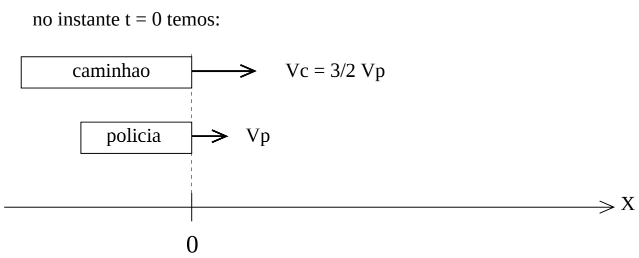
Fundamentos de Mecânica – 4300151

Estudo dirigido 4 - GABARITO
(Equações horárias do movimento em uma dimensão)

Primeiro semestre de 2013

1. Um carro de polícia se desloca em linha reta com velocidade constante v_P. Um caminhão que se move no mesmo sentido com velocidade $\frac{3}{2}v_P$ ultrapassa o carro. A motorista que dirige o caminhão verifica que está acelerando e imediatamente começa a diminuir sua velocidade com uma taxa constante. Contudo, ela estava em um dia de sorte e o policial (ainda se movendo com a mesma velocidade) passa pelo caminhão sem aplicar-lhe a multa.



(a) Escreva as equações horárias para o movimento do carro de polícia e do caminhão. Deixe claro o referencial adotado **(ver desenho acima)**.
Para o carro de polícia, que se move com velocidade constante:

$$x_p(t) = \underbrace{x_{o,p}}_{=0} + v_p\, t \quad \Longrightarrow \quad x_p(t) = v_p\, t$$

Para o caminhão, que se move com aceleração constante:

$$x_c(t) = \underbrace{x_{o,p}}_{0} + \underbrace{v_{o,c}}_{3/2\, v_p}\ t - \frac{1}{2}\, a\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad x_c(t) = \frac{3}{2}\, v_p\, t - \frac{a}{2}\, t^2$$

Observação: alguns alunos tiveram dificuldade em entender porque a aceleração é negativa. Qual o significado físico deste sinal? Como podemos saber que ele é negativo?
Para que o problema tenha solução, o caminhão deve frear, já que sua velocidade no instante $t = 0$ (quando alcança o carro de polícia) é maior ($\frac{3}{2}v_p = 1,5\, v_p > v_p$). Se ele acelerasse, iria se afastar cada vez mais do carro de polícia! Um corpo está freando quando os sinais da velocidade e da aceleração são opostos. No referencial adotado, tanto a velocidade do caminhão como a do carro de polícia são positivas (o sentido do movimento é o que convencionamos chamar de positivo), portanto a aceleração tem que ter um sinal contrário, ou seja, deve ser negativa[1].

---

[1] O que ocorreria se nos esquecêssemos desse detalhe e escrevêssemos a equação horária do caminhão como $x_c(t) = \frac{3}{2}v_p + \frac{1}{2}at^2$? A solução do item (b) seria alterada. Obteríamos $t^*\ (at^* + v_p) = 0$, e portanto $t^* = -\frac{v_p}{a}$. Como necessariamente $v_p > 0$ pela escolha do sistema de referências e o tempo t^* não pode ser negativo (a segunda ultrapassagem ocorre depois da primeira), concluiríamos que $a < 0$.

(b) Calcule a velocidade do caminhão no instante em que o carro de polícia passa novamente por ele, e verifique que esta não depende do módulo da aceleração de frenagem do caminhão.

Quando a polícia alcança o caminhão, em $t = t^*$,

$$x_p(t^*) = x_c(t^*) \quad \Longrightarrow \quad v_p\, t^* = \frac{3}{2}\, v_p\, t^* - \frac{a}{2}\, (t^*)^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{2}\, (t^*)^2 - \frac{v_p}{2}\, t^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^*\; (a t^* - v_p) = 0$$

ou seja, ou $t^* = 0$ (início) ou $(a t^* - v_p) = 0 \implies t^* = v_p/a$.

A velocidade do caminhão, como função do tempo, é dada por:

$$v_c(t) = \frac{dx_c}{dt} = \frac{3}{2}\, v_p - a\, t$$

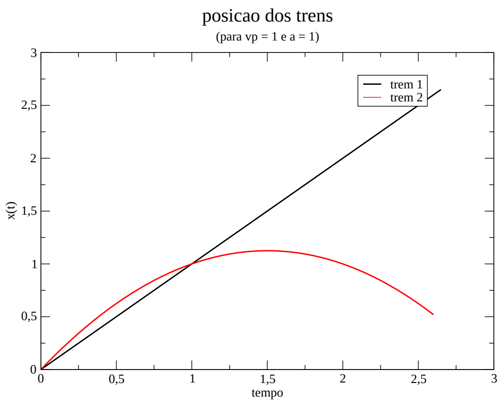
e portanto a velocidade em $t = t^*$ é

$$v_c(t^*) = \frac{3}{2}\, v_p - a\, \frac{v_p}{a} = \frac{1}{2}\, v_p$$

que não depende da aceleração! Ou seja, a velocidade do caminhão no segundo encontro é metade da velocidade do carro de polícia, qualquer que seja a desaceleração do caminhão. O que vai mudar com a intensidade da frenagem é o tempo necessário para que isso aconteça: quanto maior a intensidade da frenagem, mais rapidamente o carro de polícia o alcançará novamente.

(c) Faça um gráfico da posição contra o tempo para os dois veículos.

Polícia: $x_p(t) = v_p\, t$ e o gráfico é uma reta que passa pela origem; caminhão: $x_c(t) = \frac{3}{2}\, v_p\, t - \frac{a}{2}\, t^2$, que é uma parábola com a concavidade voltada para baixo; a sua inclinação inicial, que corresponde à velocidade inicial do caminhão, é **maior** que a do carro de polícia. O ponto onde as duas curvas se cruzam indica a colisão. Na figura abaixo, onde consideramos $v_p = a = 1$, apenas para ilustrar, isto ocorre no ponto (1,1).



2. O maquinista de um trem de passageiros, que se move com velocidade v_1, avista a sua frente, a uma distância d, um trem de carga que viaja nos mesmos trilhos e no mesmo sentido, com velocidade menor v_2. O maquinista do trem de passageiros freia o trem, aplicando-lhe uma desaceleração de módulo a. Mostre que somente não haverá colisão se

$$d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}.$$

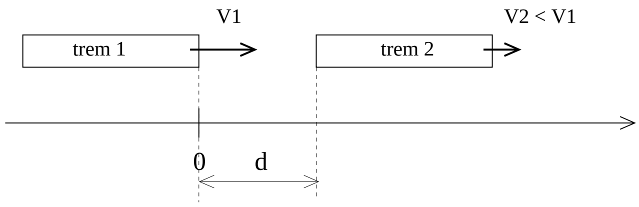
O trem 1 executa um MRUV e o trem 2 um MRU:

$$x_1(t) = 0 + \underbrace{v_{0,1}}_{v_1}\, t - a\, t^2 \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = d + v_2\, t$$

A colisão ocorre em um certo $t = t^*$, tal que $x_1(t^*) = x_2(t^*)$:

$$v_1\, t^* - \frac{a}{2} (t^*)^2 - d = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t^*)^2 - \underbrace{2 \frac{v_1 - v_2}{a}}_{b}\, t^* + \underbrace{2\, \frac{d}{a}}_{c} = 0$$

no instante t = 0 temos:



Para que essa equação tenha solução, ou seja, para que exista um instante t^* tal que $x_1 = x_2$, $\Delta = b^2 - 4\,a\,c > 0$; se $\Delta < 0$ portanto os trens não se encontram nunca:

$$\Delta < 0 \quad \Longrightarrow \quad 4\,\frac{(v_1 - v_2)^2}{a^2} - 8\,\frac{d}{a} < 0 \quad \Longrightarrow \quad 4\,\frac{(v_1 - v_2)^2}{a^2} < 8\,\frac{d}{a} \quad \Longrightarrow \quad d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$$

3. Na cobrança de um pênalti, em um jogo de futebol, a bola é chutada de uma distância $d = 11\,\mathrm{m}$ do gol, e a velocidade típica da bola é $v_B = 100\,\mathrm{km/h}$. O tempo que o goleiro gasta para cair é aproximadamente igual ao tempo que um objeto gasta para cair de uma altura $h/2$, sendo h a altura do goleiro. Calcule:

   (a) o tempo aproximado que a bola leva no trajeto até o gol, supondo sua trajetória retilínea e rente ao chão;

   (b) o tempo que o goleiro leva para cair. É possível que o goleiro pegue uma bola rasteira sem pular antes do chute?

   Tempo que a bola leva para atingir o gol: a bola, *em um chute rasteiro*, faz um MRU com velocidade $v_b = 100$ km/h ≈ 28 m/s; então:

$$x - x_o = v_b\,t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{11}{28} \approx 0,40 \text{ s.}$$

   Tempo que o goleiro leva para cair: o goleiro cai sob a ação da gravidade, e portanto realiza um MRUV; supondo a altura do goleiro como sendo $\sim 1,90$ m, temos:

$$y - y_o = h = \frac{g}{2}\,t^2 \quad \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{0,1939} \approx 0,44 \text{ s.}$$

   portanto o goleiro não alcança a bola!

4. **Desafio.** A posição de uma partícula que se move ao longo do eixo x depende do tempo (para $t \geq 0$) de acordo com a equação

$$x\,(t) = At^2 - Bt^3,$$

   com $A = 1\,\mathrm{m/s^2}$ e $B = 1\,\mathrm{m/s^3}$.

   (a) Em que instante a partícula alcança sua posição máxima em x? x é máximo quando $v = 0$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2\,A\,t - 3\,B\,t^2$$

   A velocidade será nula em um certo instante $t = t'$:

$$v(t') = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\,A\,t' - 3\,B\,(t')^2 \quad \Longrightarrow \quad t'\,\left(2\,A - 3\,B\,t'\right) = 0;$$

   A expressão acima é o produto de dois números, $\underbrace{N_1}_{t'} \times \underbrace{N_2}_{2\,A - 3\,B\,t'}$; para que esse produto seja igual a zero, N_1 ou N_2 devem ser zero, portanto ou $t' = 0$ ou $t' = \frac{2A}{3B} = \frac{2}{3}$. O ponto máximo é atingido quando $t = 2/3$ s.

(b) Qual a distância total percorrida pela partícula nos primeiros $4\,\mathrm{s}$? A posição da partícula em $t = 4$ s:

$$x(t = 4) = 4^2 - 4^3 = 16 - 64 = -48 \text{ m}$$

O corpo portanto anda para a frente, freando, durante $2/3$ s, inverte o sentido do movimento, passa pela origem novamente e, em $t = 4$ s está no marco -48 m. Nos primeiros $2/3$ s o corpo percorre uma distância de:

$$x(t = 2/3) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{12 - 8}{27} = \frac{4}{27} \text{ m;}$$

A distância total percorrida é portanto $2 \times \frac{4}{27} + 48 \approx 48,3$ m; Note que a posição do corpo em $t = 4$ s é -48 m e seu deslocamento, entre $t = 0$ s e $t = 4$ s, definido como $x(t = 4) - x(t = 0)$,também é -48 m.

(c) Escreva a aceleração da partícula em função do tempo.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2\,A - 3\,B\,t$$