

PTC3360 - Introdução a Redes e Comunicações

4.2 Ruído e Filtros Casados - Parte 1

[Lathi and Ding, 2012, Seções 8.1 a 8.3]

Outubro 2024

- 1 Redes de Comunicação
- 2 Introdução às camadas superiores
- 3 Camadas de enlace e física
- 4 **Comunicações digitais e sua aplicação na camada física**
 - **Introdução**
 - Densidade espectral de energia e de potência
 - Ruído e Filtros Casados
 - Probabilidade condicional e probabilidade total
 - Variáveis aleatórias gaussianas

- 1 Redes de Comunicação
- 2 Introdução às camadas superiores
- 3 Camadas de enlace e física
- 4 Comunicações digitais e sua aplicação na camada física**
 - Introdução
 - Densidade espectral de energia e de potência**
 - Ruído e Filtros Casados
 - Probabilidade condicional e probabilidade total
 - Variáveis aleatórias gaussianas

- 1 Redes de Comunicação
- 2 Introdução às camadas superiores
- 3 Camadas de enlace e física
- 4 **Comunicações digitais e sua aplicação na camada física**
 - Introdução
 - Densidade espectral de energia e de potência
 - **Ruído e Filtros Casados**
 - Probabilidade condicional e probabilidade total
 - Variáveis aleatórias gaussianas

- Nessa seção estabelecem-se conceitos e definem-se notações sobre probabilidades e variáveis aleatórias que serão muito utilizadas nas próximas aulas.
- Conceitos de probabilidade, ruído e filtros casados.

Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

Dado um evento B com probabilidade não nula, define-se a **probabilidade condicional** de um evento A , dado B , como

$$P[A|B] \triangleq \frac{P[AB]}{P[B]}$$

Exemplo na lousa: caixa de resistores

Teorema da Probabilidade Total

Dados N eventos mutuamente exclusivos B_n , $n = 1, 2, \dots, N$, cuja união seja o espaço de amostras S , a probabilidade de qualquer evento A pode ser escrita como

$$P[A] = \sum_{n=1}^N P[A|B_n] P[B_n]$$

Representação gráfica na lousa

Teorema de Bayes

$$P[B_n|A] = \frac{P[A|B_n] P[B_n]}{P[A]}$$

ou

$$P[B_n|A] = \frac{P[A|B_n] P[B_n]}{\sum_{n=1}^N P[A|B_n] P[B_n]}$$

Dedução na lousa

- $P[B_n]$ - probabilidades *a priori* (antes de se saber da ocorrência de A)
- $P[B_n|A]$ - probabilidades *a posteriori* (depois de se saber da ocorrência de A)

Exemplos: Canal Binário

Canal simétrico ([Lathi and Ding, 2012, Exemplo 8.13])

Considere que num sistema de comunicação digital a probabilidade de transmitir 1 é Q e a de transmitir 0 é $1 - Q$. A probabilidade de cometer um erro na recepção é P_e em ambos os casos. Determine as probabilidades de se ter 1 e de se ter 0 na saída do receptor.

Canal assimétrico ([Lathi and Ding, 2012, Exemplo 8.14])

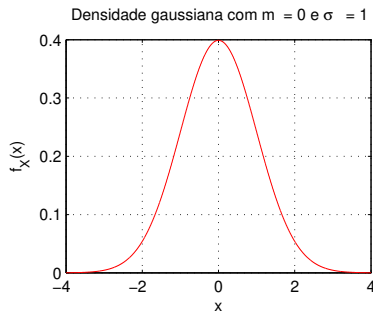
Considere agora que $P[\varepsilon|0] = 10^{-6}$ e $P[\varepsilon|1] = 10^{-4}$, sendo $P[\varepsilon|x_i]$ a probabilidade de erro dado que x_i foi transmitido. Se 0 é transmitido com probabilidade 0.4, determine a probabilidade de erro no canal. Dado que houve erro, qual a probabilidade de ter se enviado 0?

VA gaussiana - Definição

Uma VA é dita *gaussiana* ou *normal* se sua função densidade de probabilidade tem a forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

em que $\sigma > 0$ e m são constantes reais.



VA gaussiana - Definição

- Possivelmente VA mais utilizada nas Ciências e Engenharia.
- Motivos:
 - Teorema do Limite Central
 - Bom modelo para diversos fenômenos físicos
 - Simplicidade
 - Também conhecida como *normal*: *Aparentemente, o próprio Gauss cunhou o termo com referência às “equações normais” envolvidas em suas aplicações, sendo que normal tem o significado técnico de ortogonal em vez de “usual”*
- Valor esperado de X : $\mathbb{E}[X] = m$
- Variância de X : $\text{var}[X] = \sigma^2$
- Notação: $X \sim N(m, \sigma^2)$

- Lembre-se que para calcular probabilidades, é necessário integrar a função densidade de probabilidade:

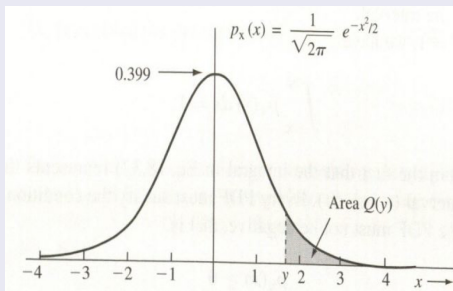
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$$

- **Problema:** $F_X(x)$ é a função de distribuição de probabilidade de X , uma primitiva de $f_X(x)$. Porém, no caso da VA gaussiana, $F_X(x)$ não pode ser escrita na forma de funções elementares!

A função $Q(\cdot)$

Função $Q(\cdot)$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du$$



No Matlab pode-se utilizar a função `qfunc()`. No Python, pode-se usar a função `erfc()`: $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Note que $Q(-x) = 1 - Q(x)$.

$Q(x)$											
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	
0.000	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641	
1.000	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247	
2.000	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859	
3.000	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483	
4.000	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121	
5.000	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776	
6.000	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451	
7.000	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148	
8.000	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867	
9.000	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611	
1.000	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379	
1.100	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170	
1.200	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	985.6	973.0
1.300	968.0E-01	951.0E-01	934.2E-01	917.6E-01	901.2E-01	885.1E-01	869.1E-01	853.4E-01	837.9E-01	822.6E-01	
1.400	807.6E-01	792.7E-01	778.0E-01	763.6E-01	749.5E-01	735.6E-01	721.8E-01	707.8E-01	694.4E-01	681.1E-01	
1.500	648.1E-01	635.2E-01	622.6E-01	610.1E-01	607.8E-01	605.7E-01	603.8E-01	602.1E-01	600.5E-01	599.0E-01	
1.600	548.0E-01	537.0E-01	526.2E-01	515.5E-01	505.0E-01	494.7E-01	484.6E-01	474.6E-01	464.8E-01	455.1E-01	
1.700	447.7E-01	438.3E-01	427.2E-01	418.2E-01	409.3E-01	400.6E-01	392.0E-01	383.6E-01	375.4E-01	367.3E-01	
1.800	397.2E-01	387.7E-01	378.4E-01	369.2E-01	360.2E-01	351.4E-01	342.8E-01	334.4E-01	326.1E-01	318.0E-01	
1.900	297.2E-01	287.7E-01	278.4E-01	269.2E-01	260.2E-01	251.4E-01	242.8E-01	234.4E-01	226.1E-01	218.0E-01	
2.000	227.5E-01	222.2E-01	216.9E-01	211.8E-01	206.8E-01	201.8E-01	197.0E-01	192.3E-01	187.6E-01	183.1E-01	
2.100	176.6E-01	174.3E-01	170.6E-01	165.9E-01	161.8E-01	157.8E-01	153.9E-01	150.0E-01	146.3E-01	142.6E-01	
2.200	139.0E-01	135.5E-01	132.1E-01	128.7E-01	125.5E-01	122.2E-01	119.1E-01	116.0E-01	113.0E-01	110.1E-01	
2.300	107.2E-01	104.6E-01	101.7E-01	99.0E-02	96.42E-02	93.87E-02	91.37E-02	88.94E-02	86.56E-02	84.24E-02	
2.400	81.98E-02	79.76E-02	77.60E-02	75.49E-02	73.44E-02	71.43E-02	69.47E-02	6.756E-02	6.569E-02	6.387E-02	
2.500	62.10E-02	60.37E-02	58.68E-02	57.03E-02	55.43E-02	53.86E-02	52.34E-02	50.85E-02	49.40E-02	47.96E-02	
2.600	46.11E-02	45.27E-02	43.96E-02	42.69E-02	41.45E-02	40.25E-02	39.07E-02	37.93E-02	36.81E-02	35.73E-02	
2.700	34.67E-02	33.64E-02	32.64E-02	31.67E-02	30.72E-02	29.80E-02	28.90E-02	28.03E-02	27.18E-02	26.35E-02	
2.800	25.55E-02	24.77E-02	24.01E-02	23.27E-02	22.56E-02	21.86E-02	21.18E-02	20.52E-02	19.88E-02	19.26E-02	
2.900	18.66E-02	18.07E-02	17.50E-02	16.95E-02	16.41E-02	15.89E-02	15.38E-02	14.89E-02	14.41E-02	13.95E-02	
3.000	13.50E-02	13.06E-02	12.64E-02	12.23E-02	11.83E-02	11.44E-02	11.07E-02	10.70E-02	10.34E-02	10.01E-02	
3.100	9.76E-03	9.54E-03	9.34E-03	9.16E-03	8.99E-03	8.84E-03	8.69E-03	8.54E-03	8.40E-03	8.26E-03	
3.200	6.81E-03	6.67E-03	6.51E-03	6.36E-03	6.20E-03	6.05E-03	5.90E-03	5.75E-03	5.60E-03	5.46E-03	
3.300	4.84E-03	4.66E-03	4.50E-03	4.34E-03	4.18E-03	4.04E-03	3.89E-03	3.75E-03	3.62E-03	3.49E-03	
3.400	3.39E-03	3.24E-03	3.11E-03	3.01E-03	2.90E-03	2.80E-03	2.70E-03	2.60E-03	2.50E-03	2.41E-03	
3.500	2.32E-03	2.24E-03	2.18E-03	2.07E-03	2.01E-03	1.93E-03	1.85E-03	1.78E-03	1.71E-03	1.65E-03	
3.600	1.59E-03	1.53E-03	1.47E-03	1.41E-03	1.36E-03	1.31E-03	1.26E-03	1.21E-03	1.16E-03	1.12E-03	
3.700	1.07E-03	1.03E-03	9.95E-04	9.57E-04	9.20E-04	8.82E-04	8.46E-04	8.12E-04	7.81E-04	7.52E-04	
3.800	7.23E-04	6.98E-04	6.67E-04	6.40E-04	6.15E-04	5.90E-04	5.66E-04	5.44E-04	5.22E-04	5.02E-04	
3.900	4.81E-04	4.61E-04	4.42E-04	4.24E-04	4.07E-04	3.90E-04	3.74E-04	3.59E-04	3.44E-04	3.30E-04	
4.000	3.16E-04	3.03E-04	2.91E-04	2.78E-04	2.67E-04	2.54E-04	2.43E-04	2.31E-04	2.22E-04	2.15E-04	
4.100	2.06E-04	1.97E-04	1.89E-04	1.81E-04	1.73E-04	1.66E-04	1.59E-04	1.52E-04	1.48E-04	1.45E-04	
4.200	1.33E-04	1.27E-04	1.22E-04	1.16E-04	1.11E-04	1.06E-04	1.02E-04	9.77E-05	9.34E-05	8.93E-05	
4.300	8.54E-05	8.16E-05	7.80E-05	7.45E-05	7.12E-05	6.80E-05	6.50E-05	6.21E-05	5.94E-05	5.68E-05	
4.400	5.41E-05	5.16E-05	4.93E-05	4.71E-05	4.49E-05	4.29E-05	4.09E-05	3.91E-05	3.72E-05	3.56E-05	
4.500	3.39E-05	3.24E-05	3.09E-05	2.94E-05	2.81E-05	2.67E-05	2.55E-05	2.43E-05	2.32E-05	2.21E-05	
4.600	2.12E-05	2.01E-05	1.91E-05	1.82E-05	1.74E-05	1.66E-05	1.58E-05	1.50E-05	1.43E-05	1.36E-05	
4.700	1.30E-05	1.23E-05	1.17E-05	1.12E-05	1.06E-05	1.01E-05	9.68E-06	9.21E-06	8.76E-06	8.33E-06	
4.800	7.93E-06	7.54E-06	7.17E-06	6.82E-06	6.49E-06	6.17E-06	5.86E-06	5.58E-06	5.30E-06	5.04E-06	
4.900	4.79E-06	4.55E-06	4.32E-06	4.11E-06	3.90E-06	3.71E-06	3.52E-06	3.34E-06	3.17E-06	3.01E-06	
5.000	2.86E-06	2.72E-06	2.58E-06	2.45E-06	2.32E-06	2.20E-06	2.09E-06	1.98E-06	1.87E-06	1.79E-06	
5.100	1.69E-06	1.61E-06	1.52E-06	1.44E-06	1.37E-06	1.30E-06	1.23E-06	1.170E-06	1.09E-06	1.051E-06	

$Q(x)$ em Javascript. Salvar e executar em um navegador.

Cálculo de probabilidade para VA gaussiana

$$X \sim N(m, \sigma^2)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Exemplo Simples - Revisão

A relação sinal-ruído no canal de um certo sistema de comunicações dada em dB pode ser aproximada por uma variável aleatória gaussiana X com $m = 3$ e $\sigma = 2$. Encontre a probabilidade do evento $\{X \leq 5, 5\}$.

Lathi, B. B. P. and Ding, Z. (2012). *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*. LTC.