Fundamentos de Mecânica – 4300151

Gabarito do estudo dirigido 3
(Movimento em uma dimensão)

Primeiro semestre de 2013

1. Um elevador sobe com uma aceleração para cima de $1,2\,\mathrm{m/s^2}$. No instante em que sua velocidade é $2,4\,\mathrm{m/s}$, um parafuso solto cai do teto do elevador, que está a $2,7\,\mathrm{m}$ do seu piso. Calcule:

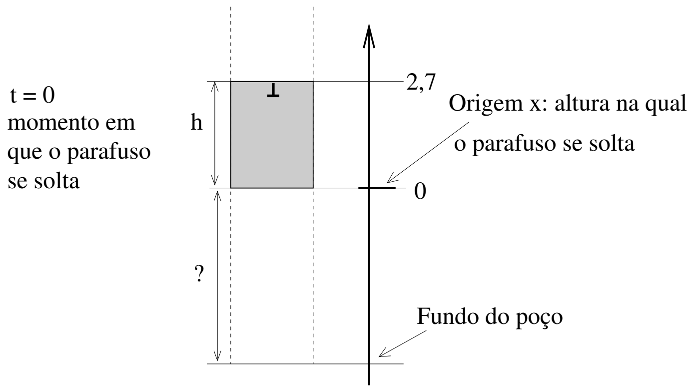
   (a) o tempo que o parafuso gasta para atingir o piso;

   (b) o seu deslocamento em relação ao poço do elevador.

Solução

Como discutido em classe, há várias escolhas possíveis para o sistema de referências (ou *referencial*). Vejamos as três opções mais comuns.

- Escolha A – mais fácil e adequada.



O sistema de referências adotado é orientado para cima e tem origem na posição do piso do elevador no momento em que o parafuso se solta, sendo esse o momento escolhido também como origem do tempo (instante $t = 0$). Esse sistema de referências está em repouso com relação ao fundo do poço, embora não tenha nele sua origem. Nesse referencial, tanto o elevador quanto o parafuso realizam movimentos retilíneos uniformemente variados. Note que não é necessário descobrir qual é a posição inicial do elevador em relação ao fundo do poço, nem o tempo decorrido desde que o elevador começa a subir, porque esses fatores não afetam o movimento após o parafuso se soltar. No instante $t = 0$ temos, nesse referencial:

(para o piso do elevador)	(para o parafuso)
$x_{0e} = 0,$	$x_{0p} = 2,7\,\mathrm{m},$
$v_{0e} = +2,4\,\mathrm{m/s},$	$v_{0p} = +2,4\,\mathrm{m/s},$
$a_e = +1,2\,\mathrm{m/s^2};$	$a_p = -9,8\,\mathrm{m/s}.$

Com essas escolhas, a posição do piso do elevador como função do tempo é descrita pela equação horária

$$x_e\,(t) = x_{0e} + v_{0e}t + \frac{1}{2}a_e t^2 \quad \longrightarrow \quad x_e\,(t) = 0 + 2,4t + 0,6t^2,$$

e a posição do parafuso é descrita pela equação horária

$$x_p(t) = x_{0p} + v_{0p}t + \frac{1}{2}a_p t^2 \quad \longrightarrow \quad x_p(t) = 2,7 + 2,4t - 4,9t^2.$$

No instante t^* em que o parafuso atinge o piso, $x_p(t^*) = x_e(t^*)$, de onde segue que

$$2,7 + 2,4t^* - 4,9\,(t^*)^2 = 0 + 2,4t^* + 0,6\,(t^*)^2 \quad \Longrightarrow \quad 5,5\,(t^*)^2 = 2,7 \quad \Longrightarrow \quad t^* = \sqrt{0,49} = 0,7\,\text{s}.$$

Como $x_p(t = 0,7) = 2,7 + 2,4 \times 0,7 - 4,9 \times (0,7)^2 = 1,98 \simeq 2,0\,\text{m}$, o deslocamento do parafuso entre o início e o final da queda, com relação ao fundo do poço, é $D = x_f - x_i = 2,0 - 2,7 = -0,7\,\text{m}$.

Nota sobre conceitos de posição, deslocamento e distância percorrida:
É comum certa confusão entre esses conceitos. *Posição* de um corpo é sua coordenada em um certo sistema de referências; será generalizada com o conceito de *vetor posição* em um movimento bi- ou tridimensional; *deslocamento* é definido como a variação $(x_f - x_i)$ na posição entre dois instantes t_i e t_f, e será generalizado com o conceito de *vetor deslocamento*; como a posição, pode ser positivo ou negativo. Já a *distância* percorrida é uma grandeza sempre positiva, e equivale à soma dos módulos dos deslocamentos sofridos pelo corpo. Preste atenção nos enunciados dos problemas e no contexto, pois essas definições podem mudar de um livro-texto para outro.

- Escolha B – origem no fundo do poço
O sistema de referências adotado é semelhante ao anterior, mas tem origem no fundo do poço do elevador. Como não conhecemos a posição do piso do elevador em relação a essa origem, no instante em que o parafuso se solta (nossa escolha para $t = 0$), vamos chamar essa posição de h_0. Aproveitando a deixa, vamos resolver o problema de forma inteiramente algébrica, substituindo valores numéricos apenas no passo final. Assim, vamos chamar de $H = 2,7\,\text{m}$ a altura do elevador, de maneira que a posição inicial do parafuso é $h_0 + H$. Por outro lado, como o parafuso estava preso ao teto do elevador até o instante em que se soltou, a velocidade inicial do elevador e do parfuso eram ambas iguais a $v_0 = 2,4\,\text{m/s}$. A partir daí, o parafuso perde o contato com o elevador, e passa a se mover sob ação exclusiva da aceleração gravitacional $g = 9,8\,\text{m/s}^2$, dirigida para baixo, enquanto o elevador mantém sua aceleração para cima $a_e = 1,2\,\text{m/s}^2$. As equações horárias das posições do piso do elevador e do parafuso são então

(para o <u>piso do elevador</u>)

$$x_e(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_e t^2,$$

(para o <u>parafuso</u>)

$$x_p(t) = (h_0 + H) + v_0 t - \frac{1}{2}g t^2.$$

Note o sinal negativo antes do termo de aceleração na equação horária da posição do parafuso, uma vez que a aceleração do parafuso é dirigida para baixo e adotamos para g um valor explicitamente positivo. A condição de que o parafuso atinge o piso do elevador se traduz matematicamente como $x_e(t^*) = x_p(t^*)$, para um certo instante t^* que queremos descobrir. Temos então

$$h_0 + v_0 t^* + \frac{1}{2}a_e\,(t^*)^2 = (h_0 + H) + v_0 t^* - \frac{1}{2}g\,(t^*)^2,$$

de onde vemos que os termos em h_0 e v_0 se cancelam. Fisicamente, isso nos diz que a altura inicial do piso do elevador em relação ao fundo do poço e a velocidade inicial do elevador (e do parafuso) não afetam o tempo necessário para que o parafuso, após se soltar, atinja o piso do elevador. Resolvendo a equação, já cancelados os termos em h_0 e v_0, obtemos

$$t^* = \sqrt{\frac{2H}{a + g}},$$

e substituindo os valores numéricos chegamos ao resultado $t^* = 0,7\,\text{s}$, idêntico ao que obtivemos com a escolha de referencial anterior.
Note que essa equação para t^* é a mesma que seria obtida para o tempo de queda de um parafuso que caísse de uma altura H em um planeta cuja aceleração da gravidade fosse $a_r = a + g$. Isso nos leva à terceira escolha de referencial.

- Escolha C - usando o conceito de aceleração relativa
  Tentar resolver esse problema empregando a aceleração relativa significa escolher para o seu equacionamento um referencial **não-inercial**, que se move com o elevador. O referencial é chamado de não-inercial pois, como está acelerado em relação à Terra, nele não valem as leis da dinâmica de Newton, em particular a lei da inércia. Vocês vão ver mais à frente no curso como resolver problemas em um referencial não-inercial. Tentem por enquanto evitar o uso de sistemas de referência não-inerciais. No entanto, como esse é um problema de cinemática (pois já conhecemos as acelerações), o tempo de queda do parafuso (que na mecânica clássica é absoluto) pode ser encontrado sem grandes problemas lançando mão dos conceitos de velocidade e aceleração relativas.[1] Na verdade essa é uma forma prática e rápida de encontrar o tempo de queda do parafuso.

  Do ponto de vista de uma pessoa sentada no piso do elevador (ou seja, em um referencial que se move com ele), o elevador está *parado* e a distância a ser percorrida — com uma aceleração $a_r = a_e + g = 9,8 + 1,2 = 11\,\mathrm{m/s^2}$ dirigida para baixo — é a altura do elevador. (Para os que se questionam sobre a aceleração relativa ser dada pela soma – ao invés da diferença – entre a_e e g, pensem em como calcularíamos a velocidade relativa entre um objeto subindo com velocidade v_e e um outro descendo com velocidade v_p; seria pela soma ou pela diferença? Se v_e fosse igual a v_p, a velocidade relativa seria $2v_e$ ou seria nula?) Levando em conta que, em relação ao elevador, a velocidade inicial do parafuso é *nula*, as equações horárias das posições são portanto

  (para o piso do elevador)

  $$x_e(t) = 0,$$

  (para o parafuso)

  $$x_p(t) = H - \frac{1}{2}a_r t^2.$$

  O parafuso atinge o piso do elevador no instante t^* tal que $x_p(t^*) = 0$, o que leva a

  $$0 = H - \frac{1}{2}a_r(t^*)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t^* = \sqrt{\frac{2H}{a_r}} = 0,7\,\mathrm{s}.$$

[1] Nós veremos esses conceitos com cuidado em uma ou duas semanas, portanto os que não os conhecem não precisam se preocupar. Essa solução está sendo apresentada agora devido ao grande número de alunos que tentaram resolver assim o problema.

Mas como encontrar a distância percorrida?
Aqui os problemas começam a aparecer. Só conseguimos encontrar a resposta correta se levarmos em conta a informação de que o referencial é acelerado, pois, para a pessoa sentada no piso do elevador, o parafuso percorreu a distância de 2,7 m! A resposta obtida nesse referencial deve ser *transformada* em outra, essa sim a correta.

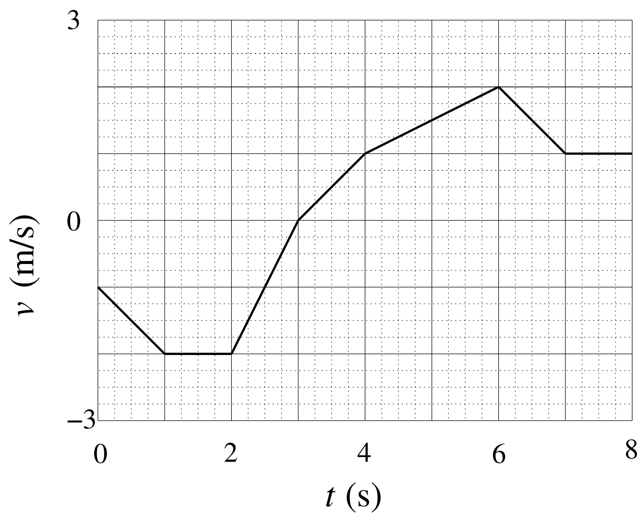
A noção de que as leis da física (e as medidas feitas para distâncias e intervalos de tempo) podem mudar quando mudamos de um sistema de referência para outro está por trás da relatividade de Galileu e das teorias da relatividade de Einstein.[a] A mecânica de Newton obedece ao chamado *Princípio da Relatividade de Galileu*, que assume o tempo como absoluto, e que prevê que *distâncias* são invariantes — ou seja, permanecem as mesmas em qualquer sistema de referência inercial —, embora as coordenadas dos pontos inicial e final possam mudar de um sistema de referência para outro. Daí termos obtido o mesmo valor para a distância percorrida nos casos A e B, e termos obtido o valor correto para Δt no caso C. A teoria da relatividade restrita de Einstein ensina como transformar distâncias e intervalos de tempo quando o tempo não é mais absoluto,[b] e a teoria da relatividade geral mostra o que ocorre com as leis da física quando incluímos um campo gravitacional no problema. Ou seja, por enquanto, empregue apenas sistemas de referência inerciais!

No entanto, muitos livros texto passam "batido" nesses problemas conceituais, ensinando os estudantes a encontrarem o intervalo de tempo em um referencial acelerado (como fizemos), *voltando, depois, a analisar o problema do ponto de vista de um referencial inercial* para encontrar a distância percorrida. Ou seja, o item (b) é resolvido como nos casos A ou B. Isso pode ser feito se tivermos sempre em mente que *apenas intervalos de tempo* – e apenas na mecânica Newtoniana – permanecem invariantes em um referencial acelerado.

[a] Einsten formulou duas teorias da relatividade, conhecidas como teoria da relatividade restrita ou especial e teoria da relatividade geral.

[b] O que é consequência do fato de que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais.

2. O gráfico abaixo representa a velocidade como função do tempo para um ponto material num movimento retilíneo.



Sabendo que no instante $t = 0$ a posição do corpo é $1,5\,\text{m}$:

(a) construa o gráfico da coordenada $x(t)$ como função de t (sugestão: determine as coordenadas x em intervalos de $0,25\,\text{s}$);

(b) construa o gráfico da aceleração $a(t)$ como função do tempo;

(c) determine a velocidade média e a aceleração média entre os instantes $t = 2\,\text{s}$ e $t = 7\,\text{s}$.

Solução

(a) A posição $x\,(t)$ é dada pela integral da velocidade,

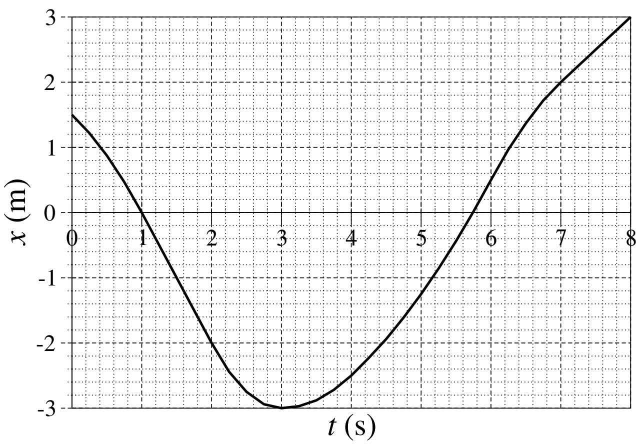
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0=0}^{t} v(t')dt' \qquad \text{com } x_0 = x(t_0 = 0) = 1,5\,\text{m}.$$

Geometricamente, a integral corresponde à área sob a curva $v(t)$. O cálculo fica mais fácil se medirmos a área em unidades de *quadradinhos*; como cada *quadradinho* $= 0,25 \times 0,25 = 0,0625\,\text{m}$, obtemos facilmente a área, e portanto $x\,(t)$, construindo a tabela abaixo.

t (s)	quadradinhos	x (m)
0,00	0,000	1,50
0,25	-4,500	1,22
0,50	-10,00	0,875
0,75	-16,50	0,469
1,00	-24,00	0,000
1,25	-32,00	-0,500
1,50	-40,00	-1,00
1,75	-48,00	-1,50
2,00	-56,00	-2,00
2,25	-63,00	-2,44
2,50	-68,00	-2,75
2,75	-71,00	-2,94
3,00	-72,00	-3,00
3,25	-71,50	-2,97
3,50	-70,00	-2,88
3,75	-67,50	-2,72
4,00	-64,00	-2,50

t (s)	quadradinhos	x (m)
4,25	-59,75	-2,23
4,50	-55,00	-1,94
4,75	-49,75	-1,61
5,00	-44,00	-1,25
5,25	-37,75	-0,859
5,50	-31,00	-0,437
5,75	-23,75	0,0156
6,00	-16,00	0,50
6,25	-8,500	0,969
6,50	-2,000	1,37
6,75	3,500	1,72
7,00	8,000	2,00
7,25	12,00	2,25
7,50	16,00	2,50
7,75	20,00	2,75
8,00	24,00	3,00

Note que, entre 0 e 1 s, a função $x\,(t)$ é uma parábola voltada para baixo, entre 1 s e 2 s é uma reta,



entre 2 s e 3 s, entre 3 s e 4 s e entre 4 s e 6 s, parábolas com concavidades diferentes, voltadas para cima, entre 6 s e 7 s uma parábola voltada para baixo e, finalmente, entre 7 s e 8 s, novamente uma reta.

(b) A aceleração $a(t)$ é a derivada de $v(t)$,

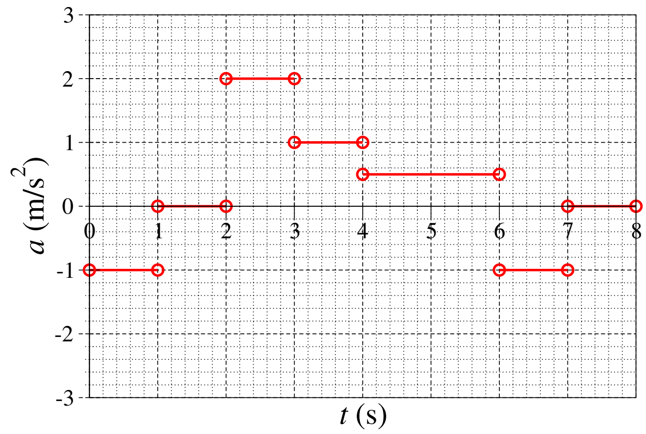
$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t).$$

Geometricamente isso corresponde a inclinação da reta tangente à curva, no instante t. Note que a derivada não está definida nos instantes $t = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$ e $8\,\text{s}$.

(c) $\overline{v}_{2\to7} = \frac{x(7)-x(2)}{7-2} = \frac{2,0-(-2,0)}{5} = 0,8\,\text{m/s}$ e $\overline{a}_{2\to7} = \frac{v(7)-v(2)}{7-2} = \frac{1-(-2)}{5} = 0,6\,\text{m/s}^2$.

3. A velocidade de um corpo varia segundo a equação

$$v(t) = a + bt^4.$$



As constantes a e b valem respectivamente $6,0$ e $2,0$ quando as distâncias são medidas em metros e o tempo em segundos. Sabe-se que o corpo estava na origem do sistema de coordenadas quando $t = 0$.

(a) Em que unidades são medidas as grandezas a e b?

(b) Qual é a expressão para a aceleração $a(t)$?

(c) Qual é a aceleração do corpo em $t = 0$? E em $t = 1,0\,\mathrm{s}$?

(d) Qual é a expressão para a posição $x(t)$?

(e) Qual é o seu deslocamento no intervalo de tempo entre $t = 2,0\,\mathrm{s}$ e $t = 4,0\,\mathrm{s}$?

Solução

(a) Por análise dimensional, a é dado em m/s e b é dado em m/s^5.

(b) A aceleração corresponde à derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a\,(t) = \frac{d}{dt}v\,(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}a}_{0} + \underbrace{\frac{d}{dt}bt^4}_{4bt^3} = 4bt^3 = 8,0t^3.$$

(c) Da solução do item anterior:

$$a(t = 0) = 0 \quad \text{e} \quad a(t = 1,0\,\mathrm{s}) = 8,0\,\mathrm{m/s^2}.$$

(d) A posição $x\,(t)$ é obtida pela integral de $v\,(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(a + bt'^4\right)\,dt' = x_0 + at + \frac{b}{5}t^5 = 6,0\,t + 0,40\,t^5$$

onde $x_0 = 0$ é a posição em $t = 0$.

(e) Da solução do item anterior:

$$x(t = 4,0\,\mathrm{s}) - x(t = 2,0\,\mathrm{s}) = \left[6,0 \times 4,0 + 0,40 \times (4,0)^5\right] - \left[6,0 \times 2,0 + 0,40 \times (2,0)^5\right] \simeq 409\,\mathrm{m}.$$

4. Você viu em aula que, para um corpo que se move com aceleração constante, as equações que descrevem o movimento são

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{e} \qquad v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = v_0 + at.$$

Esse movimento é às vezes chamdo de *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado – MRUV*. A posição e a velocidade, embora obedeçam equações diferentes, não são independentes, pois estão interligadas pelo tempo t. Podemos então obter uma relação direta entre a posição x e a velocidade v, eliminando o tempo das duas equações acima:

$$v = v_0 + at \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Substituindo na equação horária da posição, temos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \\ &= x_0 + \frac{v_0 v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \frac{(v^2 + v_0^2 - 2 v_0 v)}{a^2} \\ &= x_0 + \frac{v_0 v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} - \frac{v_0 v}{a} \\ &= x_0 + \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,(x - x_0)\,.$$

(a) Refaça os cálculos acima sozinho. Isole o tempo na equação da velocidade e substitua na equação horária; abra os parênteses e simplifique o que for possível.

(b) Você reconhece essa equação?

(c) Elimine o tempo e obtenha uma relação entre v e x para um movimento descrito pelas equações

$$x = x_0 + \alpha t^3 \qquad \text{e} \qquad v = 3\alpha t^2, \qquad t \geq 0.$$

A famosa *equação de Torricelli* **é válida apenas se o movimento for uniformemente variado**. Preste atenção nisso!

Solução

(c) Elevando a equação para x ao quadrado e a equação para v ao cubo, obtemos

$$t^6 = \frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} \quad \text{e} \quad t^6 = \frac{v^3}{27\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} = \frac{v^3}{27\alpha^3} \quad \Longrightarrow \quad v^3 = 27\alpha\,(x - x_o)^2\,.$$

Note que, como a equação de Torricelli foi deduzida das equações do movimento uniformemente variado (com aceleração constante), só deve ser empregada nessa situação!