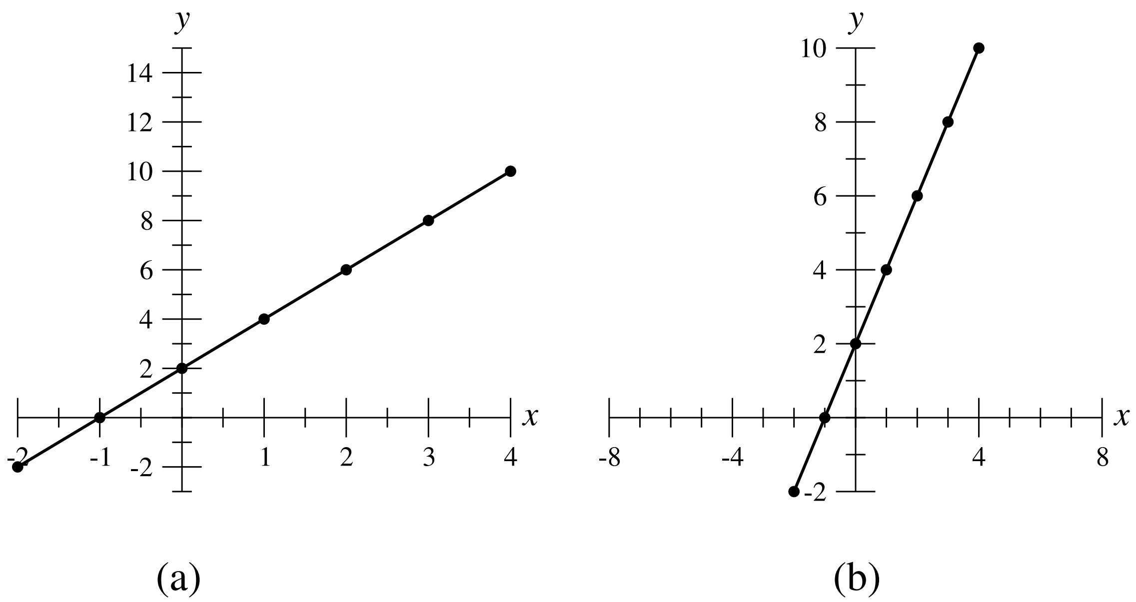
Fundamentos de Mecânica – 4300151

Estudo dirigido 2
(Gráficos)

Primeiro semestre de 2013

No estudo de um fenômeno físico, são realizadas experiências em que são medidas diversas grandezas ao mesmo tempo. A relação entre essas grandezas pode ser expressa por meio de fórmulas matemáticas, tabelas ou gráficos. Muitas vezes o significado de uma lei da natureza ou de uma equação fica mais claro se as representamos num gráfico. Este texto pretende fazer uma revisão de algumas ideias básicas necessárias para a construção e interpretação de gráficos. Para representar os gráficos no plano, vamos usar um sistema de *eixos cartesianos* ortogonais. Para cada eixo adota-se uma escala, que pode ser diferente em cada eixo. Na construção de um gráfico, a primeira coisa importante que temos que fazer é uma **escolha conveniente da escala**. Se a escala não for conveniente, parte do gráfico pode ficar fora do papel, ou o gráfico pode ficar tão pequeno que não podemos observar seus detalhes. Procure identificar os valores máximos e mínimos das grandezas que serão "plotadas" (isto é, representadas no gráfico) nos eixos x e y, o tamanho disponível no papel, e escolha a escala de forma a ocupar todo ou quase todo esse espaço. Agora observe os gráficos abaixo e responda rápido: eles representam funções iguais ou diferentes?



Para construir um gráfico de uma função, organizamos uma tabela com valores convenientes de x e os correspondentes valores de y. A seguir localizamos no plano (supondo um sistema de eixos cartesianos) cada par (x, y). A união desses pontos é o gráfico da função.

Construa uma tabela com pares de valores x e y para os dois gráficos acima. Responda novamente: eles representam a mesma função?

A equação de uma reta

Uma reta é descrita pela função de primeiro grau (porque a variável x aparece elevada à potência 1)

$$y = ax + b,$$

em que a e b são constantes reais.

Os coeficientes a e b na equação da reta

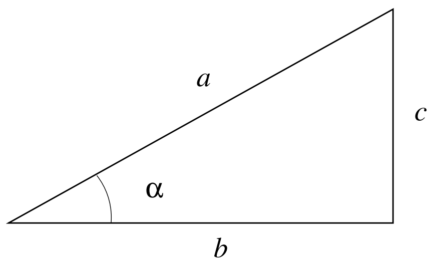
Na folha anexa, faça o gráfico das 4 funções indicadas abaixo, para x variando de -3 até $+3$. Escolha a mesma escala para representar todos os gráficos. Escolha com cuidado a escala no eixo y de forma a ter a melhor ocupação do espaço, mas de forma que todos os gráficos caibam no papel, no intervalo indicado. Use uma cor diferente para cada gráfico (identifique em cada caso os valores de a e b).

(a) $y = 2x + 2$ (b) $y = 3x + 2$ (c) $y = 2x - 1$ (d) $y = -2x + 2$

O que há em comum entre as retas (a) e (b)? E entre as retas (a) e (c)? O que distingue a reta do item (d) das demais?

O número real a é denominado **coeficiente angular** e está associado à inclinação da reta. No caso (a), o coeficiente angular é igual a 2; no caso (b), é igual a 3. Note que a reta descrita pela função do item (b) é "mais inclinada" que a do item (a). Note que, se a for negativo ($a < 0$), como no caso do item (d), a variável y decresce à medida que x cresce, e a reta forma um ângulo maior que 90° com o eixo x. Se lembrarmos da definição de tangente de um ângulo α, veremos que a constante a é numericamente igual[1] à tangente do ângulo que a reta forma com a direção do eixo x.

Considere o triângulo retângulo abaixo. Os dois lados que formam o ângulo reto são os catetos. O lado c é o cateto oposto (ao ângulo α) e o lado b é o cateto adjacente (ao ângulo α). No triângulo retângulo define-se tangente de um ângulo α (abreviadamente tgα) como o cateto oposto a α dividido pelo cateto adjacente a α. Podemos estender as definições das funções trigonométricas, como seno, cosseno e tangente, para qualquer ângulo. A tangente de um ângulo $90° < \beta < 180°$ tem sinal negativo e é igual, em módulo, à tangente do ângulo $180° - \beta$. Com essa definição, o coeficiente a pode sempre ser interpretado como tendo valor igual à tangente do ângulo que a reta $y = ax + b$ faz com a direção do eixo x. Se a for negativo, o ângulo que a reta forma com o eixo x é obtuso, e a função é decrescente, ou seja, y diminui se x aumenta.

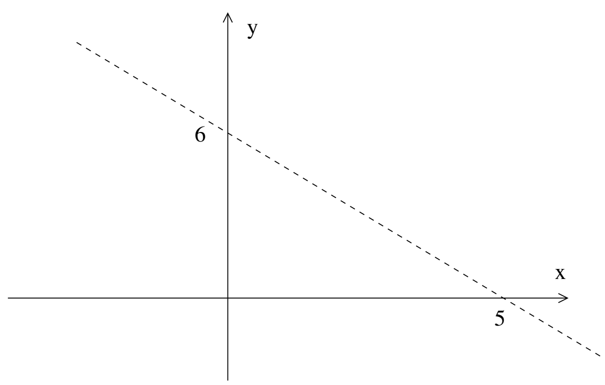


$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

O número real b corresponde ao valor de y quando $x = 0$, ou seja, indica em que ponto a reta vai "cortar" o eixo y. Note que a reta descrita pela função do item (a) cruza o eixo y em $y = 2$ e a reta do item (c) cruza o eixo y em $y = -1$. Como o coeficiente angular das duas retas é o mesmo ($a = 2$), as retas tem a mesma inclinação, ou seja, **são paralelas**.

Exercícios

1. Duas grandezas x e y estão relacionadas de modo que o gráfico de y em função de x é o indicado abaixo. Determine



(a) o coeficiente angular da reta;

(b) o valor da constante b;

(c) a expressão que relaciona y com x.

[1]Dizemos numericamente igual porque a tangente de um ângulo é uma grandeza sem dimensão, enquanto que o coeficiente angular de uma reta associada a uma lei física ou a um gráfico em geral tem uma dimensão (unidade), que corresponde à dimensão da grandeza representada no eixo y dividida pela dimensão da grandeza representada no eixo x.

2. Um passageiro aciona um cronômetro e, em diversos instantes, olhando o velocímetro, anota a velocidade do carro no qual viaja. Os valores obtidos permitem elaborar a tabela abaixo.

t (s)	v (m/s)
-4	3,0
-2	5,5
0	8,0
2	10,5
4	13,0
6	15,5
8	18,0
10	20,5

   (a) Construa o gráfico da velocidade em função do tempo.

   (b) Através do gráfico, determine a velocidade do carro no instante $t = 7\,$s.

   (c) Determine o coeficiente angular dessa reta. Qual a sua unidade?

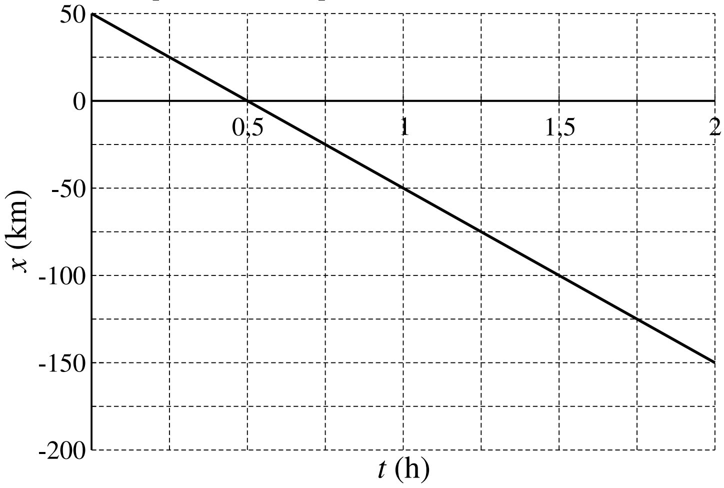
3. A posição x de um veículo, em relação ao marco zero de uma estrada, é dada em função do tempo t pelo gráfico abaixo. O instante $t = 0$ corresponde ao instante em que o veículo partiu. Determine

   (a) a distância do veículo ao marco zero no instante $t = 0$;

   (b) a distância do veículo ao marco zero no instante $t = 2\,$h;

   (c) o instante em que o veículo atinge o marco zero;

   (d) a expressão que relaciona x com t.



4. Um trem com aceleração máxima a e desaceleração máxima f (módulo da desaceleração que o freia) tem que percorrer uma distância D entre duas estações. O maquinista pode escolher entre (i) seguir com aceleração máxima até certo ponto, e então desacelerar com a desaceleração máxima, até chegar; ou (ii) acelerar até uma certa velocidade, manter essa velocidade constante durante algum tempo, e depois frear até a chegada.

   (a) Mostre que a primeira opção é a que minimiza o tempo de percurso. Sugestão: utilize gráficos de $v(t) \times t$.

   (b) Calcule o tempo mínimo de percurso em função de a, f e D.