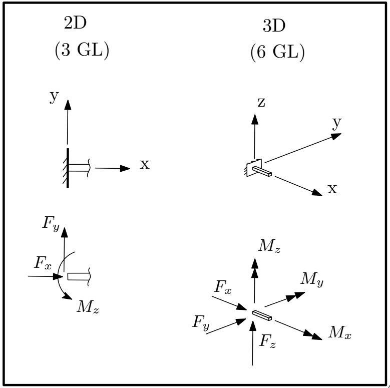
- limita 3 GL no plano e 6 GL no espaço;



Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Engastamento ou engaste:

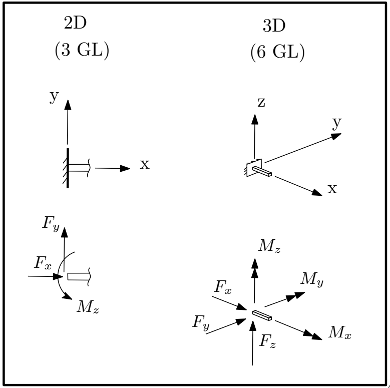
- limita 3 GL no plano e 6 GL no espaço;
- os GL limitados são deslocamentos lineares e angulares;



Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

Engastamento ou engaste:

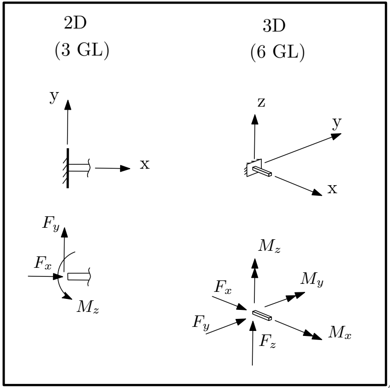
- limita 3 GL no plano e 6 GL no espaço;
- os GL limitados são deslocamentos lineares e angulares;
- impõe uma *força de reação* e um *momento* (binário) *de reação* de qualquer módulo, direção e sentido no "ponto"que representa o centro geométrico do engaste;



Equilíbrio estático – principais tipos de vínculos ideais

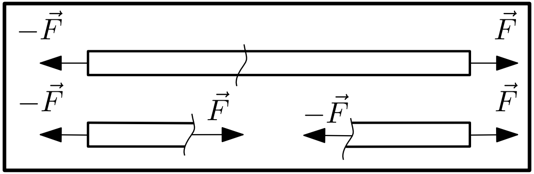
Engastamento ou engaste:

- limita 3 GL no plano e 6 GL no espaço;
- os GL limitados são deslocamentos lineares e angulares;
- impõe uma *força de reação* e um *momento* (binário) *de reação* de qualquer módulo, direção e sentido no "ponto"que representa o centro geométrico do engaste;
- como a direção e o sentido não são conhecidos a priori:
  - no 2D utilizam-se duas componentes de força e a componente de momento ⊥ ao plano;
  - no 3D, utilizam-se 3 componentes de força e 3 componentes de momento



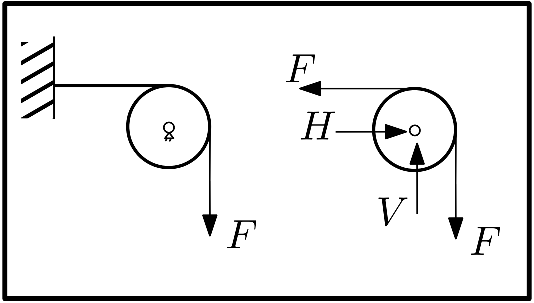
Equilíbrio estático – sistemas de corpos – fio ou cabo ideal

- possui massa desprezível e é inextensível;
- **não** resiste à *flexão* $\Rightarrow$ o único sistema de forças capaz de mantê-lo em equilíbrio é formado por *duas forças de tração diretamente opostas*;
- a força de tração possui o mesmo módulo em todos os pontos;
- por ser totalmente flexível, não resiste a um binário.



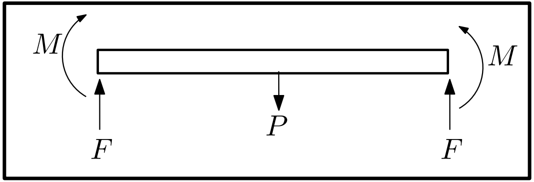
Equilíbrio estático – sistemas de corpos – polia ideal

- não oferece resistência ao movimento do cabo;
- pode possuir ou não massa;
- desliza sem atrito sobre seus mancais de suporte;
- o cabo enrola-se sem atrito sobre a polia ideal.



Equilíbrio estático – sistemas de corpos – barra ideal

- possui apenas uma dimensão – o comprimento – não desprezível;
- pode possuir ou não massa;
- resiste a esforços de tração/compressão e flexão;
- é o principal componente das treliças.



Equilíbrio estático – sistemas de corpos – placa ideal

- possui uma dimensão – a espessura– desprezível;
- pode possuir ou não massa;
- resiste a esforços de tração/compressão e flexão.