/ /

Lista 10 - Exercício 1.

(a) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$

Dividindo ambos os lados por 4:

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$ → hiperboloide de uma folha

com $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$

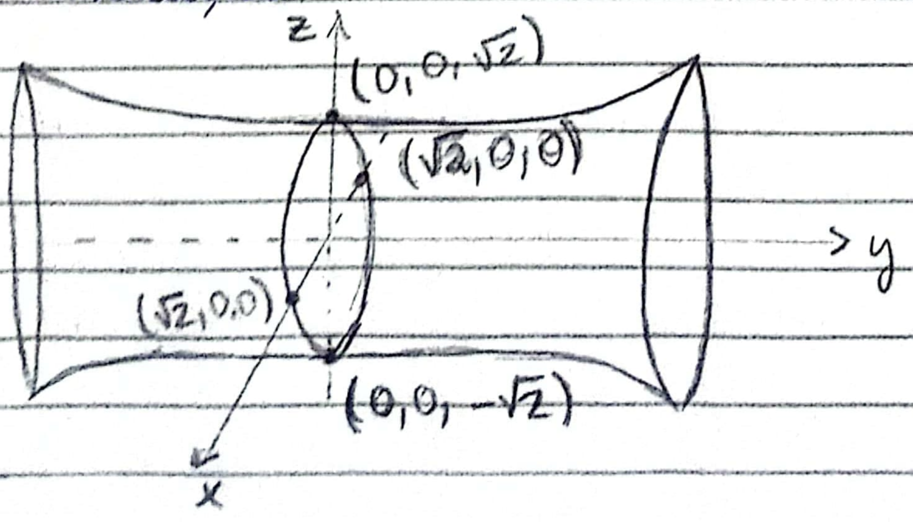
O sinal "−" acompanha o termo $\frac{y^2}{4}$, logo a "abertura" do hiperboloide de uma folha está ao longo do eixo y.

As intersecções com o eixo x são em $(-a,0,0)$ e $(a,0,0)$. Portanto, $(-\sqrt{2},0,0)$ e $(\sqrt{2},0,0)$.

e com o eixo z em ~~(−b,0,0) e~~ $(0,0,-b)$ e $(0,0,b)$. Logo, $(0,0,-\sqrt{2})$ e $(0,0,\sqrt{2})$

Analisando a intersecção com planos $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, temos que: $\frac{x^2}{2} - \frac{k^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 1 + \frac{k^2}{4}$.

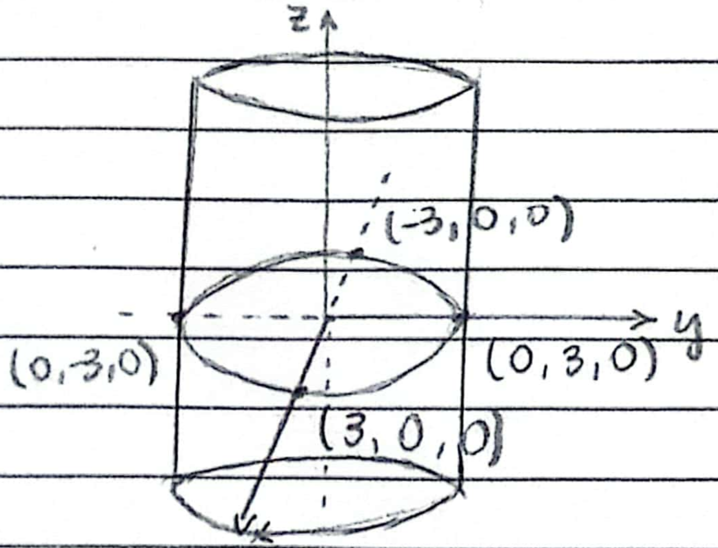
Ou seja, temos circunferências. Portanto, a superfície é de revolução.



Digitalizado com CamScanner

(c) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 3,\ b = 3$

A equação não depende de z. Então, a intersecção com planos $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, é sempre uma circunferência de centro na origem e raio 3.
A cônica é um cilindro de revolução.
Intersecção com o eixo x: $(-a,0,0)$ e $(a,0,0)$
$\Rightarrow (-3,0,0)$ e $(3,0,0)$
Intersecção com o eixo y: $(0,-b,0)$ e $(0,b,0)$
$\Rightarrow (0,-3,0)$ e $(0,3,0)$
Não há intersecção com o eixo z (o eixo está "dentro" do cilindro).



e) $\underbrace{2x^2 + y^2 + 2z^2}_{\text{Todos os termos são positivos}} = \underbrace{-4}_{\text{negativo}}$

Todos os termos são positivos — negativo

Não há nenhum ponto (x,y,z) que satisfaça a equação. Logo, a quádrica é o conjunto vazio.

Digitalizado com CamScanner

(g) $z = x^2 + 2y^2 \Rightarrow z = \dfrac{x^2}{(1)^2} + \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} \Rightarrow a = 1,\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

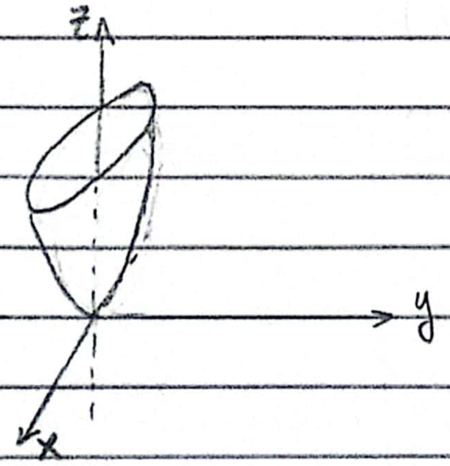
Pela equação reduzida, a quádrica é um paraboloide.

$x^2 + 2y^2$ é sempre positivo ou zero. Logo, $z \geq 0$.

A origem $(0,0,0)$ satisfaz a equação, portanto pertence à quádrica.

Quando intersectamos o paraboloide por planos $z = k$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = k \Rightarrow \begin{cases} \emptyset, \text{ se } k < 0 \\ (x,y) = (0,0), \text{ se } k = 0 \\ \text{elipse, se } k > 0 \to \text{não é de revolução} \end{cases}$$



(j) $z = x^2 + 2y^2 + 1$

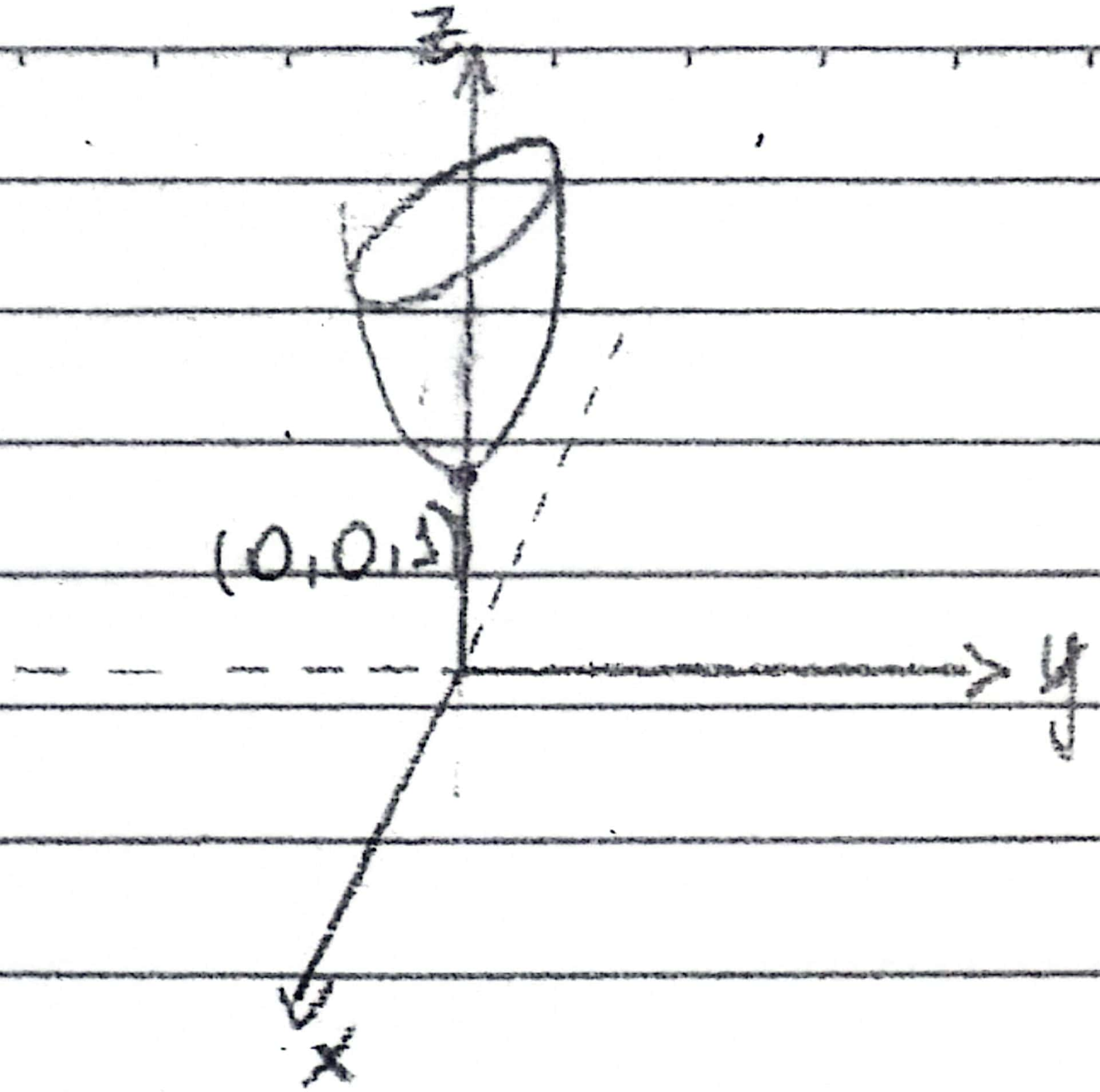
$z = x^2 + 2y^2$ é o paraboloide do item (g).

$z = x^2 + 2y^2 + 1$ é o mesmo paraboloide deslocado 1 unidade para cima no eixo z.

Fazendo a mesma análise da intersecção com $z = k$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = k - 1 \to \begin{cases} \emptyset, \text{ se } k < 1 \\ (x,y) = (0,0), \text{ se } k = 1 \\ \text{elipse, se } k > 1 \to \text{não é de revolução} \end{cases}$$

Digitalizado com CamScanner



Digitalizado com CamScanner

Lista 01 - Exercício 1: Dê o nome e faça o esboço das quádricas dadas pelas equações abaixo. Diga também se é ou não uma superfície de revolução:

b) $2x^2 - y^2 + 2z^2 = -4$.

Note que

$2x^2 - y^2 + 2z^2 = -4$ pode ser reescrita como

$-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$, basta multiplicar por (-4). Esta é a equação reduzida do hiperbolóide de duas folhas, onde

$a = \sqrt{2}$, $b = 2$ e $c = \sqrt{2}$.

Pela observação [25-2](a) Boulos, temos que a quádrica é totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas, i.e, ela é simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados, e à origem.

- Sua intersecção com o eixo Ox:

Um ponto $(x,0,0) \in \Omega$ (Ω hiperbolóide de duas folhas) se

$$-x^2 = a^2.$$

Logo, $\Omega \cap Ox = \emptyset$.

- Sua intersecção com o eixo Oz:

Um ponto $(0,0,z) \in \Omega$ se

$$-z^2 = c^2.$$

Logo, $\Omega \cap Oz = \emptyset$.

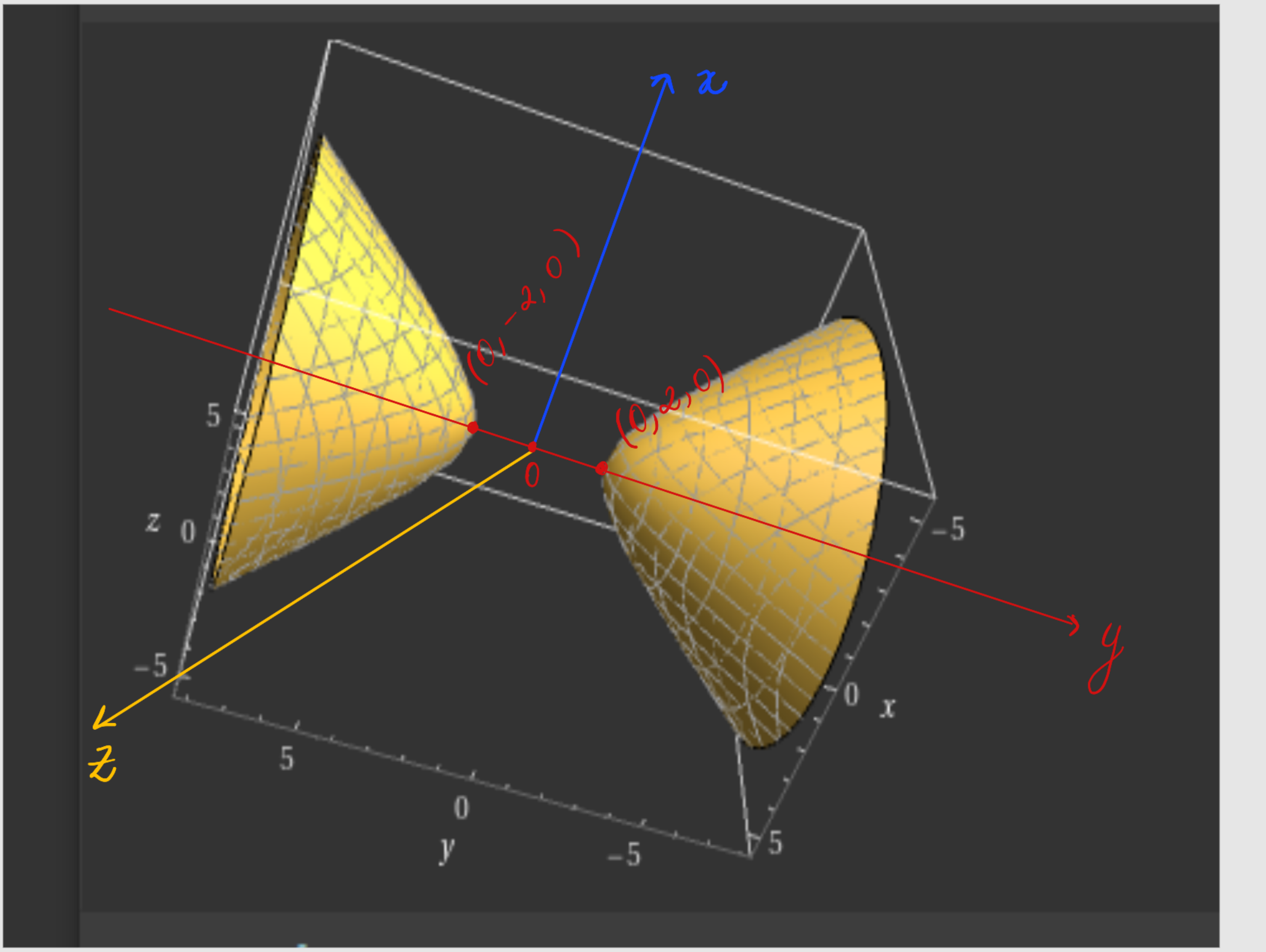
- Sua intersecção com o eixo Oy:

Um ponto $(0,y,0) \in \Omega$ se

$$y^2 = b^2 \iff y = b \text{ ou } y = -b$$

Logo, $\Omega \cap Oy = \{(0,b,0),(0,-b,0)\}$.

$$= \{(0,2,0),\ (0,-2,0)\}.$$



Veja que a intersecção de Ω com o plano $\pi: y = k$, paralelo a Oxz, é descrito como

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{Pa^2} + \dfrac{z^2}{Pc^2} = 1 \\ \\ y = k \end{cases}, \quad P = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

e como $a = c = \sqrt{2}$ temos que $\pi \cap \Omega$ é uma circunferência de centro $(0, k, 0)$ e raio $\sqrt{2}P$. (Ver definição 25-9). Portanto, é uma superfície de revolução.

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1.$

Perceba que a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1,$$

trata-se da equação reduzida do elipsóide, onde $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$.

Devido a observação (25-2 (a) Boulos), o elipsóide é totalmente simétrico em relação ao sistema de coordenadas.

De forma análoga ao item anterior temos

- Intersecção de Ω com Ox:

$$x^2 = a^2 \Rightarrow \Omega \cap Ox = \{(a, 0, 0), (-a, 0, 0)\}$$

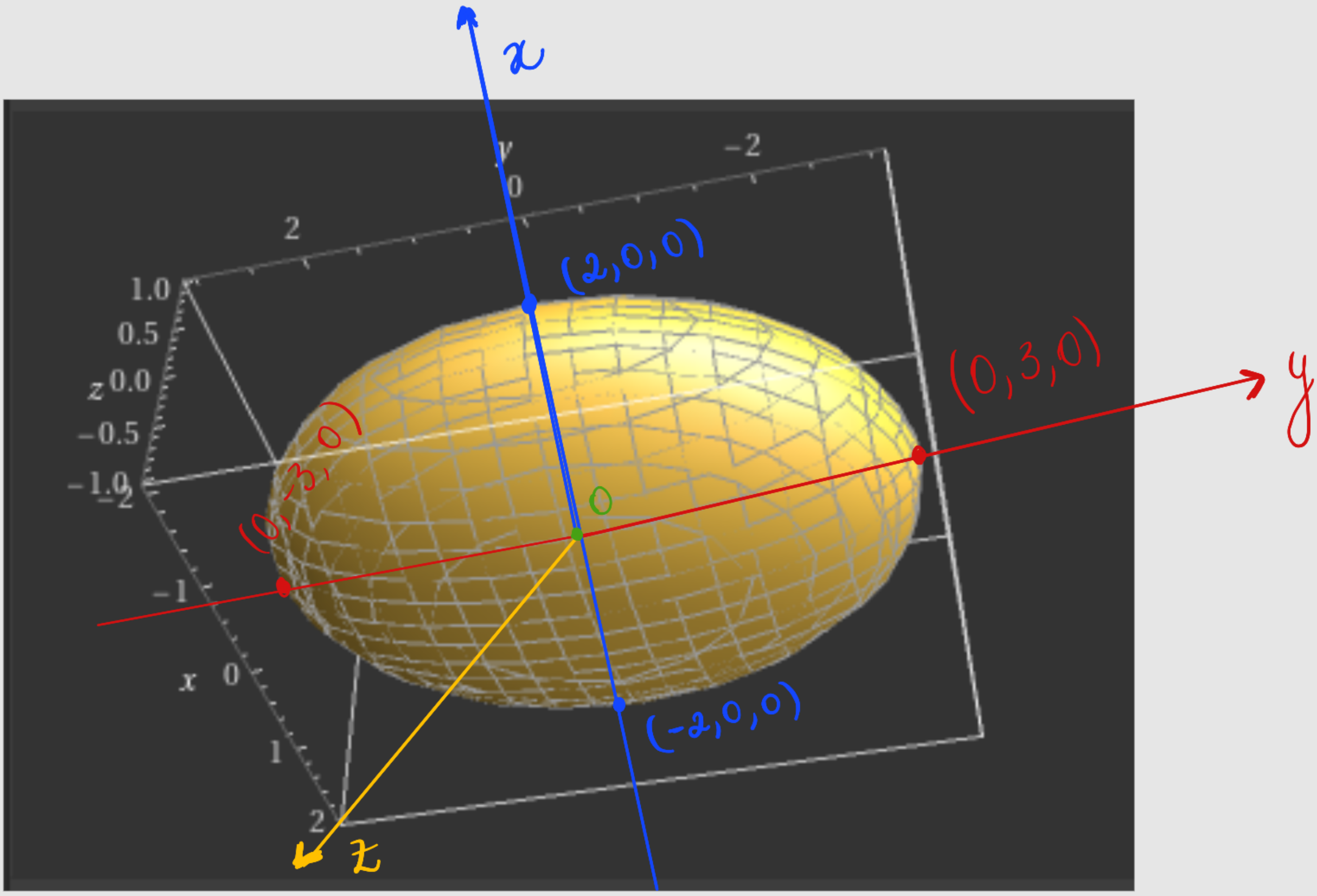
$= \{(2,0,0), (-2,0,0)\}.$

- Interseção de Ω com O_y:

$$y^2 = b^2 \Rightarrow \Omega \cap O_y = \{(0,b,0), (0,-b,0)\}$$
$$= \{(0,3,0), (0,-3,0)\}.$$

- Interseção de Ω com O_z:

$$z^2 = c^2 \Rightarrow \Omega \cap O_z = \{(0,0,c), (0,0,-c)\}$$
$$= \{(0,0,1), (0,0,1)\}.$$



Veja que a interseção de Ω com o plano $\pi : z = k$, paralelo a O_{xy}, é descrita pelo sistema formado pelas equações de Ω e π, i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{Pa^2} + \dfrac{y^2}{Pb^2} = 1 \\ z = k \end{cases}, \quad P = 1 - \frac{k^2}{c^2}.$$

Como $a = 2 < 3 = b$ temos que $\pi \cap \Omega$ é uma elipse, logo Ω não é superf. de revolução.

f) $z^2 = x^2 + 2y^2$.

Veja que $z^2 = x^2 + 2y^2$ é a equação reduzida da quádrica cônica, no qual $a = 1$ e $b = 1/\sqrt{2}$. Como $a \neq b$ temos que trata-se de uma quádrica cônica elíptica.

Devido a observação (25-2 (a) Boulos), esta quádrica é totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas.

Temos que

- Intersecção de Ω com Ox:

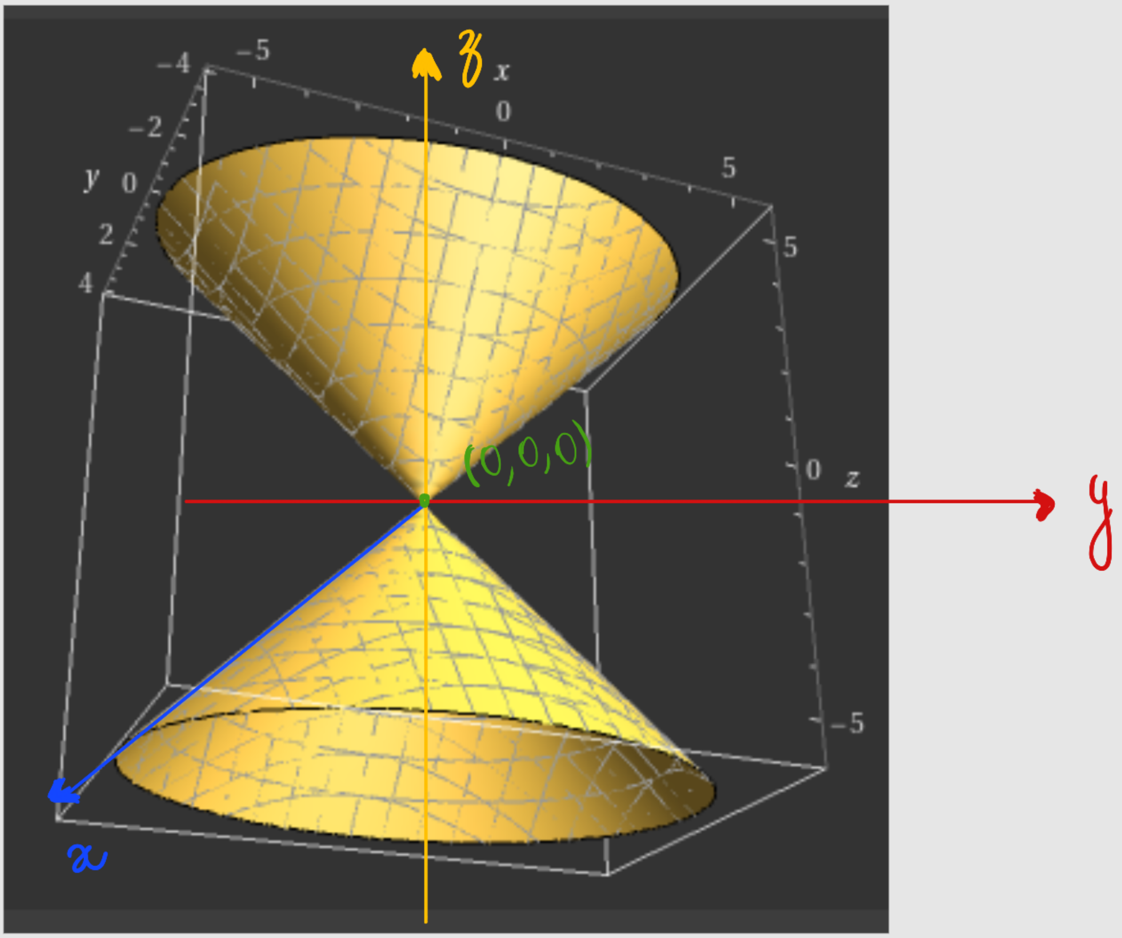
$$x^2 = 0 \Rightarrow \Omega \cap Ox = \{(0,0,0)\}$$

- Intersecção de Ω com Oy:

$$y^2 = 0 \Rightarrow \Omega \cap Oy = \{(0,0,0)\}$$

- Intersecção de Ω com Oz:

$$z^2 = 0 \Rightarrow \Omega \cap Oz = \{(0,0,0)\}$$



Planos paralelos a O_{xy} interceptam Ω em elipses semelhantes, exceto o próprio O_{xy} cuja intersecção $O_{xy} \cap \Omega = (0,0,0)$.

Planos paralelos a O_{yz} interceptam Ω em hipérboles semelhantes e $O_{yz} \cap \Omega = (0,0,0)$.

Logo, essa superfície não é de revolução.

h) $z = -x^2 + 2y^2$.

De maneira análoga ao item anterior, podemos reescrever a equação $z = -x^2 + 2y^2$ como

$$z = \frac{-x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2},$$ que trata-se da equação reduzida do parabolóide hiperbólico.

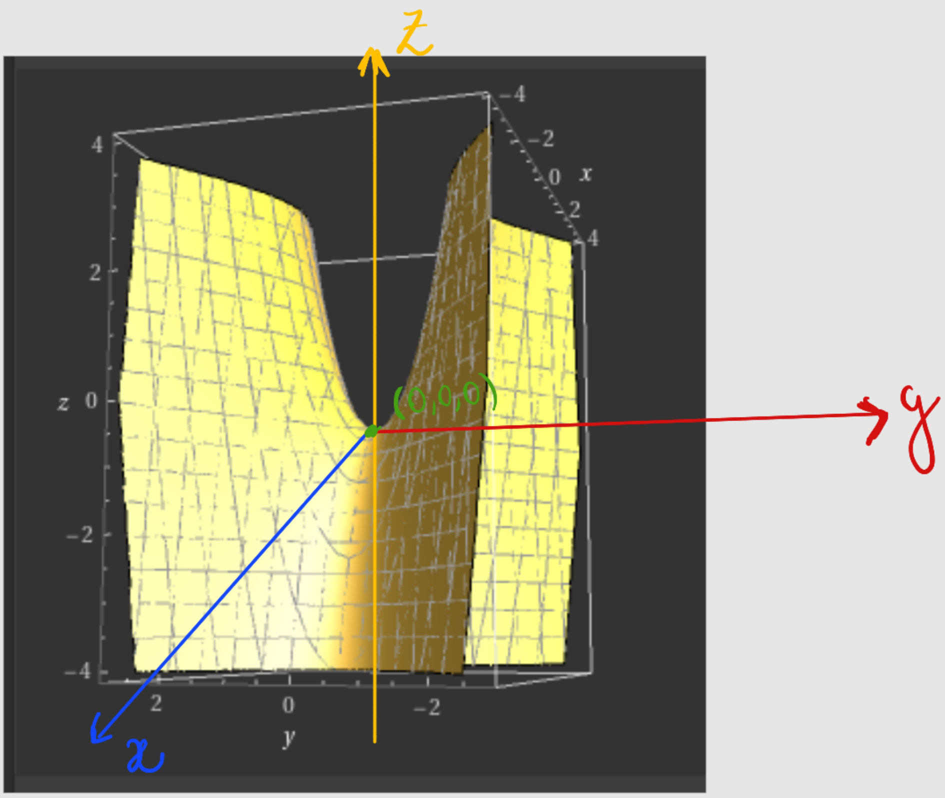
De forma análoga ao item (f) temos que $\Omega \cap O_x = \Omega \cap O_y = \Omega \cap O_z = \{(0,0,0)\}$.

A interseção de Ω com o plano $\pi: z = k$ é descrita como

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}$$

- Se $k = 0$, $\Omega \cap \pi$ é reunião de duas retas;
- Se $k \neq 0$; $k > 0$ ou $k < 0$, $\Omega \cap \pi$ é uma hipérbole.

Logo, Ω não é uma superfície de rotação.



k) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$.

Note que $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$ é o conjunto formado pelo ponto $(0,0,0)$.

Logo, a quádrica é o ponto $(0,0,0)$.

Exercício 2. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos do espaço (ou seja, do conjunto de pontos do espaço) equidistantes da reta $r : X = \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right) + \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e da reta $s : X = \left(0, 0, \frac{1}{4}\right) + \lambda(1, 0, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Resolução: Sejam $A = \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right) \in r$ e $B = \left(0, 0, \frac{1}{4}\right) \in s$ pontos nas retas e $u = (0, 1, 0)$ e $v = (1, 0, 0)$ vetores diretores de r e s, respectivamente.

Dado $P = (x, y, z)$, temos que

$$\overrightarrow{AP} \wedge u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z + \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(-z - \frac{1}{4}, 0, x\right)$$

$$\overrightarrow{BP} \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z - \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, z - \frac{1}{4}, y\right)$$

Portanto

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge u||}{||u||} = \sqrt{z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{16} + x^2} \\ d(P, s) &= \frac{||\overrightarrow{BP} \wedge v||}{||v||} = \sqrt{z^2 - \frac{z}{2} + \frac{1}{16} + y^2} \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} d(P, r) = d(P, s) &\Rightarrow z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{16} + x^2 = z^2 - \frac{z}{2} + \frac{1}{16} + y^2 \\ &\Rightarrow x^2 - y^2 + z = 0 \\ &\Rightarrow z = y^2 - x^2 \end{aligned}$$

Que caracteriza a equação de um paraboloide hiperbólico.

Exercício 3. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos X do espaço de modo que $\frac{d(X,F)}{d(X,\pi)} = 2$, onde $F = (1,0,0)$ e $\pi : x = -1$.

Solução: Seja $P = (x_0, y_0, z_0) \in X$ arbitrário. Então,

$$d(P, F) = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

Como $\pi : x = -1$ o vetor normal ao plano π é dado por $\vec{n} = (-1, 0, 0)$. Assim,

$$d(P, \pi) = |x_0 + 1| .$$

$$2 = \frac{d(P, F)}{d(P, \pi)} = \frac{\sqrt{(x_0-1)^2 + y_0^2 + z_0^2}}{|x_0 + 1|}$$

$$2|x_0 + 1| = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

$$4(x_0 + 1)^2 = (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2$$

$$4(x_0^2 + 2x_0 + 1) = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 + z_0^2$$

$$4x_0^2 + 8x_0 + 4 = x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 + z_0^2$$

dividindo por 3

$$3x_0^2 + 10x_0 - y_0^2 - z_0^2 + 3 = 0$$

$$x_0^2 + \frac{10}{3}x_0 - \frac{y_0^2}{3} - \frac{z_0^2}{3} + 1 = 0$$

$$\left(x_0 + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} - \frac{y_0^2}{3} - \frac{z_0^2}{3} + 1 = 0$$

$$\frac{(X_0 + 5/3)^2}{16/9} - \frac{Y_0^2}{16/3} - \frac{Z_0^2}{16/3} - 1 = 0$$

A equação do lugar geométrico é

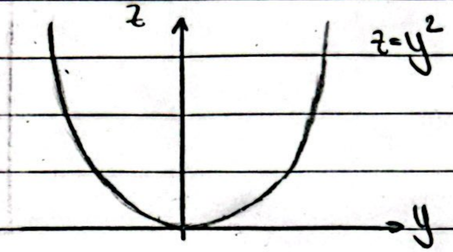
$$\frac{(X_0 + 5/3)^2}{16/9} - \frac{Y_0^2}{16/3} - \frac{Z_0^2}{16/3} = 1$$

que representa um hiperbolóide de duas folhas.

LISTA 10

4- A parábola $z=y^2$ do plano $x=0$ é rotacionada em torno do eixo-z. Encontre a equação do lugar geométrico do espaço descrito pela superfície de revolução obtida

plano
$x=0$

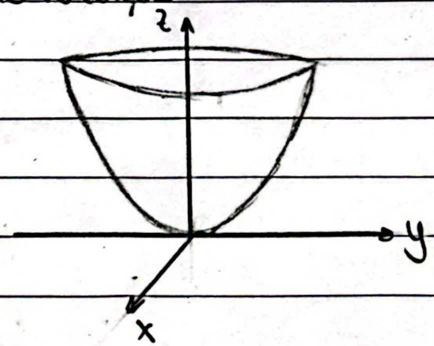


A rotação dessa parábola em torno do eixo-z, o eixo de simetria da mesma, resultará em um parabolóide de rotação, da forma:

$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, com $a=b=1$

$\therefore \boxed{z = x^2 + y^2}$

Parabolóide de rotação



Scanned with CamScanner

⑤ Seja $A=(2,-1,3)$ e $B=(-4,2,1)$

Queremos mostrar que o lugar geométrico dos pontos $P=(x,y,z)$ tal que $d(P,A)=2\,d(P,B)$ é uma esfera.

Temos que

$$d(P,A)=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2} \quad e$$

$$d(P,B)=\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

Usando que $d(P,A)=2\,d(P,B)$, temos que $(d(P,A))^2=4(d(P,B))^2$

logo

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4((x+4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2) \Rightarrow$$

$$x^2-4x+y^2+2y+z^2-6z+14=4(x^2+8x+y^2-4y+z^2-2z+21) \Rightarrow$$

$$3x^2+36x+3y^2-18y+3z^2-2z=14-84$$

$$x^2+12x+y^2-6y+z^2-2/3\,z=-70/3 \Rightarrow$$

$$(x^2+12x+36)+(y^2-6y+9)+(z^2-2/3\,z+1/9)=-70/3+36+9+1/9 \Rightarrow$$

$$(x+6)^2+(y-3)^2+(z-1/3)^2=196/9.$$

Portanto, o lugar geométrico é uma esfera de raio $14/3$ centrada no ponto $(-6,3,1/3)$.

Exercício 6. Por uma translação conveniente de eixos (isto é, uma mudança do sistema de coordenadas Σ, do tipo translação) reduza cada uma das quádricas abaixo à sua forma reduzida. Identifique e faça uma representação geométrica do gráfico das mesmas.

$(a)\ x^2+2\,y^2+4\,z^2-2\,x-8\,y+16\,z+9=0\,.$ $\qquad$ $(b)\ x^2+y^2-2\,x-2\,y+4\,z-2=0\,.$

a) Completamos quadrados

$$x^2-2x+1-\underline{1}+2(y^2-4y+4)-\underline{8}+4(z^2+4z+4)-\underline{16}+9=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+2(y-2)^2+4(z+2)^2=4^2$$

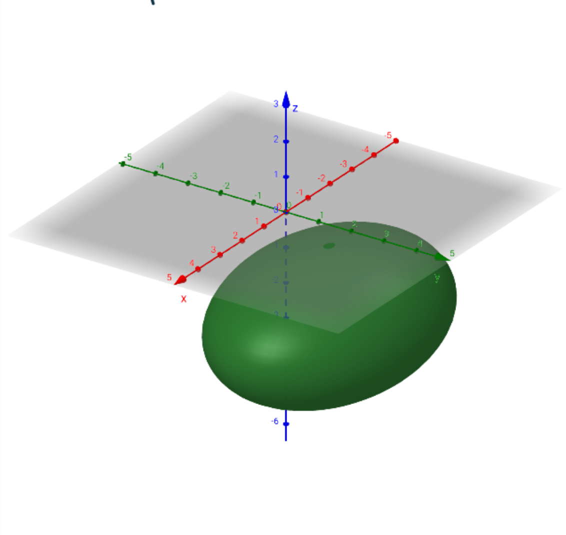
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-2)^2}{(2\sqrt{2})^2}+\frac{(z+2)^2}{2^2}=1$$

Usando a translação $u=x-1$, $v=y+2$, $w=z+2$.

obtemos a quadrica

$$\frac{u^2}{4^2}+\frac{v^2}{(2\sqrt{2})^2}+\frac{w^2}{2^2}=1. \quad \leftarrow \text{Elipse!!}$$

Centro: $(1,2,-2)$



b) Completamos quadrados.

$$x^2-2x+1-1+y^2-2y+1-1+4z-2=0$$

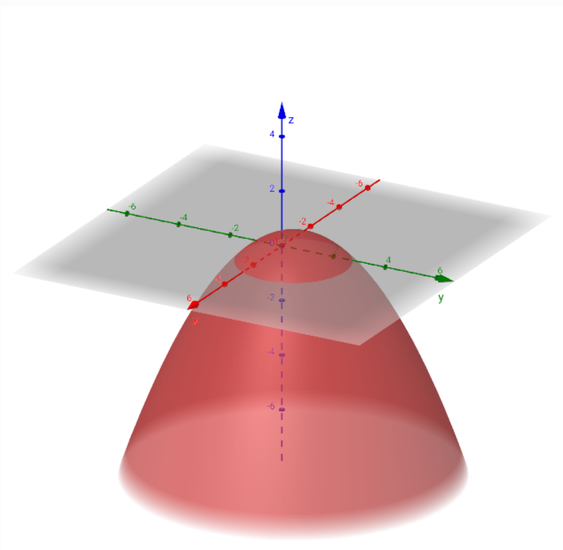
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+4(z-1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+(z-1)=0 \quad \leftarrow \text{Paraboloide!!}$$

Usando a translação $u=x-1,\ v=y-1,\ w=z-1$

obtemos

$$\frac{u^2}{2^2}+\frac{v^2}{2^2}+w=0$$



Vértice: $(1,1,1)$.

Questão 7 - Lista 10

Parabolóide hiperbólico: $z = x \cdot y$

Eliminação do termo misto: Rotação de $\theta = 45°$ em torno do eixo z:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\operatorname{sen} 45° & 0 \\ \operatorname{sen} 45° & \cos 45° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = u \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = u \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + v \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = w \end{cases}$$

Logo, $w = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \Rightarrow w = \frac{2}{4}(u^2 - v^2) \Rightarrow \boxed{w = \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}}$