Axiomas da Geometria Euclideana

Euclides de Alexandria: [Wikipédia]

Nascido ~ 330 a.C. em Síria? Grécia?

Foi para Alexandria (Egito).

É reconhecido como o primeiro a tentar abordar de uma maneira sistemática o estudo da geometria plana.

Escreveu os "Elementos"

Euclides assumiu 5 postulados (o que se considera como ponto de partida, sem necessidade de demonstração). Acontece que os postulados de Euclides não são completos.

David Hilbert (1862 - 1943, Alemanha)

Apresentou um novo conjunto de axiomas para geometria

$\boxed{\text{Definir o ponto}}$

A geometria é baseada no seguinte esquema:

Conceitos primitivos ou termos indefinidos → Axiomas/Postulados → Termos definidos Afirmações com demonstrações

Conceitos primitivos ou termos indefinidos ⇓
- Ponto
- Reta
- Plano
- Pertence a
- Entre
- Congruente

Axiomas/Postulados ⇓

Um conjunto simples, completo e independente de postulados

Termos definidos Afirmações com demonstrações ⇓
- Definição
- Lema
- Proposição
- Teorema
- Corolário

Hilbert organizou os axiomas em cinco grupos

I: Axiomas de incidência (1-7)
II: Axiomas de ordem (1-5)
III Axioma das paralelas (axioma de Euclides)
IV Axiomas de congruência (1-6)
V Axioma de Continuidade (axioma de Archimedes)

Vamos ver alguns desses axiomas.

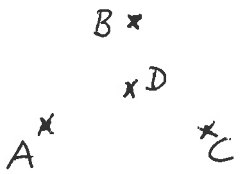
Axioma I1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Proposição: Duas retas distintas se intersectam em no máximo um ponto.

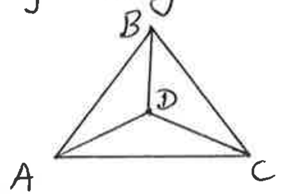
Demonstração: Suponha que elas se intersectam em dois pontos P_1 e P_2. Então existem pelo menos duas retas distintas por P_1 e P_2, o que contradiz o Axioma I1. ▨

Exemplos Normalmente pensamos em pontos e retas como objetos da geometria planal. Mas podemos construir outros modelos.

1. Seja $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ "o nosso plano" com quatro pontos, e $\mathcal{L} = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ o conjunto das "retas" em $\mathcal{P}$.



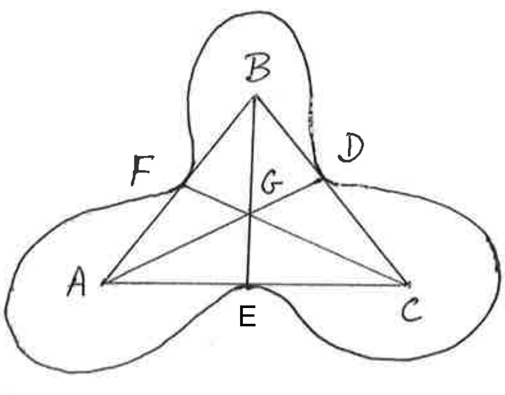
$\mathcal{P}$



$\mathcal{L}$

O conjunto $\mathcal{P}$, com as retas $\mathcal{L}$, satisfaz Axioma I1.

2. $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, $\mathcal{L} = \{AFB, BDE, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF\}$.



Definição: Dizemos que um conjunto de pontos é *colinear* (ou que seus pontos são colineares) se existe uma reta que contém o conjunto.

> **Axioma I4** Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.

> **Axioma I5** Se dois pontos distintos pertencem a um plano $\mathcal{P}$ então a única reta que os contém pertence a $\mathcal{P}$.

> **Axioma I7** Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos, e em todo plano existem pelo menos duas retas distintas. Existem pelo menos dois planos distintos no espaço.

Proposição Seja l uma reta e P um ponto que não pertence a l, $P \notin l$. Então existe um plano único que contém P e l.

Demonstração: Pelo Axioma I7, existem pelo menos dois pontos distintos Q e R em l. Os pontos P, Q, R não são colineares, pois $P \notin l$. Logo, pelo Axioma I4, existe um plano único que contém P, Q, R. Este plano contém a reta l pelo Axioma I5. ▨

Definição Duas retas são *coplanares* se existe um plano que as contém. Elas são *paralelas* se elas são coplanares e não se intersectam.

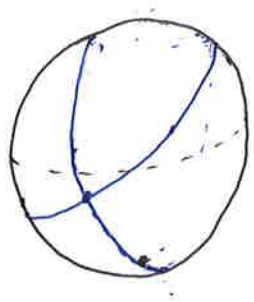
O famoso controverso Postulado 5 de Euclides:

> **Axioma das paralelas**: Seja l uma reta, P um ponto com $P \notin l$ e $\mathcal{P}$ o único plano que os contém. Existe uma única reta em $\mathcal{P}$ que contém P e que é paralela a reta l.

Matemáticos tentaram por muito tempo mostrar que o Axioma das paralelas pode ser descartado e deduzido a partir dos outros axiomas. Bolyai e Lobachevsky mostram que, ao remover o Axioma das paralelas, construímos outras geometrias (não Euclideana):

Geometria esférica

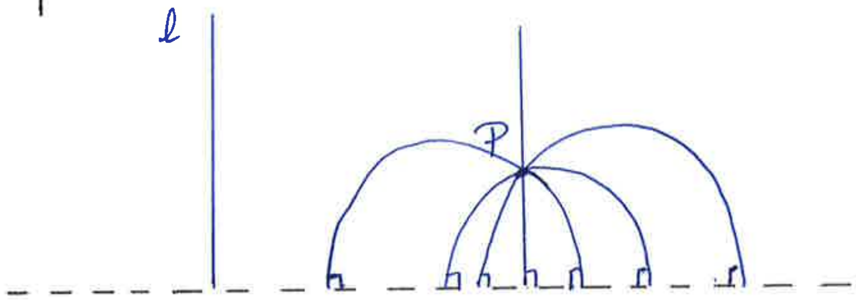
No plano Euclideano, o segmento da reta AB é o caminho mais curto que liga os pontos A e B.



Na esfera, um segmento "da reta" é um segmento das circunferências de maior raio.

Quaisquer duas circunferências de maior raio se intersectam em dois pontos: Não existem "retas" paralelas na esfera.

Geometria hiperbólica



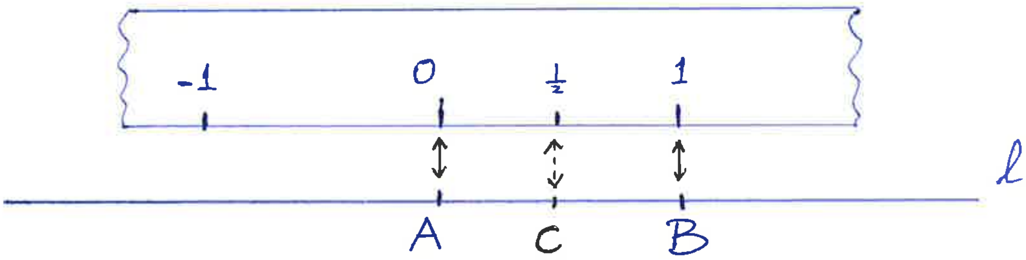
Consider um semi plano onde as "retas" são as semi-retas verticais e os semi-círculos com centros na fronteira do semi-plano. Existe um número infinito de retas passando por $P \notin l$ que são paralelas a l.

Proposição Sejam l_1, l_2, l_3 três retas coplanares. Se l_1 é paralela a l_2 e l_2 é paralela a l_3, então l_1 é paralela a l_3.

Demonstração: Suponha que l_1 não é paralela a l_3. Como elas são coplanares elas se intersectam em um ponto P. Então por P passam duas retas paralelas a l_2 (as retas l_1 e l_3) o que contradiz o Axioma das paralelas ∎

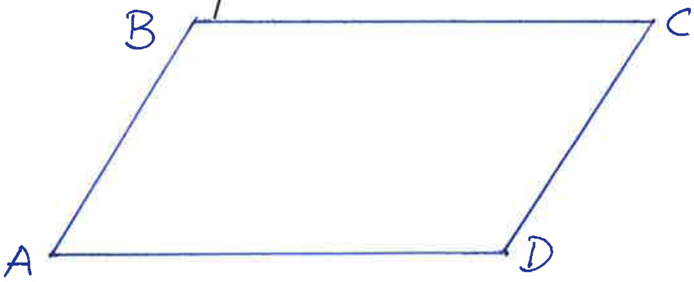
Hilbert mostrou que podemos construir a geometria Euclideana sem fazer uso dos números reais (Axioma de Continuidade). Mas pode ser mostrado que usando os números reais obtemos a mesma geometria.

> **Axioma (de Continuidade)** Sejam A e B dois pontos distintos e l a única reta que os contém. Então existe uma régua sobre l tal que A corresponde ao número 0 e B ao número 1.



Isto significa que podemos identificar a reta (infinita) com os números reais. Assim, podemos definir o ponto médio de AB como o ponto C que corresponde ao número $\frac{1}{2}$.

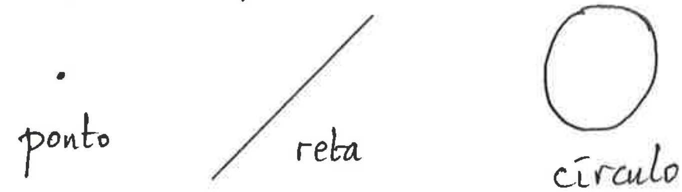
Definição Dizemos que quatro pontos A, B, C, D formam um paralelogramo se as retas AB e DC são paralelas e também as retas BC e AD são paralelas.



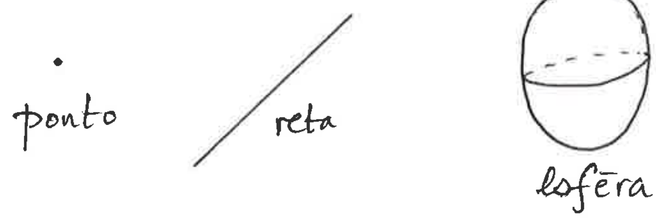
Geometria Analítica

Vamos considerar objetos simples

No plano:

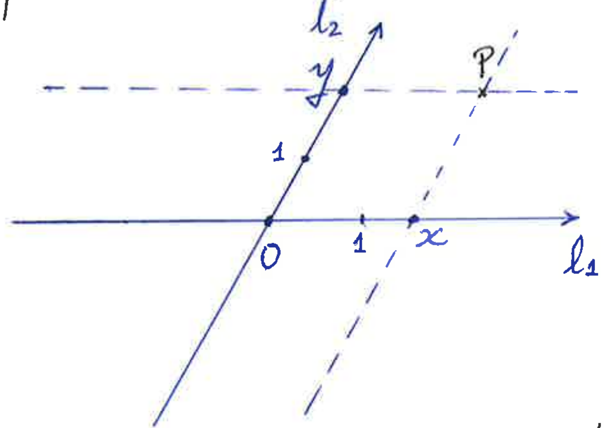


No espaço



Vimos que podemos identificar os pontos de uma reta com o conjunto dos número reais.

Consider um plano (Euclideano) $\mathcal{P}$ e duas retas l_1 e l_2 não paralelas em $\mathcal{P}$.



As retas l_1 e l_2 se intersectam em um ponto único O.

Seja P um ponto do plano. Por P passa uma reta única paralela a l_1. Esta reta não é paralela a l_2 (última Proposição), então ela intersecta l_2 em um único ponto que corresponde a um único número real y.
Da mesma maneira, existe uma única reta por P paralela a l_2 que intersecta l_1 em um único ponto correspondente a um número real x.
O ponto P é completamente identificado pelo par (x,y).
Logo, o plano $\mathcal{P}$ pode ser identificado com o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos aproveitar as operações algébricas dos números reais para fazer contas sobre objetos geométricos.

Por exemplo, uma reta pode ser representada por uma equação algébrica: é o conjunto dos pontos $P=(x,y)$ com x,y satisfazendo uma relação linear do tipo

$$y = ax+b \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

A geometria analítica é o estudo de objetos geométricos no plano ou espaço Euclideano usando álgebra.

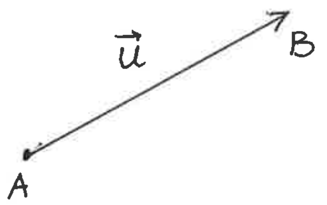
Nos vamos estudar

- Vetores
- Retas e planos
- cônicas
- Superfícies quádricas.

Vetores

Representação da força do vento

Um <u>vetor</u> no espaço é um segmento orientado da reta: é uma <u>direção</u> com <u>intensidade</u> (módulo) e <u>sentido</u> (orientação).



Um segmento da reta é representado por dois pontos A e B do espaço:

A é a <u>origem</u>,

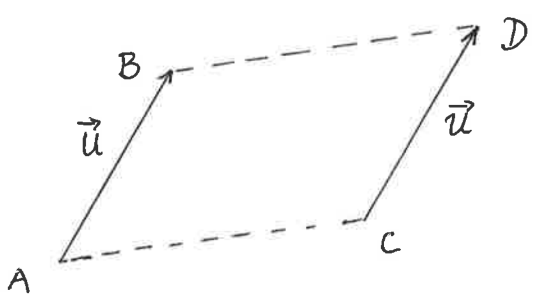
B é a <u>extremidade</u>.

Denotamos por $\overrightarrow{AB}$ o vetor com sentido indo de A para B e com módulo o comprimento do segmento AB.

Observe que $\overrightarrow{BA}$ possui sentido contrário de $\overrightarrow{AB}$, portanto representa um vetor distinto de $\overrightarrow{AB}$. O vetor $\overrightarrow{BA}$ é o <u>oposto</u> de $\overrightarrow{AB}$.

Como vimos na representação da força do vento, um vetor é <u>livre</u> e pode ser representado por varios pares de pontos no espaço.

<u>Definição</u>: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor se ABDC é um paralelogramo.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

<u>Observação</u>: um vetor é <u>livre</u>; isto é, não depende da escolha dos pontos A e B que o representam.

Definição: A norma ou o módulo de um vetor $\vec{u}$ é o comprimento de qualquer de um de seus representantes.

Notação: $\|\vec{u}\|$

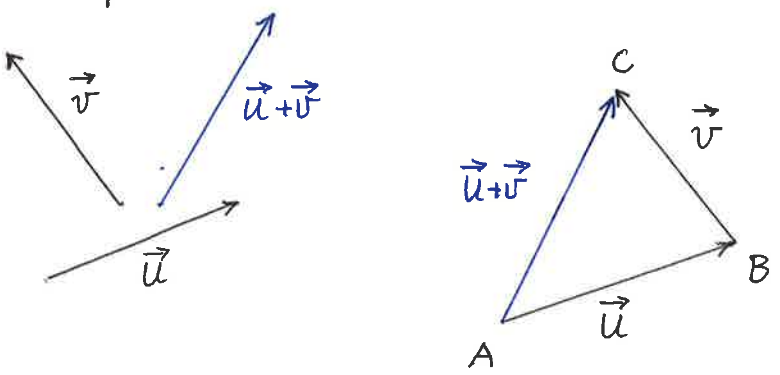
O vetor nulo é o vetor representado por $\overrightarrow{AA}$ para qualquer ponto A do espaço. Notação: $\vec{0}$.

Denotamos o conjunto de todos os vetores no espaço por V^3, e o conjunto de todos os vetores em um plano por V^2.

Vamos definir algumas operações em V^3 (valem também em V^2).

Adição de dois vetores

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, com $\vec{u}$ representado por $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ representado por $\overrightarrow{BC}$.



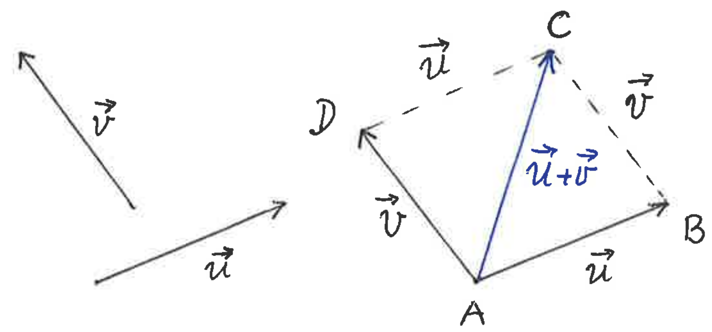
"fechar o triângulo"

O vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$, ou seja,

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Observe que na escolha da representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a extremidade de $\vec{u}$ é a origem de $\vec{v}$.

Observe também que usamos o mesmo símbolo "+" da soma de números para representar a soma de dois vetores.



Podemos representar os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$

Usando a regra do paralelogramo, temos que

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Proposição (Propriedades da adição de vetores)

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores quaisquer em V^3. Então,

A1: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (Associativa)

A2: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (comutativa)

A3: $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$ (Elemento neutro)

A4: Para cada vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que $\vec{u}+(-\vec{u}) = (-\vec{u})+\vec{u} = \vec{0}$ (Elemento oposto)

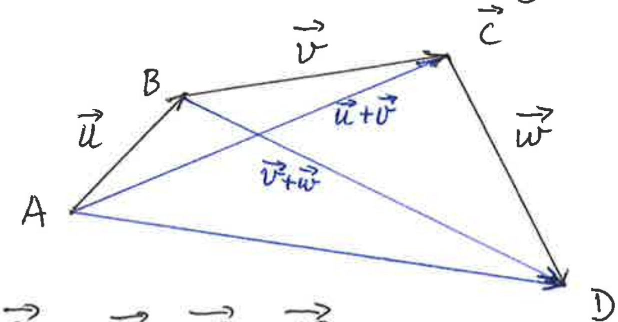
Demonstração

A1). Escolhamos representantes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como seguinte:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,

$\vec{v} = \overrightarrow{BC}$,

$\vec{w} = \overrightarrow{CD}$.



Então,

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Portanto $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Exercício: completar a demonstração da proposição. $\boxtimes$

Observação: A adição de vetores tem as mesmas propriedades da adição de números reais. É por isso que usamos o símbolo "+" para representar esta operação.
[Na álgebra, V^3 munido da adição "+", ou seja $(V^3, +)$, vira um <u>grupo</u> abeliano ou um grupo comutativo.]

<u>Exercícios</u> 1. Prove que $\overrightarrow{BC} + (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC}$.

2. Prove que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{u} + \vec{y} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

<u>Multiplicação por escalar</u>

<u>Definição</u>: Sejam α um número real (um escalar) e $\vec{u}$ um vetor.

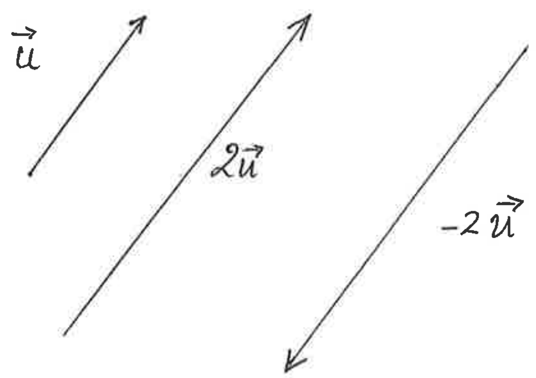
(1). Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$

(2). Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{u}$ caraderiza-se por

(a) $\alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$

(b) $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ são de mesmo sentido se $\alpha > 0$ e de sentido contrário se $\alpha < 0$.

(c) $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\|$



<u>Proposição</u> (Propriedades da multiplicação por escalar)

Quaisquer que sejam os números reais α e β, e quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, valem as seguintes igualdades:

M1: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (Distributividade)

M2: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ (Distributividade)

M3: $1\vec{u} = \vec{u}$ (Elt neutro)

M4: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$ (Associatividade)

Observação $(V^3, +, \cdot)$ é um exemplo de um espaço vetorial real, um conceito que vocês vão encontrar na disciplina Álgebra Linear.

Exercícios

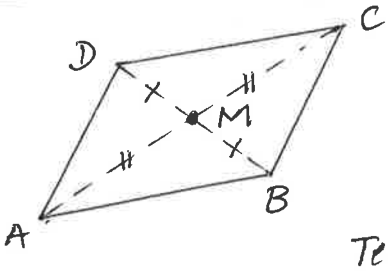
1. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w}$.
2. Resolva o seguinte sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

Aplicações geométricas

Proposição: As diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Demonstração:



Seja M o ponto médio da diagonal AC, ou seja, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}$.

Precisamos mostrar que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$.

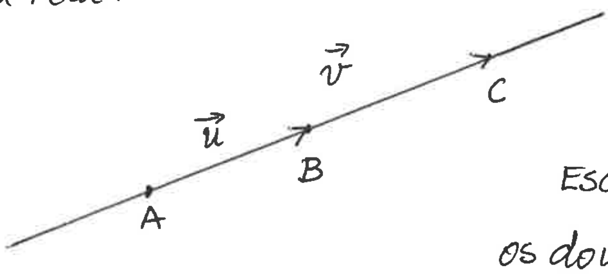
Temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} && \text{(pois M é pt médio de AC)} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} && \text{(adição é comutativa)} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} && \text{(ABCD é um paralelogramo)} \\ &= \overrightarrow{MD} && \blacksquare \end{aligned}$$

Dependência Linear

1. Caso de dois vetores

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se eles tem a mesma direção. Portanto, eles podem ser representados por pares de pontos de uma mesma reta:



$\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$

Escolhamos a mesma origem para os dois vetores.

Observe que o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor:

$\vec{u} = \vec{AA}$, $\vec{v} = \vec{AC}$; os pontos A, A, C pertence a uma reta.

Suponha que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$.

Temos $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ ou $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

ou seja

$$\|\vec{v}\|\,\vec{u} - \|\vec{u}\|\,\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \|\vec{v}\|\,\vec{u} + \|\vec{u}\|\,\vec{v} = 0 .$$

Portanto, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, existem escalares α, β, não ambos nulos, tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}} \qquad (1)$$

Esta caracterização inclui o caso onde um (ou ambos) dos vetores é nulo.

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ para alguns escalares com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

Suponha (sem perda de generalidade) que $\alpha \neq 0$. Então

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \implies \alpha\vec{u} = -\beta\vec{v} \implies \vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v},$$

ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Portanto,

<u>Proposição</u>: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existem escalares α, β não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$.

Observe que usando a proposição acima, dois vetores não são paralelos se e somente se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$.

A equação (1) nos disse que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ <u>dependem</u> um de outro, por isso que dizemos que dois vetores paralelos são (<u>linearmente</u>) <u>dependentes</u>. Caso contrário, eles são (<u>linearmente</u>) <u>independentes</u>.

Vamos obter conceitos análogos para três vetores.

2. Caso de três vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores. Podemos representar $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad e \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

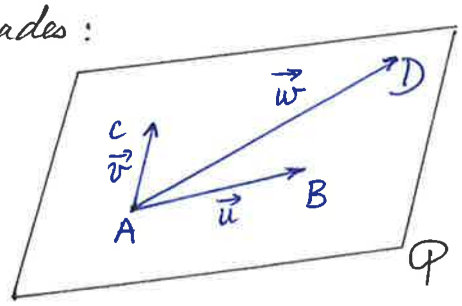
Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.

Então A, B, C determinam um plano único $\mathcal{P}$ (Axioma I4).

Agora, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ para algum ponto D do espaço.

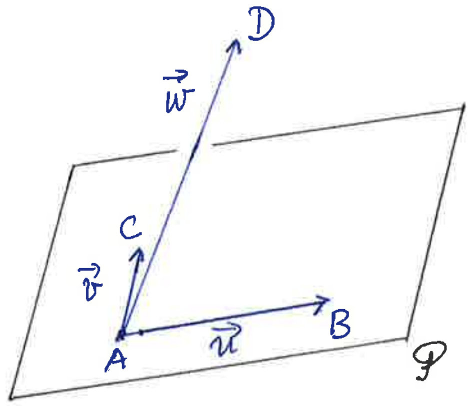
Temos duas possibilidades:

<u>Caso(i)</u>: $D \in \mathcal{P}$



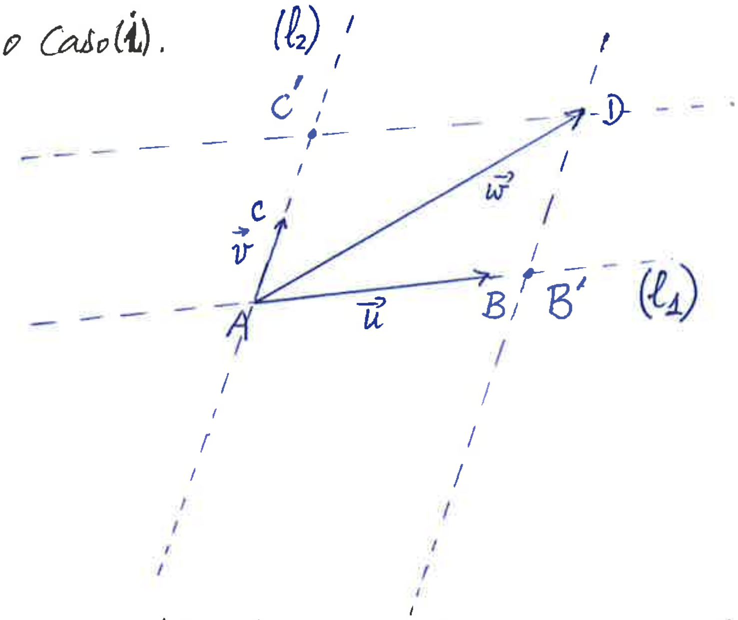
Neste caso, dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ <u>são paralelos ao mesmo plano</u>.

<u>Caso(ii)</u> $D \notin \mathcal{P}$



Queremos um critério algébrico para caracterizar os dois casos.

Considere o caso (1).



Seja l_1 a reta (única) que contem os pontos A e B e seja l_2 a reta (única) que contem os pontos A e C.

Por D passa uma reta única paralela a l_2. Esta reta intersecta a reta l_1 em um ponto B'. Da mesma maneira, a unica reta por D paralela a l_1 intersecta l_2 em um ponto C'. O polígono $AB'DC'$ é um paralelogramo, portanto $\vec{AD} = \vec{AB'} + \vec{AC'}$.

Mas $\vec{AB'} \parallel \vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AC'} \parallel \vec{AC} = \vec{v}$. Logo,

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad \text{para alguns escalares } \alpha, \beta.$$

Equivalentemente,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \qquad (\text{com } \gamma = -1 \text{ em nosso caso}).$$

Começamos com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, mas podemos ter começado com $\vec{u}$ e $\vec{w}$ ou $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e escrever $\vec{v}$ (resp. $\vec{u}$) em função de $\vec{u}$ e $\vec{w}$ (resp. $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Colocando todos estes caso juntos, mostramos que se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano, então existem escalares α, β, γ <u>não</u> <u>todos</u> <u>nulos</u> tal que

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.} \qquad (2)$$

Reciprocamente, suponha que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{o}$ com α,β,γ não todos nulos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma\neq 0$.

Logo $\vec{w}=-\frac{\alpha}{\gamma}\vec{u}-\frac{\beta}{\gamma}\vec{v}$

Isto implica que os vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ podem ser representados por pares de pontos de um mesmo plano.

Acabamos de provar a seguinte proposição.

<u>Proposição</u> Três vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano se, e somente se, existem escalares α,β,γ não todos nulos, tal que

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{o}.$$

<u>Observações</u>

1. Segue da proposição que $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ não são paralelos ao mesmo plano (caso (ii), p14) se, e somente se,
$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{o} \implies \alpha=\beta=\gamma=0.$$
2. A proposição acima inclui o caso onde dois (ou todos) dos $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são paralelos. (Exercício.)

Vamos definir os conceitos que acabamos de usar.

<u>Definição</u>: Se $\vec{x}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$, dizemos que $\vec{x}$ é <u>combinação linear</u> de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, ou $\vec{x}$ é <u>gerado</u> por $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Os escalares α,β,γ são chamados dos <u>coeficientes</u> da combinação linear.

Três vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são <u>linearmente dependentes</u> (LD) se
$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{o} \text{ para alguns escalares } \alpha,\beta,\gamma \text{ não todos nulos.}$$

Se $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{o}\implies\alpha=\beta=\gamma=0$, dizemos que $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são <u>linearmente independentes</u> (LI).

Observações

1. Os conceitos de LI e LD valem para qualquer número de vetores.
2. Se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ é o vetor nulo $\vec{0}$, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ são LD.
3. Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos

   Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD $\Leftrightarrow$ são paralelos a um mesmo plano

   $\Leftrightarrow$ um deles é combinação linear dos outro dois.

Exemplo Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, com

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$$
$$\vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$$
$$\vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$$

são LD.

Solução Precisamos procurar escalares α, β, γ, não todos nulos, do modo que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.

Temos $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha + 2\beta)\vec{u} + (2\alpha - 3\beta + 7\gamma)\vec{v} + (-\alpha + \beta - 3\gamma)\vec{w}$

Então, basta procurar α, β, γ satisfazendo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 & (1) \\ 2\alpha - 3\beta + 7\gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta - 3\gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

Temos um sistema linear de 3 equaçõs com 3 incógnitas α, β, γ.

Equação (1) implica $\alpha = -2\beta$. Substituindo em (2) e (3) obtemos

$$\begin{cases} -7\beta + 7\gamma = 0 \\ +3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \alpha = -2\gamma$$

Logo, $-2\gamma\vec{a} + \gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ qualquer que seja $\gamma \in \mathbb{R}$. Esta equação é equivalente a $\gamma(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$ $\Rightarrow -2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Achamos uma combinação linear de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ que da o vetor $\vec{0}$,

com coeficientes não nulos. Portanto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são LD.
(Podemos também usar o método de escalonamento de sistemas Lineares para resolver o sistema de equações (1)–(3).) $\blacksquare$

Proposição: Se três vetores são LI, então qualquer dois deles são LI.

Demonstração Suponha, por absurdo, que dois deles $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, e denote por $\vec{w}$ o terceiro vetor. Então existem α, β, não ambos nulos, tal que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Portanto,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma = 0, \text{ não todo nulos.}$$

Ou seja $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD, o que contradiz a hipótese da proposição $\blacksquare$

Observação

A recíproca da proposição anterior não vale. (Exercício)

Exemplo Prove que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ LI $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ são LI.

Solução Temos $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) + \beta(\vec{u}+\vec{w}) + \gamma(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\vec{u} + (\alpha+\gamma)\vec{v} + (\beta+\gamma)\vec{w} = \vec{0} \quad (*)$$

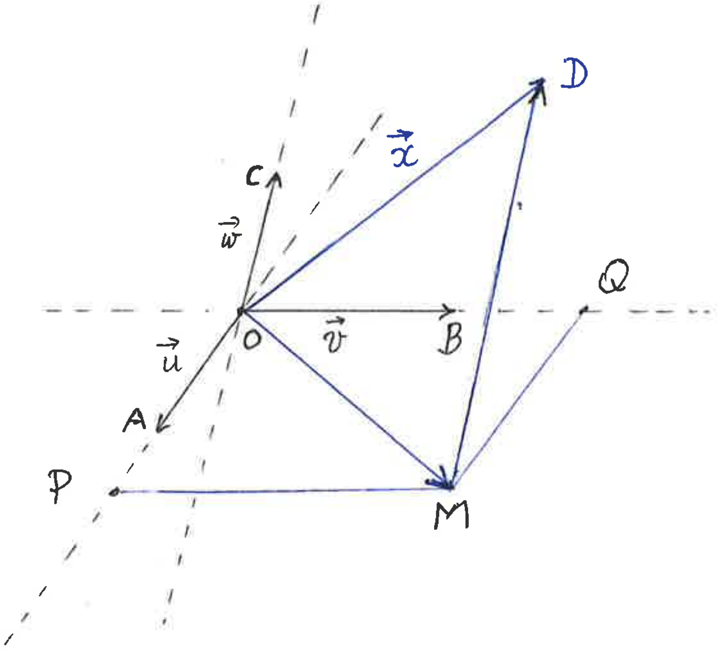
Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, $(*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$

Portanto, $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}$ são LI.

Proposição Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI em V^3, então qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Demonstração Representamos os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ como seguinte

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{OC} \quad \text{e} \quad \vec{x} = \overrightarrow{OD}$$



Sejam:

M: o ponto de interseção da reta por D e paralela a $\vec{w}$ com o plano $\mathbb{P}$ que contem os pontos O, A, B.

Q: o ponto da interseção da reta por M e paralela a $\vec{u}$ com a reta que contem O e B

P: o ponto de interseção da reta por M e paralela a $\vec{v}$ com a reta que contem O e A

Temos:
$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OD}\\ &= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}\\ &= \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{MD}\\ &= \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}\end{aligned}$$
para alguns escalares α, β, γ.

Portanto $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Suponha que
$$\vec{x} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w} = \alpha'\vec{u}+\beta'\vec{v}+\gamma'\vec{w}.$$

Então
$$(\alpha-\alpha')\vec{u}+(\beta-\beta')\vec{v}+(\gamma-\gamma')\vec{w} = \vec{0}.$$

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LI, temos $\begin{cases}\alpha'-\alpha=0\\ \beta'-\beta=0\\ \gamma'-\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha=\alpha'\\ \beta=\beta',\\ \gamma=\gamma'\end{matrix}$,

ou seja, a combinação linear é única. ▨

Observação

Como a combinação linear na proposição anterior é única, podemos identificar o vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$ com a tripla (α, β, w) de números reais.

Base

Definição Uma tripla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de vetores LI chama-se de base de V^3.

Vimos que qualquer vetor $\vec{x}$ em V^3 é combinação linear única de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ou seja

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

e os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$.
Chamamos $(x_1, x_2, x_3)_E \in \mathbb{R}^3$ das coordenadas do vetor $\vec{x}$ na base E. Escrevemos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.

Vamos interpretar os conceitos que vimos até agora sobre vetores usando suas coordenadas.

Propriedades

(a) $(x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_E$

(As coordenadas da soma de vetores são as somas das coordenadas dos vetores.)

(b) $\alpha(x_1, x_2, x_3)_E = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E$

(As coordenadas de um vetor multiplicado por um escalar são a multiplicação das coordenadas do vetor pelo mesmo escalar.)

Demonstração

(a)
$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3)_E + (y_1, y_2, y_3)_E &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 \\ &= (x_1+y_1)\vec{e}_1 + (x_2+y_2)\vec{e}_2 + (x_3+y_3)\vec{e}_3 \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)_E\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\alpha(x_1, x_2, x_3) &= \alpha(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \\ &= \alpha x_1\vec{e}_1 + \alpha x_2\vec{e}_2 + \alpha x_3\vec{e}_3 \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)_E\end{aligned}$$

▨

Dependência linear de dois vetores usando coordenadas:

Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$

$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se, e somente se, existem x, y não ambos nulos tal que $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0}$.

Usando a proposição anterior

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (xa_1 + ya_2, xb_1 + yb_2, xc_1 + yc_2)_E = (0,0,0)_E$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xa_1 + ya_2 = 0 \\ xb_1 + yb_2 = 0 \\ xc_1 + yc_2 = 0 \end{cases} \quad \text{com } x, y \text{ não ambos nulos}$$

Considerando duas equaçõs de cada vez, obtemos o seguinte resultado.

Proposição Dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Caso contrário, eles são LI.

Exemplos 1. Verifique se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD:

(a) $\vec{u} = (0,1,0)_E$, $\vec{v} = (1,0,1)_E$

(b) $\vec{u} = (1,-3,14)_E$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1\right)_E$

2. Determine m e n de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam LD, sendo

$\vec{u} = (1, m, n+1)_E$

$\vec{v} = (m, n, 10)_E$

Dependência linear de três vetores usando coordenadas

Proposição

Os vetores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)_E$, $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)_E$, $\vec{w}=(a_3,b_3,c_3)_E$ são LD se, e somente se,

$$\begin{array}{c} \vec{u}\rightarrow \\ \vec{v}\rightarrow \\ \vec{w}\rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Caso contrário, eles são LI.

Demonstração

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, existem x,y,z não todos nulos tal que $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0}$.

Temos $x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=(xa_1+ya_2+za_3,\ xb_1+yb_2+zb_3,\ xc_1+yc_2+zc_3)_E$
$= (0,0,0)_E$

Então $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} xa_1+ya_2+za_3=0 \\ xb_1+yb_2+zb_3=0 \\ xc_1+yc_2+zc_3=0 \end{cases}$$

possui uma solução $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \blacksquare$$

Exemplos

1. Verifique se $\vec{u} = (1,-1,2)_E$, $\vec{v} = (-3,4,1)_E$, $\vec{w} = (1,0,9)_E$ são LI ou LD.

2. Calcule m para que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E$$
$$\vec{v} = (1, 2, m)_E$$
$$\vec{w} = (1,1,1)_E$$

sejam LD.

3. Sendo $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é base de V^3 e que

$$\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}, \quad \vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}, \quad \vec{f_3} = \vec{e_1} + 2\vec{e_3}$$

(a) Mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base de V^3.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1,1,1)_E$ na base F.

Alguns pontos importantes

* Em V^3, uma base é formada por 3 vetores LI. (As bases não são únicas!)

* A importancia de ter uma base é que qualquer vetor em V^3 pode ser representado de uma maneira única com uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com $\mathbb{R}^3$.

* Todas as propriedades sobre vetores podem ser enunciadas usando coordenadas.

* As operações sobre vetores podem ser feitas usando coordenadas que é mais fácil e mais prático (especialmente se queremos usar um computador).

Mudança de base

Sabemos que V^3 não possui uma única base.

Dadas duas bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de V^3, um vetor $\vec{v}$ de V^3 têm coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ na base E e coordenadas $(y_1, y_2, y_3)_F$ na base F.

Qual é a relação entre as duas coordenadas?

Responder a esta pergunta é objetivo da aula de hoje.

Como E é uma base e $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ são vetores de V^3, eles tem coordenadas na base E, ou sejam existem escalares a_{ij} tal que

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

$$a_{ij}$$

O coeficiente de $\vec{e}_i$

índice de $\vec{f}_j$

Logo $\vec{v} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3$

$$= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3)$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3$$

$$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Pela unicidade das coordenadas, temos

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

Escrevendo as equações na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F .$$

A matriz

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

chama-se de matriz de mudança de base E para base F.

A primeira coluna da matriz M_{EF} é formada pelas coordenadas do vetor $\vec{f_1}$ na base E, a segunda coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f_2}$ na base E e a terceira coluna pelas coordenadas do vetor $\vec{f_3}$ na base E.

Escrevemos

$$(\ )_E = M_{EF}(\ )_F$$

Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (F é uma base), sabemos que o determinante da matriz M_{EF} não é nulo. Portanto M_{EF} possui uma matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$:

$$M_{EF} \cdot (M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1} \cdot M_{EF} = I_d$$

onde

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz identidade

Exemplos 1. Mostre que $M_{EE} = I_d$.

2. Determine a, b, c sabendo que $(1,1,2)_E = (2,1,0)_F$ e $M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$

3. Escreva a matriz de mudança da base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ para base $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ sabendo que

$\vec{f_1} = (-3,1,1)_E$, $\vec{f_2} = (1,-2,1)_E$, $\vec{f_3} = (1,2,0)_E$.

Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4,1,-1)_F$ na base E?

Proposição Sejam E, F, G três bases de V^3. Então
$$M_{EF} \cdot M_{FG} = M_{EG}.$$

Demonstração Exercício.

Corolário: $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$

Demonstração: Temos
$$M_{FE} \cdot M_{EF} = M_{FF} = Id$$
$$M_{EF} \cdot M_{FE} = M_{EE} = Id$$

Portanto M_{FE} é a matriz inversa de M_{EF}. ▨

Exercício Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v}-\vec{u}, \vec{u}-\vec{w}, \vec{u})$.

1. Mostre que F é uma base de V^3.
2. Calcule as coordenadas de $\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$ na base F.

Solução: 1) Sejam $\vec{f_1} = \vec{v}-\vec{u}$, $\vec{f_2} = \vec{u}-\vec{w}$, $\vec{f_3} = \vec{u}$. Temos
$$\vec{f_1} = (-1, 1, 0)_E,$$
$$\vec{f_2} = (1, 0, -1)_E,$$
$$\vec{f_3} = (1, 0, 0)_E.$$

Como
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \neq 0,$$
os vetores $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (Proposição na página 22).

Portanto $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de V^3.

2). O vetor $\vec{x} = \vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$ tem coordenadas $(1,2,3)_E$. Sejam $(x,y,z)_F$ suas coordenadas na base F.

Temos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = M_{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E$. Precisamos achar a matriz de mudança da base F para base E. Para isso, precisamos das coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ da base E na base F.

Temos
$$\vec{f}_1 = \vec{v} - \vec{u} \quad (1)$$
$$\vec{f}_2 = \vec{u} - \vec{w} \quad (2)$$
$$\vec{f}_3 = \vec{u} \quad (3)$$

$(3) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{f}_3$. Substituindo em (1) e (2) obtemos
$$\vec{v} = \vec{f}_1 + \vec{f}_3,$$
$$\vec{w} = -\vec{f}_2 + \vec{f}_3.$$

Portanto, $\vec{u} = (0,0,1)_F$, $\vec{v} = (1,0,1)_F$, $\vec{w} = (0,-1,1)_F$ e

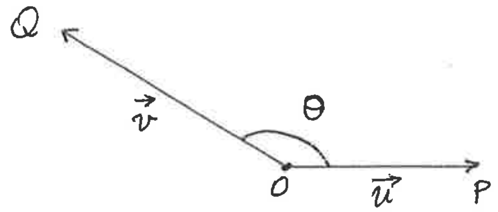
$$M_{FE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, obtemos
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}_F.$$

Produto escalar

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos representados pelos pares de pontos O, P e O, Q respectivamente; isto é,

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad e \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$, com O a mesma origem das duas representações.

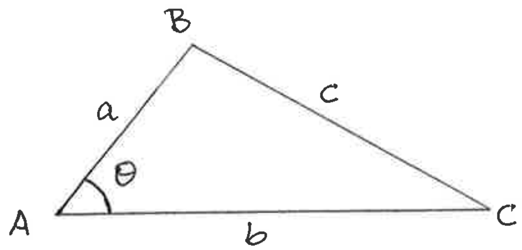


Definição: A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $P\hat{O}Q$ com $0 \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos

$$\theta = ang(\vec{u}, \vec{v}).$$

Observação Temos duas escolhas para definir $ang(\vec{u}, \vec{v})$: escolhamos $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$ de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$.

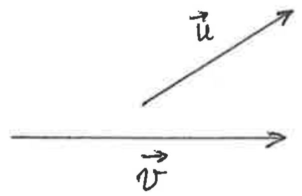
Lei do cosseno

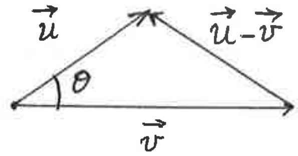


Seja ABC um triângulo como na figura acima, a o comprimento do segmento AB, b o comprimento do segmento AC, c o comprimento do segmento BC e θ o angulo formado pelos segmentos AB e AC.

Temos $$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$ (Lei do cosseno)

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$





Pela Lei do cosseno, temos

$$\boxed{\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta}\ , \quad \theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$$

A Lei do Cosseno permite calcular $\cos\theta$ sabendo $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u}-\vec{v}\|$.

Definição O produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$, é o número real tal que

(a) se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta}\ .$$

Observações/propriedades

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos,

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\ .$$

2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Portanto, por (1) e (2), se temos um produto escalar bem definido podemos obter o angulo θ e o módulo de vetores.

3. $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$) se, e somente se, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

4. Desigualdade de Schwarz: para $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquers, vale $\quad |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \quad$ (Exercício)

Base ortonormal

Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base de V^3. Dizemos que E é uma base ortonormal se

(1) $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$ (i.e., os vetores $\vec{e_i}$, $i=1,2,3$, são unitários).

(2) $\text{ang}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \text{ang}(\vec{e_1}, \vec{e_3}) = \text{ang}(\vec{e_2}, \vec{e_3}) = \frac{\pi}{2}$ (i.e., os vetores são dois a dois ortogonais).

Proposição

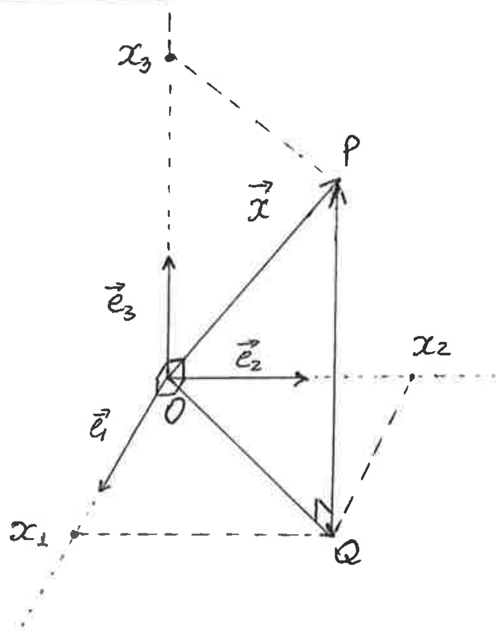
Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal de V^3, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$. Então

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}$$

Demonstração

Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$.

Representamos $\vec{x}$ como na figura pelo vetor $\vec{OP}$.



Pelo Teorema de Pitagoras

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{OP}\|^2 \\
&= \|\vec{OQ}\|^2 + \|\vec{QP}\|^2 \\
&= \|\vec{OQ}\|^2 + \|x_3 \vec{e_3}\|^2 \\
&= \|x_1 \vec{e_1}\|^2 + \|x_2 \vec{e_2}\|^2 + \|x_3 \vec{e_3}\|^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.
\end{aligned}$$

Portanto $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Temos, por definição, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$.

Pela Lei do cosseno,

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Temos

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2$$
$$= a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2-2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)$$
$$= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2).$$

Portanto $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = \vec{u}\cdot\vec{v}.$ ▨

Observacões

1. A formula na proposição anterior é válida somente quando a base E é uma base ortonormal.
2. A formula é válida em qualquer base ortonormal.

Exemplos/Exercícios

1. Seja $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ uma base ortonormal de V^3.
   e sejam $\vec{f_1}=\vec{e_1}$, $\vec{f_2}=\vec{e_1}+\vec{e_2}$, $\vec{f_3}=\vec{e_3}$.
   (a) Mostre que $F=(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ é uma base de V^3.
   F é ortonormal?
   (b) Seja $\vec{u}=(1,0,0)_F$ e $\vec{v}=(0,1,0)_F$. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Seja E uma base ortonormal de V^3. Calcule $ang(\vec{u},\vec{v})$
   Sendo (i) $\vec{u}=(1,0,1)_E$, $\vec{v}=(-2,10,2)_E$.
   (ii) $\vec{u}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)_E$, $\vec{v}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})_E$.

3. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais a $\vec{u}=(2,3,-1)_E$ e a $\vec{v}=(2,-4,6)_E$, sendo E uma base ortonormal de V^3.

Proposição (Propriedades do produto escalar)

Qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ, valem as seguintes propriedades:

(a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(b) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(d) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Demonstração Usamos coordenadas dos vetores em relação a uma base ortonormal. (Vamos mostrar que tais bases existem.) $\square$

Exercício

Seja $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. Prove que

(a) $\vec{w}$ não pertence a T.

(b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T.

(c) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores LI de T, então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

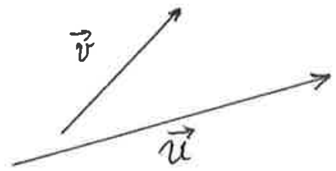
(d) Três vetores quaisquers de T são LD.

(e) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores LI de T, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

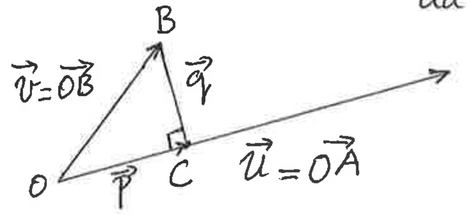
T é chamado plano ortogonal a $\vec{w}$.

Projeção ortogonal

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Vamos decompor o vetor $\vec{v}$ em soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$, com $\vec{p}$ paralelo ao vetor $\vec{u}$ e $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{u}$.



Tal decomposição existe: Seja C o pé da perpendicular por B a reta OA



Então $\vec{p}=\vec{OC}$ e $\vec{q}=\vec{CB}$ satisfazem

$$\vec{p}+\vec{q}=\vec{v}, \quad \vec{p}\,/\!/\,\vec{u} \text{ e } \vec{q}\perp\vec{u}.$$

O vetor $\vec{p}$ é chamado <u>projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$</u> e é denotado por $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.

Vamos achar as expressões de $\vec{p}$ e $\vec{q}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Existe um escalar α tal que $\vec{p}=\alpha\vec{u}$.

Temos $\vec{v}=\vec{p}+\vec{q}=\alpha\vec{u}+\vec{q}$

Logo $\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{u}+\underbrace{\cancel{\vec{u}\cdot\vec{q}}}_{=0}=\alpha\|\vec{u}\|^2.$

Daí $\alpha=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2},$

$$\boxed{\vec{p}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}}$$

$$\boxed{\vec{q}=\vec{v}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}}$$

<u>Proposição</u>: Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. A projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é dada por

$$\vec{p}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \quad \text{e seu módulo é} \quad \|\vec{p}\|=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemplo Seja E uma base ortonormal.

(1) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ sendo
$$\vec{v} = (1,-1,2)_E\,, \quad \vec{u} = (3,-1,1)_E.$$

(2) Decomponha $\vec{v} = (-1,-3,2)_E$ em soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (0,1,3)_E$ e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$.

Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt

Vimos que é fácil calcular o produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (e portanto de $\|\vec{u}\|$, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$, $\text{ang}(\vec{u},\vec{v})$) quando as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são em relação a uma base ortonormal.

Suponha que $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é uma base mas não é ortonormal. Como construir uma outra base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a partir de E?

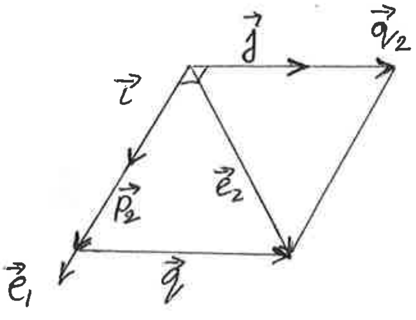
Observe que uma vez que temos B, podemos fazer uma mudança de base de E para B e trabalhar na base B.

Construção de B

(1) Escolhamos $\vec{i}$ como o versor de $\vec{e_1}$:
$$\vec{i} = \frac{\vec{e_1}}{\|\vec{e_1}\|}.$$

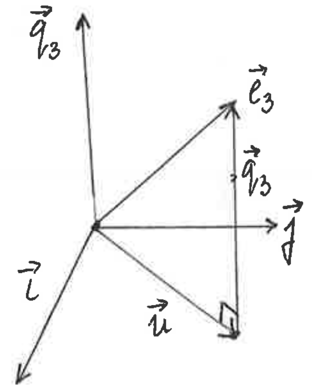
(2) Decompomos $\vec{e_2}$ em dois vetores $\vec{p_2}$ e $\vec{q_2}$, sendo $\vec{p_2} \parallel \vec{i}$ e $\vec{q_2} \perp \vec{i}$.

Sabemos que $\vec{p_2} = \dfrac{\vec{i}\cdot\vec{e_2}}{\|\vec{i}\|^2}\vec{i} = (\vec{i}\cdot\vec{e_2})\vec{i}$ pois $\|\vec{i}\| = 1$, e
$$\vec{q_2} = \vec{e_2} - (\vec{i}\cdot\vec{e_2})\vec{i}.$$



Observe que $\vec{q_2} \neq \vec{0}$ pois $\vec{e_2}$ e $\vec{i}$ são LI.

Escolhamos $\vec{j} = \dfrac{\vec{q_2}}{\|\vec{q_2}\|}$



Seja $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{e}_3$ ao plano gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (também gerado por $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$).

Temos

$$\vec{e}_3 = \vec{q}_3 + \vec{u}$$ sendo $\vec{q}_3$ ortogonal a $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e $\vec{u}$ gerado por $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Temos $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$. Como $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$,

$$\vec{e}_3 = \vec{q}_3 + \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \vec{e}_3\cdot\vec{i} \\ \beta = \vec{e}_3\cdot\vec{j} \end{cases}$$

Portanto, $\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{e}_3\cdot\vec{i})\vec{i} - (\vec{e}_3\cdot\vec{j})\vec{j}$

Observe que $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ pois $\vec{e}_3, \vec{i}, \vec{j}$ são LI.

Escolhamos $\vec{k} = \dfrac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}$.

A base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é ortonormal.

Observe que a matriz de mudança da base E para B tem a forma

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

, isto é, é uma matriz triangular superior.

Exemplos/Exercícios

1. Sejam, em relação a uma base ortonormal, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$ e $\vec{a} = (3,-2,-1)$.
Prove que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal e calcule as coordenadas de $\vec{a}$ nessa base.

Solução Temos $\vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$, $\vec{v}\cdot\vec{v} = 1$, $\vec{w}\cdot\vec{w} = 1$,
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Logo $F = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal.

Para achar as coordenadas de $\vec{a}$ na base F, podemos usar a formula de mudança de base. Podemos também prosseguir da seguinte forma:

Temos $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Como $F = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é ortonormal
$\vec{a}\cdot\vec{u} = x$, $\vec{a}\cdot\vec{v} = y$, $\vec{a}\cdot\vec{w} = z$.

Portanto, $x = (3,-2,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$y = (3,-2,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$z = (3,-2,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Daí, $\vec{a} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}}\right)_F$

2. Descreva o conjunto solução da equação $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 0$, sabendo que $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ é uma base ortonormal.

Solução Escrevemos $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Então

$$\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 0 \iff (a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = 0$$

$$\iff (a,b,c)\cdot(1,1,-1) = 0$$

$$\underset{\text{(base ortonormal)}}{\iff} a+b-c = 0 \iff c = a+b.$$

Logo, $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + (a+b)\vec{k} = a(\vec{i}+\vec{k}) + b(\vec{j}+\vec{k})$, ou seja $\vec{x}$ é gerado por $\vec{i}+\vec{k}$ e $\vec{j}+\vec{k}$ e pertence ao plano ortogonal a $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Orientação de V^3

Sejam E e F duas bases de V^3. Dizemos que E é equivalente a F, e escrevemos $E \sim F$, se $\det(M_{EF}) > 0$.

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bases de V^3. A relação "$\sim$" entre os elementos de $\mathcal{B}$ é uma relação de equivalência, ou seja

(1) $\sim$ é reflexiva: $\forall E \in \mathcal{B}$, $E \sim E$.

(2) $\sim$ é simétrica: Se $E \sim F$, então $F \sim E$.

(3) $\sim$ é transitiva: se $E \sim F$ e $F \sim G$, então $E \sim G$.

Para provar (1)-(3) usamos o fato que $M_{EE} = Id$, $M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$, e $M_{EG} = M_{EF} \cdot M_{FG}$.

A classe de equivalência de uma base E de V^3, denotada por $\overline{E}$, é o conjunto de todas as bases equivalentes a E, ou seja,

$$\overline{E} = \{F \in \mathcal{B} \text{ tal que } F \sim E\}$$
$$= \{F \in \mathcal{B} \text{ tal que } \det(M_{EF}) > 0\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ tem somente duas classes de equivalência.

Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e F a base de V^3 dada por $F = (\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$.

Como
$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(M_{EF}) = -1, \text{ portanto } F \notin \overline{E}.$$

Afirmamos que $\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}$. De fato, seja G uma base de V^3.

Se $\det(M_{EG}) > 0$, então $E \sim G$, ou seja $G \in \overline{E}$.

Se não, $\det(M_{EG}) < 0$. Temos $M_{FG} = M_{FE} \cdot M_{EG}$, portanto

$$\det M_{FG} = \underbrace{\det(M_{FE})}_{<0} \cdot \underbrace{\det(M_{EG})}_{<0} > 0,$$

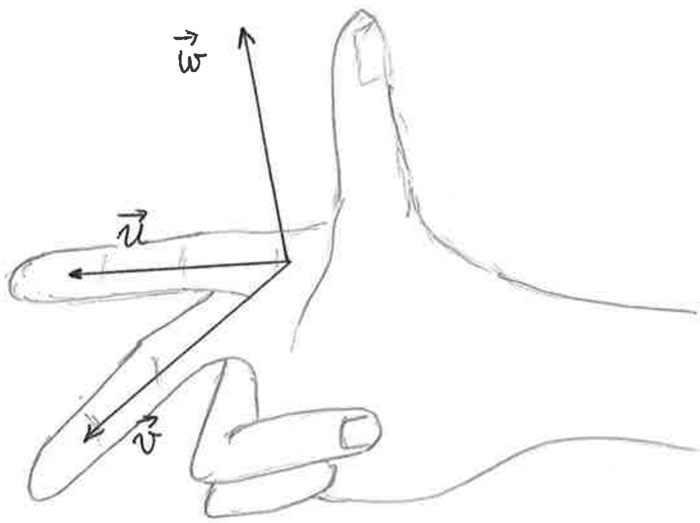
e daí concluímos que $F \sim G$, ou seja $G \in \overline{F}$.

Isso mostra que $\mathcal{B} \subset \overline{E} \cup \overline{F}$. Como $\overline{E} \cup \overline{F} \subset \mathcal{B}$, temos $\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

Observe que $\overline{E} \cap \overline{F} = \phi$, pois $F \notin \overline{E}$.

Definição Cada classe de equivalência de $\mathcal{B}$ chama-se orientação de V^3. Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que V^3 está orientado, e neste caso cada base da orientação escolhida é chamada base positiva, e cada base da outra orientação é chamada base negativa.

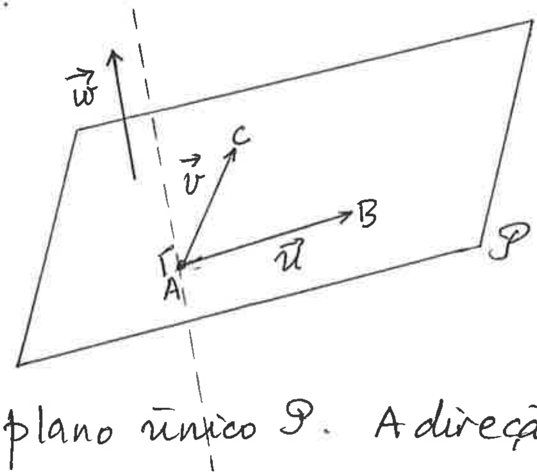
Convenção Uma base $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como na seguinte figura



Orientamos V^3 com uma base que obedece a regra da mão direita.

Produto vetorial

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI. Existe um vetor não nulo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.



Se representamos
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
os pts A, B, C
pertencem a um plano único $\mathcal{P}$. A direção do vetor $\vec{w}$ é dada por uma reta perpendicular ao plano $\mathcal{P}$, portanto é única. Mas o sentido de $\vec{w}$ não é único. O módulo de $\vec{w}$ também não é único.

Queremos escolher de uma maneira única um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (quando eles são LI).

Definição O produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tal que

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

(b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$, então

(b1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$;

(b2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva;

(b3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$.

Observações

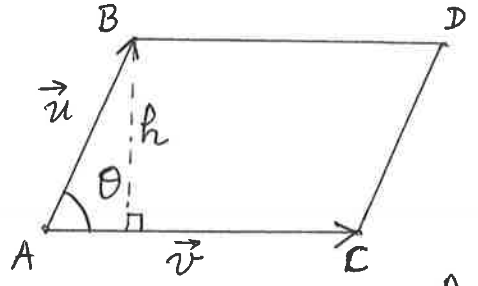
1) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

2) (b1), (b2), (b3) determinam unicamente o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$

3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| =$ area do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$\vec{u} = \vec{AB}$

$\vec{v} = \vec{AC}$



Area ABDC $= h \cdot \|\vec{v}\|$

Temos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{\|\vec{u}\|}$, portanto

$h = \|\vec{u}\| \operatorname{sen}\theta$ e

Area ABDC $= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$

$= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

4) O produto vetorial de dois vetores é um vetor.

O produto escalar de dois vetores é um escalar.

<u>Proposição</u> Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é o vetor dado pelo seguinte determinante (formal)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{vetores da base } B \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{u} \\ \leftarrow \text{Coordenadas de } \vec{v} \end{array}$$

<u>Demonstração</u>

Vamos verificar que, de fato, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é dado pelo determinante acima.

(a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então o determinante é o vetor nulo.

(b) Temos $\vec{u} \wedge \vec{v} = (b_1 c_2 - b_2 c_1)\vec{i} - (a_1 c_2 - a_2 c_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$

(b1) $\vec{u} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_1(a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$= 0$

Similarmente, $\vec{v} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$. Logo (b1) é satisfeita.

(b2) Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$.

$$\det M_{BE} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ b_1 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ c_1 & c_2 & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 > 0$$

pois estamos supondo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI.

Portanto E é uma base positiva

(b3) Vamos mostrar que

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2\theta).$$

Temos

$$\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\left(1-\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}\right)$$

$$= \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

$$= (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2) - (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$$

$$= a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$$

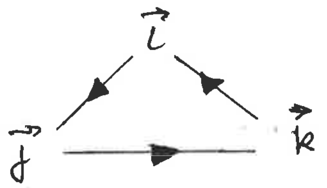
$$- (a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_2c_1c_2 + 2b_1b_2c_1c_2)$$

$$= (b_1c_2-b_2c_1)^2 + (a_1c_2-a_2c_1)^2 + (a_1b_2-b_1a_2)^2$$

$$= \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2. \qquad \blacksquare$$

Exemplos Seja $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal positiva.

1. Sejam $\vec{u}=(1,2,3)_B$, $\vec{v}=(-1,1,2)_B$.
   Calcule $\vec{u}\wedge\vec{v}$.
2. Calcule $(2\vec{k}-\vec{i}+5\vec{j})\wedge(3\vec{i}-2\vec{k}+\vec{j})$.
3. Mostre que $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$,
   $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$.



Propriedades do produto vetorial

Proposição: Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja o número real λ,

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

(b) $\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

(c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

Demonstração As afirmações decorrem das propriedades do determinante. ∎

Proposição

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

(a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$.

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}$.

Demonstração

(a) A igualdade é satisfeita se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI. Escolhamos uma base ortonormal positiva $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tal que $\vec{i} \parallel \vec{u}$ e $\vec{j}$ é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Então $\vec{u} = (a_1, 0, 0)_B$, $\vec{v} = (a_2, b_2, 0)_B$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_B$.

Temos $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a_1 b_2)_B$, portanto,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a_1 b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_B.$$

Do outro lado,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \cdot \vec{w} = a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = a_1 a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} = -(a_2 a_3 + b_2 b_3)(a_1, 0, 0)_B + a_1 a_3 (a_2, b_2, 0)_B$$

$$= (-a_1 b_2 b_3, a_1 a_3 b_2, 0)_B$$

$$= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}.$$

Para (b), temos

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = -(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u}$$

$$\overset{\text{usando (a)}}{=} -\left(-(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}\right)$$

$$= (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}. \qquad \boxtimes$$

Corolário (Identidade de Jacobi)

$$\boxed{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} + (\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u} + (\vec{w}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v} = \vec{0}}$$

qualquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Demonstração Aplique a proposição anterior.

Observação Em geral $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) \neq (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$, então é importante colocar parenteses para calcular o produto vetorial envolvendo três vetores.

Exemplo Seja B uma base ortonormal positiva,

$$\vec{u} = \left(1, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right)_B, \quad \vec{v} = (6, -2, 4)_B, \quad \vec{w} = \left(\tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}\right)_B.$$

Calcule $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ e $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$.

Proposição Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores L.I. Então

(a) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qualquer que seja o vetor $\vec{w}$.

(b) $F = (\vec{u}, (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}, \vec{u}\wedge\vec{v})$ é uma base positiva de V^3.

Demonstração

(a) Pela proposição na página 42, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = -(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}$, portanto, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, $\vec{u}\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ é ortogonal a $\vec{u}$. Logo $\vec{u}\wedge\vec{v}$ e $\vec{u}$ são LI. Daí $G = (\vec{u}\wedge\vec{v}, \vec{u}, (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u})$ é uma base positiva de V^3. A matriz de mudança da base F para G é dada por

$$M_{FG} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(M_{FG}) = 1 > 0$, $F \sim G$, portanto F é positiva. ▨

Corolário

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI. Então $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ com

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \frac{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}}{\|(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

é uma base ortonormal positiva de V^3.

Exemplos/exercícios

Seja B uma base ortonormal positiva de V^3.

1. Calcule a area do paralelogramo ABCD sendo $\vec{AB} = (1,1,-1)_B$ e $\vec{AD} = (2,1,4)_B$.

2. Calcule a area do triângulo ABC sendo $\vec{AB} = (-1,1,0)_B$ e $\vec{AC} = (0,1,3)$.

3. Sejam $\vec{u} = (1,1,1)_B$ e $\vec{v} = (0,1,2)_B$. Obtenha uma base ortonormal positiva $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que
   (i) $\vec{a}$ e $\vec{u}$ sejam da mesma direção e sentido
   (ii) $\vec{b}$ seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

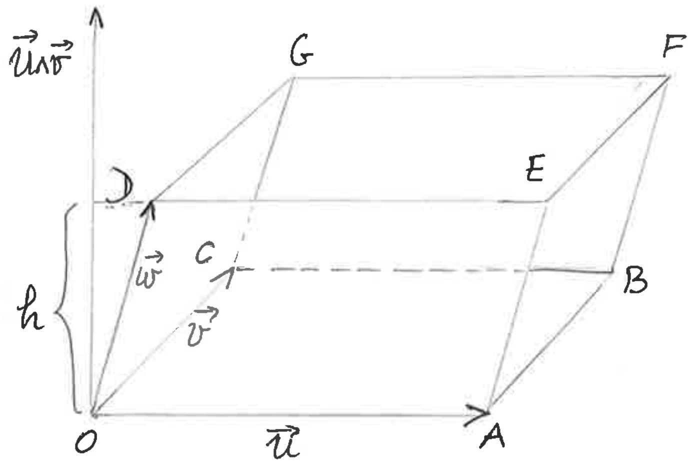
Produto misto

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores LI em V^3, representados por

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OC}$

$\vec{w} = \overrightarrow{OD}$



Considere o paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Denote por V o volume do paralelepípedo. Temos

$$V = \text{area } OABC \cdot h$$

Sabemos que area $OABC = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ e $h = \|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w}\| = \dfrac{|\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$

Portanto, $V = |\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}|$

Definição O produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nessa ordem, é o número real $\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}$ indicado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}.$$

Proposição Seja B uma base ortonormal positiva. Sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_B$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_B$, $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_B$. Então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demonstração Para $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)_B$

Logo $\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (a_3, b_3, c_3)$

$$= \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Corolário

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LD se, e somente se, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$.

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ são LI se, e somente se, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\neq 0$.

Proposição (Propriedades do produto misto)

(a) O produto misto é trilinear: $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{u}_i,\vec{v}_i,\vec{w}_i \in V^3$, $i=1,2$,

$$[\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}]+\beta[\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}],$$

$$[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}]+\beta[\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}],$$

$$[\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}_1+\beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1]+\beta[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2].$$

(b) O produto misto é alternado: $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V^3$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$$
$$= [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}].$$

Demonstração Decorre das propriedades do determinante. $\blacksquare$

Exemplo Sendo $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=6$, Calcule $[2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}, -\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}-3\vec{w}]$.

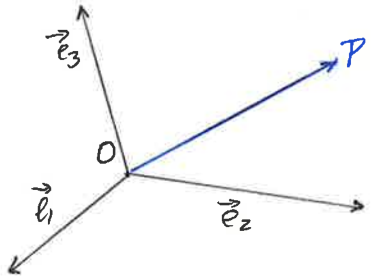
§2. Retas e Planos

Sistema de Coordenadas

Denotamos por $\mathbb{E}^3$ o espaço Euclideano (de dimensão 3).

Seja O um ponto de $\mathbb{E}^3$ e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

O par ordenado $\Sigma = (O, E)$ é chamado <u>sistema de coordenadas</u> em $\mathbb{E}^3$, de origem O e base E.



Dado um ponto P em $\mathbb{E}^3$, as coordenadas do vetor $\vec{OP}$ na base E são chamadas <u>coordenadas de P no sistema de coordenadas</u> Σ.

Se $\vec{OP} = (x, y, z)_E$, escrevemos $P = (x, y, z)_\Sigma$ ou $P = (x, y, z)$

As retas que contem O e que são paralelas ao vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas <u>eixos coordenados</u>.

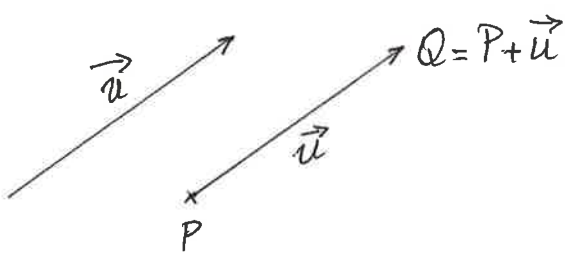
Cada plano determinado por dois eixos coordenados chama-se <u>plano coordenado</u>

O sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ é dito <u>ortogonal</u> se a base E é ortonormal.

Soma de ponto com vetor

Definição

Sejam P um ponto em $\mathbb{E}^3$ e $\vec{u}$ um vetor em V^3.



O ponto Q tal que $\vec{PQ} = \vec{u}$ é chamado de soma de P com $\vec{u}$:

$$P + \vec{u} = Q \iff \vec{PQ} = \vec{u}$$

Proposição Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.

Se $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$, $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ e $\vec{u} = (a, b, c)_E$, então

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E$$

$$A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Temos
$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= -\vec{OA} + \vec{OB} \\ &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E\end{aligned}$$

Por definição $A + \lambda\vec{u} = Q \iff \vec{AQ} = \lambda\vec{u}$

Sejam $(x, y, z)_\Sigma$ as coordenadas do pt Q no sistema Σ.

Como $\vec{AQ} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)_E$, temos

$$\vec{AQ} = \lambda\vec{u} \iff \begin{cases} x - x_1 = \lambda a \\ y - y_1 = \lambda b \\ z - z_1 = \lambda c \end{cases} \iff (x, y, z)_\Sigma = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma.$$

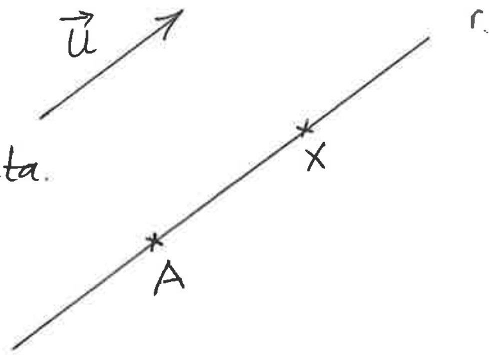
$\blacksquare$

Definição A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B é o número real $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$.

Seja Σ um sistema ortogonal de coordenadas, e $A = (x_1, y_1, z)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$. Então

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Retas



Um vetor não nulo paralelo a uma reta chama-se vetor diretor da reta.

Seja $\vec{u}$ um vetor diretor de uma reta r e A um ponto de r.

Um ponto X pertence a r se, e somente se, $\overrightarrow{AX}$ é paralelo a $\vec{u}$, ou seja, se e somente se, $X = A + \lambda\vec{u}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Variando λ em $\mathbb{R}$, obtemos todos os pontos da reta r. Então

$$\boxed{X \in r \iff X = A + \lambda\vec{u}, \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

A equação $r: X = A + \lambda\vec{u}, \ \lambda \in \mathbb{R}$ é chamada equação da reta r na forma vetorial. O escalar λ é chamado parâmetro.

Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas e suponha que

$X = (x, y, z)_\Sigma$, $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$, $\vec{u} = (a, b, c)_E$. Então, escrevendo a equação da reta r na forma vetorial em coordenadas, obtemos

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = y_0 + \lambda c \end{cases}}$$

Este sistema é chamado sistema de equaçõs da reta r na forma paramétrica.

Suponha que $a \neq 0$, $b \neq$ e $c \neq 0$. Então

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

: Sistema de equaçõs da reta r na forma simétrica

Exemplo Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas, e seja r a reta determinada pelos pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (3,-2,3)$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,-2,2)_E = 2(1,-1,1)_E$

Logo $\vec{v} = (1,-1,1)_E$ também é um vetor diretor da reta r.

As equações de r nas formas:

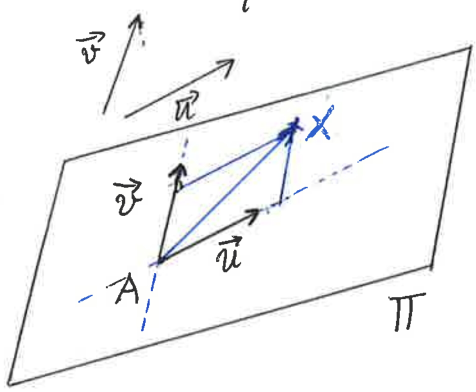
- vetorial : $(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,-1,1)$

- paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

- simétrica : $x - 1 = -y = z - 1$.

Planos

__Definição__ : Dois vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos a um plano π são chamados __vetores diretores__ do plano π.



Sejam A um ponto do plano π e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores diretores de π.

Um ponto X do espaço pertence ao plano π se, e somente se,

$\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ para alguns escalares λ, μ,

Ou seja,

$$\boxed{X \in \pi \iff X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

A equação acima chama-se __equação vetorial__ do plano π

Seja $\Sigma=(O,E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e suponha que

$X=(x,y,z)_\Sigma$, $A=(x_0,y_0,z_0)_\Sigma$, $\vec{u}=(r,s,t)_E$, $\vec{v}=(m,n,p)_E$.

Então, temos o seguinte <u>sistema de equações paramétricas</u> do plano π:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda r + \mu m \\ y = y_0 + \lambda s + \mu n \\ z = z_0 + \lambda t + \mu p \end{cases}, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}}$$

variando λ e μ em $\mathbb{R}$ obtemos as coordenadas de todos os pontos em π.

<u>Exemplo</u> Seja π o plano que contem os pontos $A=(1,0,1)_\Sigma$, $B=(2,1,-1)_\Sigma$ e $C=(1,-1,0)_\Sigma$.

- Vetores diretores de π: $\vec{u}=\vec{AB}=(1,1,-2)_E$
  $\vec{v}=\vec{AC}=(0,-1-1)_E$

- Equação vetorial de π: $X=(x,y,z)_\Sigma \in \pi \Leftrightarrow X=B+\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
  ou seja
  $(x,y,z)=(2,1,-1)+\lambda(1,1,-2)+\mu(0,-1,-1)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

- Equações paramétricas de π:

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda-\mu \\ z = -1-2\lambda-\mu \end{cases}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Seja π um plano, $A=(x_0,y_0,z_0)_\Sigma$ um ponto de π e $\vec{u}=(r,s,t)_E$ e $\vec{v}=(m,n,p)_E$ dois vetores diretores de π.

Temos $X=(x,y,z)_\Sigma \in \pi$ se, e somente se, $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ são LD.

De fato $X\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ para alguns escalares $\lambda,\mu \Rightarrow \overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}$ são LD.

Reciprocamente, suponha que $\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}$ são LD. Então existem escalares α,β,γ não todos nulos tal que

$$\alpha\overrightarrow{AX}+\beta\vec{u}+\gamma\vec{v}=\vec{0}.$$

O escalar α não pode ser nulo, caso contrário $\beta\vec{u}+\gamma\vec{v}=\vec{0}$ com $\beta\neq 0$ ou $\gamma\neq 0$, ou seja $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, que não pode acontecer pois $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores de π.

Portanto $\overrightarrow{AX}=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\vec{u}+\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\vec{v} \Rightarrow X\in\pi$.

Daí obtemos,

$$X=(x,y,z)_\Sigma\in\pi \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow (sp-tn)x+(mt-rp)y+(rn-sm)z-x_0(sp-tn)-y_0(mt-rp)-z_0(rn-sm)=0$$

Denotando $\begin{cases} a=sp-tn \\ b=mt-rp \\ c=rn-sm \\ d=-(x_0a+y_0b+z_0c) \end{cases}$

obtemos uma <u>equação geral</u> do plano π na forma:

$$\boxed{X=(x,y,z)_\Sigma\in\pi \Longleftrightarrow ax+by+cz+d=0}$$

Exemplo

Consider o exemplo anterior com π passando por $A=(1,0,1)_\Sigma$, $B=(2,1,-1)_\Sigma$ e $C=(1,-1,0)_\Sigma$. Já obtemos dois vetores diretores $\vec{u}=(1,1,-2)_E$ e $\vec{v}=(0,-1,-1)_E$ de π.

Então uma equação geral do plano é:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{-3x+y-z+4=0}$$

(Verifique que as coordenadas de A, B, C satisfazem a equação geral de π.)

Exemplos

1. Obtenha equações gerais dos planos coordenados.
2. Obtenha uma equação geral do plano que contem os pontos $(1,0,0)_\Sigma$, $(0,1,0)_\Sigma$ e $(0,0,1)_\Sigma$.

Proposição

Fixando um sistema de coordenadas, toda equação de primeiro grau a três incógnitas como

$$ax+by+cz+d=0 \quad , \; a,b,c \text{ não todos nulos},$$

é equação geral de um plano.

Demonstração

Suponha, sem perda de generalidade, $a\neq 0$.

Vamos achar três pontos no espaço satisfazendo a equação $ax+by+cz+d=0$:

- $y=0$, $z=0$, então $x=-\dfrac{d}{a} \longrightarrow A=\left(-\dfrac{d}{a},0,0\right)_\Sigma$
- $y=1$, $z=0$, então $x=\dfrac{-d-b}{a} \longrightarrow B=\left(-\dfrac{d+b}{a},1,0\right)_\Sigma$
- $y=0$, $z=1$, então $x=\dfrac{-d-c}{a} \longrightarrow C=\left(-\dfrac{d+c}{a},0,1\right)_\Sigma$

Seja Π o plano que contém os pontos A, B, C.

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right)_E$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)_E$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, portanto são vetores diretores do plano Π. Logo, uma equação geral do plano Π é

$$\begin{vmatrix} x + \frac{d}{a} & y & z \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}z + \frac{d}{a} = 0$$

$$\iff ax + by + cz + d = 0$$

Ou seja a nossa equação de primeiro grau é uma equação geral do plano Π. ▨

<u>Exemplo</u>

Obtenha as equações paramétricas do plano Π que contem o ponto $A = (1,1,2)_\Sigma$ e é paralelo ao plano $\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = -\lambda \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Obtenha uma equação geral do plano Π.

Posição relativa e interseção de retas e planos

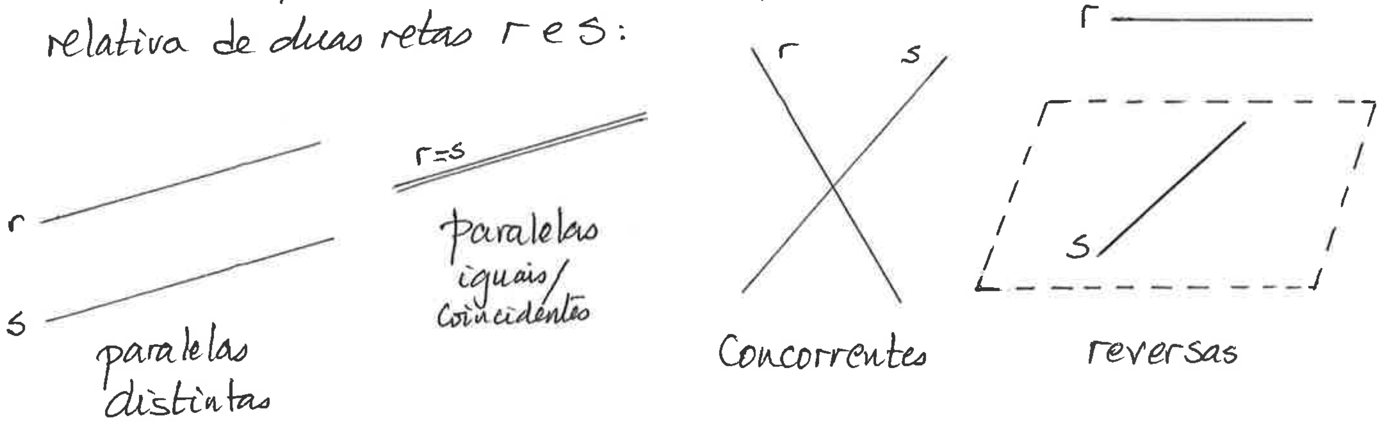
Dizemos que duas retas r e s são paralelas se elas possuem vetores diretores paralelos.

Duas retas paralelas podem ser distintas ou coincidentes.

Se elas são paralelas distintas, então elas não são concorrentes.

Podemos ter em $\mathbb{E}^3$ retas não paralelas e não concorrentes. chamamos tais retas de retas reversas(*).

Então, no espaço $\mathbb{E}^3$, temos quatro possibilidades para posição relativa de duas retas r e s:



Sejam $\vec{r}$ e $\vec{s}$ vetores diretores de r e s respectivamente, e sejam A um ponto da reta r e B um ponto da reta s.

(1) Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI, então

r e s são reversas $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}$ são LI

r e s são Concorrentes $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB}$ são LD.

(2) se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LD, então

r e s são distintas $\Leftrightarrow$ $A \in r \Rightarrow A \notin s$

r e s são identicas $\Leftrightarrow$ $A \in r \Rightarrow A \in s$

(*) Reversas significa que existe um plano π que contém a reta s e que é paralelo a reta r, com $r \notin \pi$.

__Exemplo__

Vamos verificar se as retas, dadas na forma paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 9-4\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases} \ \lambda \in \mathbb{R}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas.

Temos $\vec{r} = (1,-1,1)$ e $\vec{s} = (-4,1,-2)$, como eles são LI as retas r e s são reversas ou concorrentes.

Seja $A = (4,1,1) \in r$ e $B = (9,2,2)$, daí $\vec{AB} = (5,1,1)$

Temos
$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \vec{s} & \vec{AB} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
portanto r e s são concorrentes.

Para considerar a interseção de r e s é necessário indicar os parâmetros nas suas equações com letras diferentes:

$$r: \begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 9-4\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 2-2\mu \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

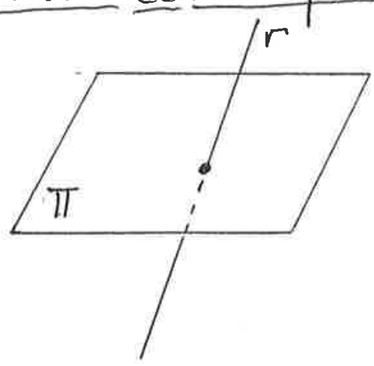
$$X = (x,y,z) \in r \cap s \iff \begin{cases} 4+\lambda = 9-4\mu \\ 1-\lambda = 2+\mu \\ 1+\lambda = 2-2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+4\mu = 5 & (1) \\ \lambda+\mu = -1 & (2) \\ \lambda+2\mu = 1 & (3) \end{cases}$$

[observe que $3(3)-2(2): \lambda+4\lambda = 5$]

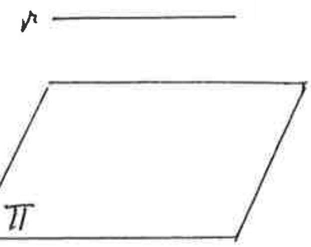
Temos $(1)-(2): \ 3\mu = 6 \Rightarrow \mu = 2$. Substituindo em (2) da $\lambda = -3$.

Portanto as retas r e s se intersetam no ponto $(1,4,-2)$.

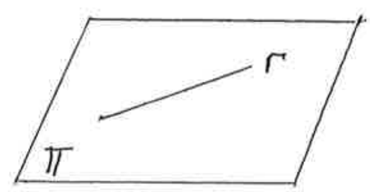
__Posição relativa de reta e plano__



r e π são __transversais__.



r é paralela a π



r esta contida em π.

Exemplo

Seja r uma reta dada por $r: X = (1,0,1) + \lambda(2,1,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e π um plano com equação geral $x+y+z=20$.

Um ponto $X \in r \cap \pi$ se, e somente se, as coordenadas $X = (x,y,z) = (1+2\lambda, \lambda, 1+3\lambda)$ de X satisfazem a equação geral do plano π, ou seja, se, e somente se,

$$(1+2\lambda) + \lambda + (1+3\lambda) = 20 \iff 6\lambda = 18 \iff \lambda = 3.$$

Logo r e π são transversais e se intersectam no ponto $(7,3,10)$.

Proposição

Seja $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano π e $\vec{u} = (m,n,p)$. Então $\vec{u}$ é paralelo a π se, e somente se,

$$am + bn + cp = 0.$$

Demonstração

Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π, então

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

O vetor $\vec{u}$ é paralelo ao plano π se, e somente se, o ponto $B = A + \vec{u}$ pertence a π. Como $B = (x_0+m, y_0+n, z_0+p)$,

$$\vec{u} \parallel \pi \iff a(x_0+m) + b(y_0+n) + c(z_0+p) + d = 0$$

$$\iff \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}_{=0} + am + bn + cp = 0$$

$$\iff am + bn + cp = 0. \qquad \blacksquare$$

Corolário

Seja $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano π, A um ponto de uma reta r e $\vec{r} = (m,n,p)$ um vetor diretor de r.

Então

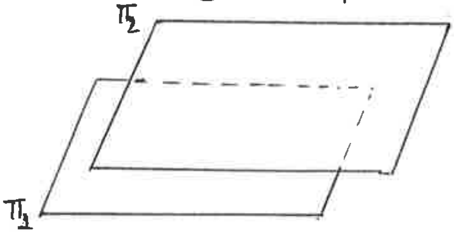
r e π são transversais $\iff am+bn+cp \neq 0$.

r é paralela a π $\iff am+bn+cp=0$ e $A \notin \pi$.

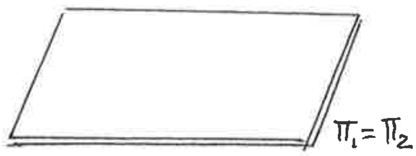
r está contida em π $\iff am+bn+cp=0$ e $A \in \pi$.

Posição relativa de planos

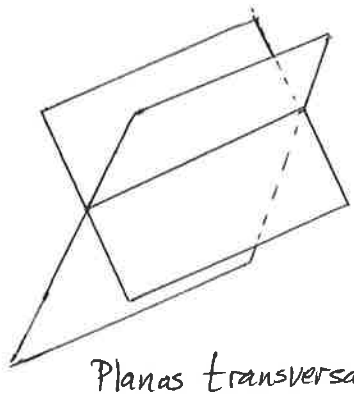
Temos as seguintes possibilidades para dois planos



planos paralelos distintos



planos paralelos coincidentes (iguais)



Planos transversais

Proposição Sejam $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ equaçõs gerais de planos Π_1 e Π_2 respectivamente.

(a) Os planos Π_1 e Π_2 são paralelos se, e somente se, a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 são proporcionais. Se d_1 e d_2 são na mesma proporção, então $\Pi_1 = \Pi_2$. Se não Π_1 e Π_2 são paralelos distintos.

(b) Π_1 e Π_2 são transversais se, e somente se, a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais.

Demonstração: Exercício.

Exemplo Sejam dois planos

$$\Pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ c_1 = 3$$
$$\Pi_2 \quad x - y + 2z = 0 \qquad a_2 = 1,\ b_2 = -1,\ c_2 = 2$$

Como a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais, os planos Π_1 e Π_2 são transversais. Vamos achar o conjunto $\Pi_1 \cap \Pi_2$.

Um ponto $X = (x, y, z) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \iff \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 & (1) \\ x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$

Temos um sistema com duas equaçõs e três incógnitas (i.e., um sistema indeterminado), Existem infinitas soluções.

Podemos pensar em y "como parâmetro" e resolver em x e z.

então

$$\begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z=1-2y \\ x+2z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+7y \\ z=1-3y \end{cases}, y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+7y \\ y=y \\ z=1-3y \end{cases}, \quad y\in\mathbb{R}$$

Portanto $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é a reta dada na forma paramétrica por

$$r: \begin{cases} x=-2+7\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-3y \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$ (trocando de letra para indicar o parâmetro)

O sistema

$$r: \begin{cases} x+2y+3z-1=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$$ chama-se sistema de equações da reta r na forma planar.

De modo geral, se a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 não são proporcionais o sistema

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$ descreve uma reta (pois é intersecção de dois planos transversais) e é chamado sistema de equações de r na forma planar

Proposição Um vetor $\vec{u}=(m,n,p)$ é paralelo a $r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Se, e somente se, $\begin{cases} a_1m+b_1n+c_1p=0 \\ a_2m+b_2n+c_2p=0 \end{cases}$

Demonstração: aplique a proposição na página 57.

Feixe de planos

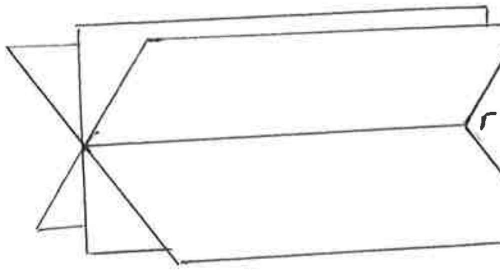
Um feixe de planos é uma família de planos.

Vamos ver dois exemplos de feixes de planos.

ⓐ Feixe de planos paralelos a um plano Π

Se Π é dado por $ax+by+cz+d=0$, então a equação $ax+by+cz+\alpha=0$, descreve, quando α percorre $\mathbb{R}$, o feixe de planos paralelos a Π. (Exercício)

(b) Feixes de planos que contém uma reta r



Proposição Seja r a reta de equações planares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

O feixe de planos que contêm r pode ser descrito pela equação

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

com α, β percorrendo o conjunto $\mathbb{R}$, sob a condição $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

(Podemos supor $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.)

Exemplo Obtenha uma equação do plano que contém o ponto $(2,0,0)$ e a reta de interseção dos planos $\pi_1 : 3x - 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + 4z - 2 = 0$

Solução: O plano em questão é um elemento do feixe de planos que contêm a reta $r: \begin{cases} 3x - 2y - z - 3 = 0 \\ 2x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$. Portanto tem equação

$$\pi: \alpha(3x - 2y - z - 3) + \beta(2x + y + 4z - 2) = 0$$

para alguns escalares α, β com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Como $(2,0,0)$ pertence a π, temos

$$3\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2}\alpha, \quad \text{com } \alpha \neq 0.$$

Logo uma equação de π é

$$\alpha\left[(3x - 2y - z - 3) - \frac{3}{2}(2x + y + 4z - 2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\left[2(3x - 2y - z - 3) - 3(2x + y + 4z - 2)\right] = 0$$

$$\overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad -7y - 14z = 0 \Leftrightarrow y + 2z = 0.$$

Vetor normal a um plano

Qualquer vetor não nulo ortogonal a um plano π chama-se vetor normal a π.

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores diretores de π. Um vetor $\vec{n}$ é um vetor normal a π se, e somente se, $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.
Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, segue que

$$\vec{n} = \alpha\, \vec{u} \wedge \vec{v}, \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Proposição Se o sistema de coordenadas é ortogonal, então $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a um plano π se, e somente se, π tem equação geral da forma

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Demonstração

Suponha que π tem equação geral $ax+by+cz+d=0$.
Vimos que $\vec{u} = (m, n, p)$ é paralelo a π se, e somente se,

$$am + bn + cp = 0.$$

Isto é equivalente a $(a,b,c) \cdot (m,n,p) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

logo $\vec{n} = (a,b,c)$ é normal a π.

Agora seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π e $\vec{n} = (a,b,c)$ um vetor normal a π.

$$\begin{aligned} X = (x,y,z) \in \pi &\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a,b,c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0, \end{aligned}$$

ou seja, uma equação geral de π é da forma $ax+by+cz+d=0$.

Observação A proposição acima não vale se o sistema de coordenadas não é ortonormal.

Exemplo Seja $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal e $E=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$

Uma outra base com $\vec{e_1}=\vec{i}$, $\vec{e_2}=\vec{j}$, $\vec{e_3}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Seja $\Sigma=(O,E)$ um sistema de coordenadas. Obtenha um vetor normal ao plano $\pi[z=0]_\Sigma$.

Solução

os vetores $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ são vetores diretores do plano π:

$(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ são paralelos a π pela proposição na pagina 57.

Logo $\vec{k}$ é um vetor normal a π.

Temos $\vec{k}=\vec{e_3}-\vec{i}-\vec{j}=\vec{e_3}-\vec{e_1}-\vec{e_2}=-\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}$

Ou seja um vetor normal a π tem coordenadas $\vec{n}=(-1,-1,1)_E$.

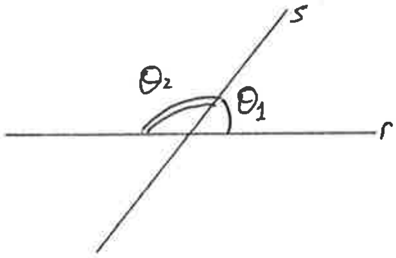
Exemplo Seja $\Sigma=(O,B)$ um sistema ortogonal de coordenadas.

Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A=(1,1,2)$ e que é paralelo ao plano de equação geral $x-y+2z+1=0$.

Medida angular

1. Medida angular entre retas

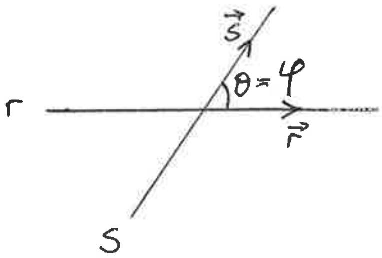
Sejam r e s duas retas concorrentes

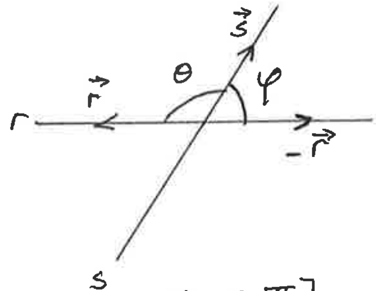


Para evitar ambiguidade, definimos o angulo entre r e s como sendo o menor dos angulos θ_1 e θ_2. Este é um número do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Denotamos por $ang(r,s)$ o ângulo entre as retas r e s. Temos

$$0 \leq ang(r,s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Seja $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r e $\vec{s}$ um vetor diretor da reta s.
Seja $\theta = ang(\vec{r}, \vec{s})$ e $\varphi = ang(r,s)$





Temos $ang(r,s) = \begin{cases} ang(\vec{r}, \vec{s}) & \text{se } ang(\vec{r},\vec{s}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ ang(-\vec{r}, \vec{s}) & \text{se } ang(\vec{r},\vec{s}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Temos $\cos(ang(\vec{r},\vec{s})) = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}$ e $\cos(ang(-\vec{r},\vec{s})) = -\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|} = -\cos(ang(\vec{r},\vec{s}))$

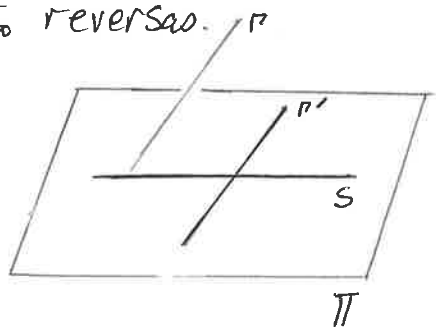
Portanto $\cos\varphi = \begin{cases} \cos\theta & \text{se } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos\theta & \text{se } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Ou seja $\cos\varphi = |\cos\theta|$, isto é

$$\boxed{\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}}$$

Se as retas r e s são paralelas, então $ang(r,s)=0$.

Suponha que r e s são reversas.



Seja π o plano que contem a reta s e é paralelo a reta r

Seja r' uma reta paralela a r e contida no plano π.

Definimos $ang(r,s) = ang(r',s)$.

Como um vetor diretor $\vec{r}$ de r também é vetor diretor da reta r', temos

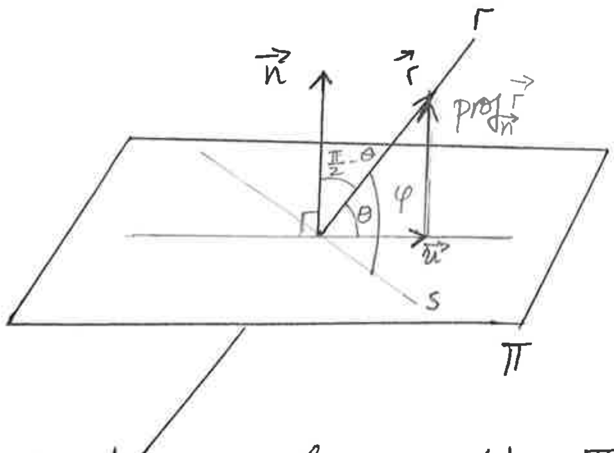
$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|}.$$

[A construição acima é para tornar intuitivo a construção do ângulo entre duas retas reversas.]

<u>Exemplo</u>. Seja $\Sigma=(O,B)$ um sistema ortogonal de coordenadas

Obtenha equação da reta r que contém o ponto $P=(1,1,1)$ e é concorrente com $s: x=2y=2z$, sabendo que o cos-seno da medida angular entre r e s é igual a $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Medida angular entre reta e plano



Seja r uma reta transversal a um plano π. Seja $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{n}$ um vetor normal de π.

Definimos o ângulo entre r e π como

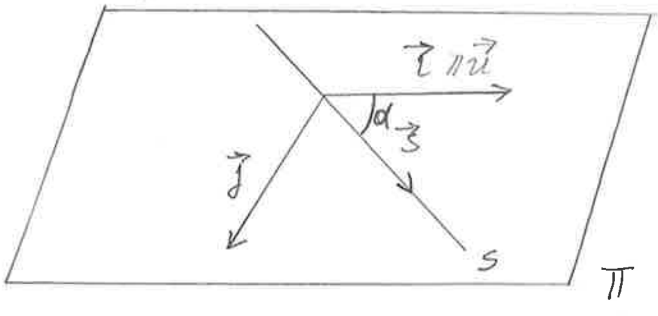
$ang(r,\pi) :=$ menor dos ângulos $ang(r,s)$ com s uma reta em π.

Seja $\vec{u}$ a projeção ortogonal de $\vec{r}$ ao plano π.

Temos $proj_{\vec{n}}\vec{r} = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$ e $\vec{r} = proj_{\vec{n}}\vec{r} + \vec{u}$.

Portanto $\vec{u} = \vec{r} - \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$

Seja $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ e $\vec{j} = \vec{i} \wedge \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. Os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ são vetores diretores do plano π, são unitários e ortogonais.



Seja s uma reta em π e $\vec{s}$ um vetor diretor de s. Escolhamos $\vec{s}$ unitário

Temos $\vec{s} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$ onde $\alpha = ang(\vec{s},\vec{i})$

e $\vec{r}\cdot\vec{s} = \cos\alpha\,\vec{r}\cdot\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{r}\cdot\vec{j}$

Como $\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{n}$, e $\vec{r}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{n}$, segue que $\vec{j}$ é ortogonal a $\vec{r}$. Portanto $\vec{r}\cdot\vec{j} = 0$,

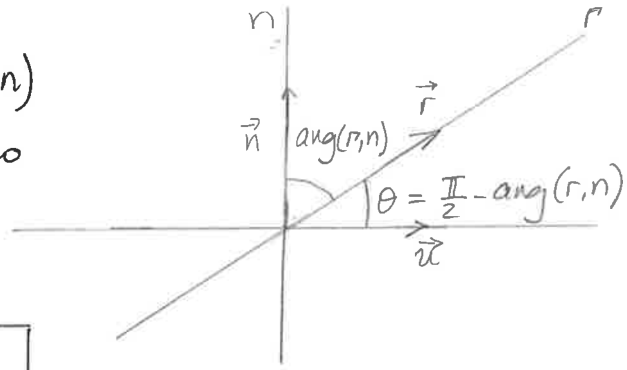
e $\vec{r}\cdot\vec{s} = \cos\alpha\,\vec{r}\cdot\vec{i}$

Temos $\cos(\text{ang}(r,s)) = \dfrac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{s}\|} = \dfrac{|\cos\alpha|\,\cancel{\|\vec{r}\|}\,\|\vec{u}\|}{\cancel{\|\vec{r}\|}\,\|\vec{s}\|} = |\cos\alpha|$ ($\vec{u}, \vec{s}$ são unitários).

Portanto o $\text{ang}(r,s)$ é mínimo se, e somente se, $\alpha = 0$ se, e somente se, s é a projeção ortogonal da reta r sobre o plano Π.

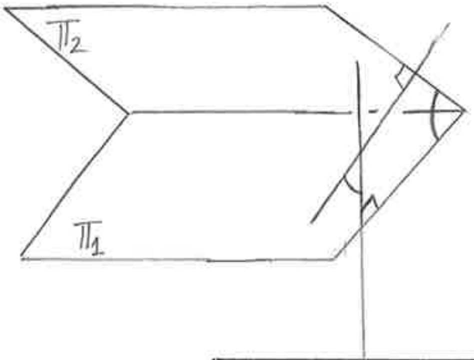
Então $\text{ang}(r,\Pi) = \dfrac{\pi}{2} - \text{ang}(r,n)$

onde n é uma reta ortogonal ao plano Π.



Daí $\boxed{\text{sen}(\text{ang}(r,\Pi)) = \dfrac{|\vec{r}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{n}\|}}$

3. Medida angular entre dois planos



A medida angular entre dois planos Π_1 e Π_2 é a medida angular entre duas retas quaisquer r_1 e r_2 perpendiculares a Π_1 e Π_2 respectivamente.

Temos $\boxed{\cos(\text{ang}(\Pi_1,\Pi_2)) = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}}$

Com $\vec{n_1}$ vetor normal a Π_1 e
$\vec{n_2}$ vetor normal a Π_2.

Exemplo Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema ortogonal de coordenadas.

Sejam $\Pi_1: x - y + z = 20$

$\Pi_2: X = (1,1,-2) + \lambda(0,-1,1) + \mu(1,-3,2),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$

Calcule $\text{ang}(\Pi_1, \Pi_2)$.

Distância

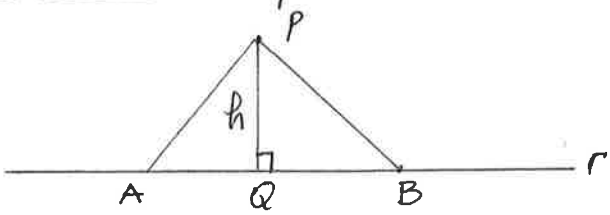
Fixamos um Sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, B)$, com B base positiva.

1. Distância entre dois pontos

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos,

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

2. Distância entre um ponto e uma reta



Denotamos por $d(P,r)$ a distância entre P e r

Definimos $d(P,r) =$ menor das distâncias entre P e os pontos de r

$= d(P,Q)$ onde Q é a projeção ortogonal de P a r.

Vamos Calcular $d(P,r)$. Escolhamos dois pontos distintos da reta r.

Temos área do triângulo $ABP = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2} h \cdot \|\overrightarrow{AB}\|$

onde $h = d(P,Q) = d(P,r)$. Logo

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

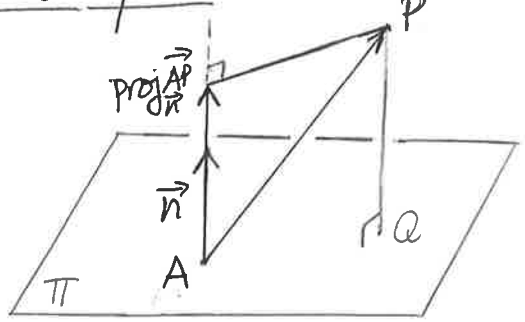
Podemos Substituir $\overrightarrow{AB}$ por um vetor diretor $\vec{r}$ da reta r, e obtemos

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}}$$

Exemplo Calcule a distância entre $P = (1,-1,4)$ e

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1-z}{2}.$$

3. Distância de ponto a plano



Seja Π um plano e $\vec{n}$ um vetor normal a Π.

Denotamos por $d(P,\Pi)$ a distância de P a Π.

Definimos $d(P,\Pi) =$ o menor das distâncias entre P e os pontos de P
$= d(P,Q)$ onde Q é a projeção ortogonal de P a Π.

Temos
$$\begin{aligned} d(P,\Pi) &= d(P,Q) \\ &= \|\vec{PQ}\| \\ &= \|\text{proj}_{\vec{n}}\vec{AP}\| \end{aligned}$$
onde A é um ponto qualquer do plano Π.
$$= \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\boxed{d(P,\Pi) = \frac{|\vec{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Suponha que Π é dado por uma equação geral
$$ax+by+cz+d=0$$
e $P=(x_0,y_0,z_0)$, $A=(x_1,y_1,z_1)$. Então $\vec{AP}=(x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$
$\vec{n}=(a,b,c)$.

Temos
$$\begin{aligned} \vec{AP}\cdot\vec{n} &= a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1) \\ &= ax_0+by_0+cz_0 \underbrace{-ax_1-by_1-cz_1}_{=d} \\ &= ax_0+by_0+cz_0+d. \end{aligned}$$

Logo
$$\boxed{d(P,\Pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Exemplo

Calcule a distância de $P=(9,2,-2)$ a $\pi: X=(6,-5,0)+\lambda(0,\frac{5}{12},1)+\mu(1,0,0)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

4. Distância entre retas

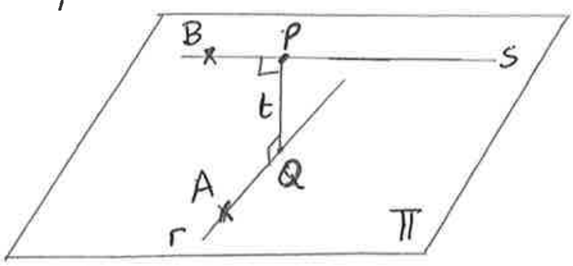
Sejam r e s duas retas. Denote por $d(r,s)$ a distância entre r e s.

Definimos $d(r,s)=$ o menor das distâncias entre pontos A de r e pontos B de s.

Então $d(r,s)=0$ se r e s são concorrentes ou são paralelas identicas

$d(r,s)=d(A,s)=d(B,r)$ se r e s são paralelas distintas.

Suponha agora que r e s são reversas.



Seja π o plano que contém a reta r e é paralelo a reta s.
Seja t uma reta perpendicular a r e s. Então

$$d(r,s)=d(P,Q)$$

Sejam A um ponto qualquer de r e B um ponto qualquer de s.
Sejam $\vec{r}$ um vetor diretor de r e $\vec{s}$ um vetor diretor de s.
O vetor $\vec{r}\wedge\vec{s}$ é um vetor normal de π. Temos

$$d(r,s)=d(P,Q)=d(B,\pi)=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{r}\wedge\vec{s}|}{\|\vec{r}\wedge\vec{s}\|}$$

$$\boxed{d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{r}\wedge\vec{s}|}{\|\vec{r}\wedge\vec{s}\|}}$$

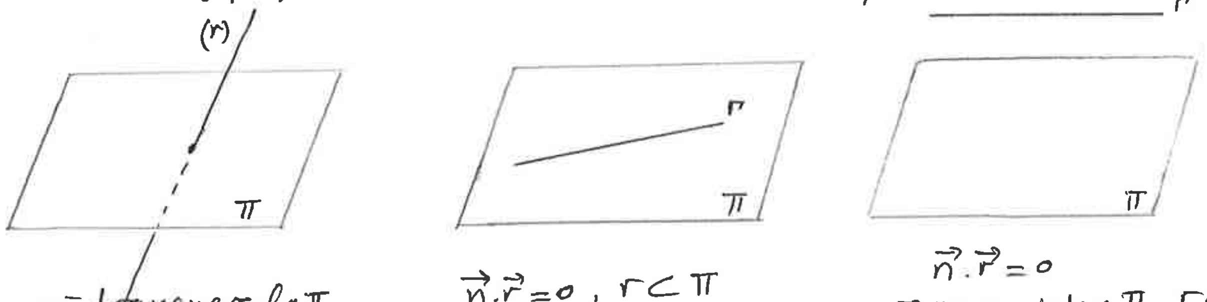
Exemplo Calcule a distância entre

$r: X = (2,1,0) + \lambda(1,-1,1)$ e $s: x+y+z = 2x-y-1 = 0$.

5. Distância entre reta e plano

Definimos a distância $d(r,\pi)$ entre a reta r e o plano π como

$d(r,\pi) =$ menor das distâncias entre ponto A de r e B de π



$\vec{n}\cdot\vec{r} \neq 0$ r é transversal a π

$d(r,\pi) = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{r} = 0$, $r \subset \pi$

$d(r,\pi) = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{r} = 0$

$\vec{r}$ é paralela a π, $r \not\subset \pi$

$d(r,\pi) = d(P,\pi)$, $P \in r$.

6. Distância entre planos

Definimos, de uma maneira análoga ao item 5 acima, a distância entre dois planos Π_1 e Π_2. Temos

$d(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ se Π_1, Π_2 são transversais ou idênticos

$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P, \Pi_2) = d(Q, \Pi_1)$, $\forall P \in \Pi_1$ e $\forall Q \in Q_2$ se Π_1 e Π_2 são paralelo distintos.

Exemplo $\Sigma = (0, B)$ sistema ort. coord, B base positiva.

Seja $A = (0,2,1)$ e $r: (x,y,z) = (0,2,-2) + \lambda(1,-1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obtenha os ponto da reta r que distam $\sqrt{3}$ do ponto A. A distância de A a r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Porque?

Um ponto P da reta r tem coordenadas (x,y,z) com $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$

Portanto $d(A,P)^2 = \lambda^2 + (2-2+\lambda)^2 + (1+2-2\lambda)^2$

$= 6\lambda^2 - 12\lambda + 9$

Temos $d(A,P) = \sqrt{3} \iff d(A,P)^2 = 3 \iff 6\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 3 \iff 6\lambda^2 - 12\lambda + 6 = 0 \iff (\lambda-1)^2 = 0$

$\iff \lambda = 1$

O único ponto de r que dista $\sqrt{3}$ de A é o ponto $P = (1,1,0)$.

Como o ponto é único, $d(A,r) = \sqrt{3}$ (Detalhe este argumento!)

Exemplos $\Sigma = (O, B)$ sistema ortogonal de coordenadas com B base positiva

1. Obtenha os pontos da reta $r: x - y = 2y = z$ que equidistam de $A = (1,1,0)$ e $B = (0,1,1)$.

2. Obtenha os pontos da reta $r: X = (0,1,1) + \lambda(1,1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ que equidistam dos planos $\pi_1: x + 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2: x - y + 2z = 1$.

3. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1,1,1)$ e $B = (0,2,1)$ e equidista dos pontos $C = (2,3,0)$ e $D = (0,1,2)$.

Mudança de Sistema de Coordenadas

A nossa escolha de um sistema de coordenadas é arbitrária.
Como passar das coordenadas de um ponto X em $\mathbb{E}^3$ em um sitema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas?

Seja $\Sigma_1 = (O_1, E)$ um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e seja
$\Sigma_2 = (O_2, F)$ um novo sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$.

Suponha que $O_2 = (h, k, \ell)_{\Sigma_1}$ e denote por M_{EF} a matriz de mudança da base E para F.

Um ponto $X \in \mathbb{E}^3$ tem coordenadas $X = (x, y, z)_{\Sigma_1}$ e coordenadas $X = (u, v, w)_{\Sigma_2}$.

Por definição,

$$X = (x,y,z)_{\Sigma_1} \iff \overrightarrow{O_1X} = (x,y,z)_E$$
$$X = (u,v,w)_{\Sigma_2} \iff \overrightarrow{O_2X} = (u,v,w)_F$$
$$O_2 = (h,k,\ell)_{\Sigma_1} \iff \overrightarrow{O_1O_2} = (h,k,\ell)_E$$

Decorre

$$\overrightarrow{O_2X} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1X} = \overrightarrow{O_1X} - \overrightarrow{O_1O_2} = (x-h, y-k, z-\ell)_E$$

Aplicando a formula de mudança de base a $\overrightarrow{O_2X}$ obtemos

$$\begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-\ell \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F$$

Portanto, $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix} + M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Escrevendo

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

obtemos as chamadas equaçõs de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2:

$$\begin{cases} x = h + a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \\ y = k + a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w \\ z = l + a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w \end{cases}$$

<u>Observação</u>

Temos $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F = M_{EF}^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}_E = M_{FE} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}$ e isso nos permite obter as equações de mudança de coordenadas de Σ_2 para Σ_1.

<u>Exemplo</u>

Sejam $\Sigma_1 = (O_1, (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}))$ e $\Sigma_2 = (O_2, (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}))$ dois sistemas de coordenadas com $O_2 = (1,0,0)_{\Sigma_1}$, $\vec{f_1} = \vec{e_1}$, $\vec{f_2} = -\vec{e_3}$, $\vec{f_3} = \vec{e_2}$

Obtenha, em relação a Σ_2,

(a) uma equação vetorial da reta $r: [X = (0,0,0) + \lambda(0,1,-1)]_{\Sigma_1}$

(b) uma equação geral do plano $\pi: [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$

<u>Solução</u>

Temos $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, portanto as equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 são

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = w \\ z = -v \end{cases}$$

(a) As equações paramétricas no sistema Σ_1 da reta r são $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Equivalentemente $r: \begin{cases} 1 + u = 0 \\ w = \lambda \\ -v = -\lambda \end{cases}$

Ou seja as equações paramétricas da reta r no sistema Σ_2 são

$$r: \begin{cases} u = -1 \\ v = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}. \\ w = \lambda \end{cases}$$

Uma equação vetorial de r no sistema Σ_2 é

$$r: [X = (-1,0,0) + \lambda(0,1,1)]_{\Sigma_2}$$

(b) Substituindo x, y, z pelas suas expressões em termo de u, v, w, obtemos

$$2(1+u) - (w) + (-v) = 0 \iff 2u - v - w + 2 = 0$$

Então $\Pi : [2u - v - w + 2 = 0]_{\Sigma_2}$.

Translação

Se as bases dos sistemas $\Sigma_1 = (O_1, E)$ e $\Sigma_2 = (O_2, E)$ são iguais, diremos que Σ_2 é obtido pela translação de Σ_1 para o ponto O_2.

Como $M_{EE} = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, as equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2 ficam

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = l + w \end{cases}$$

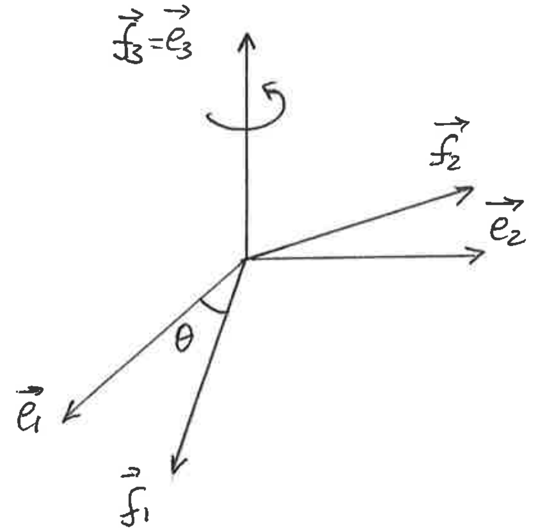
onde $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

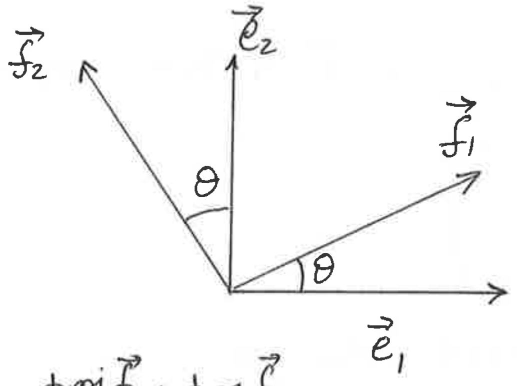
Rotação

Vamos tratar do caso onde as base são ortonormais.

Suponha que $\Sigma_1 = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2 = (O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ são dois sistemas de coordenadas com a mesma origem O.

Vamos fixar $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$ e supor que $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_2$ são obtidos "girando" a base E em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ.





Temos
$$\vec{f}_1 = \text{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_1 + \text{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_2$$
$$= \frac{\vec{f}_1\cdot\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 + \frac{\vec{f}_1\cdot\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|^2}\vec{e}_2$$
$$= (\vec{f}_1\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{f}_1\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2$$
$$= \cos\theta\,\vec{e}_1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{e}_2$$
$$= \cos\theta\,\vec{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_2$$

Similarmente,
$$\vec{f}_2 = (\vec{f}_2\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{f}_2\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2 = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2$$

Portanto
$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e as equações de mudança de coordenadas são
$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \\ z = w \end{cases}$$

Observações

1. Mantendo $\vec{e}_1$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

   e mantendo $\vec{e}_2$ fixo
$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. No plano, as equações de mudanca de coordenadas por translação são $\begin{cases} x = h+u \\ y = k+v \end{cases}$ e por rotação $\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{cases}$

Cônicas

Até agora estudamos lugares geométricos de pontos no espaço $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas, em relação a um sistema de coordenadas, satisfazem equações de primeiro grau (exemplo, equação de um plano, equações da reta na forma planar). Vamos estudar agora lugares geométricos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação de grau dois. Começamos com lugares geométricos em um plano (cônicas) e em seguida no espaço (quádricas).

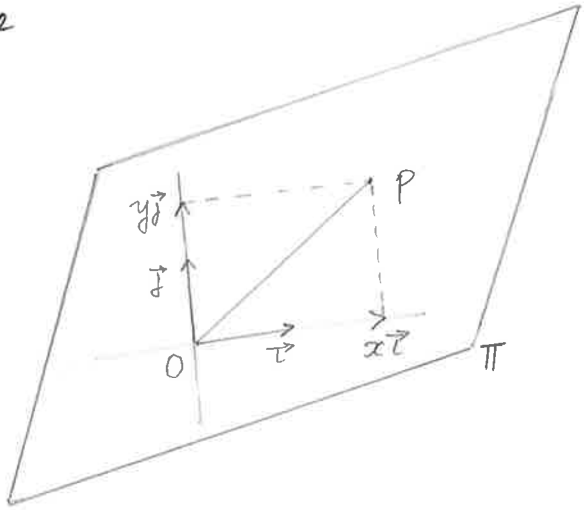
Seja π um plano em $\mathbb{E}^3$, e sejam $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ dois vetores diretores de π com $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1$ e $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=0$.

Seja O um ponto do plano π.

Um ponto P do espaço pertence ao plano π se, e somente se, existem escalares x, y tal que

$\vec{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

Chamamos $\Sigma = (O, B)$ de sistema de coordenadas em π de origem O e base B. As coordenadas de um ponto P em π são as coordenadas do vetor $\vec{OP}$ na base B, ou seja $P = (x, y)_\Sigma$.



Observe que a base B não precisa ser ortonormal, mas sabemos que é bom escolher uma base ortonormal para poder calcular o produto escalar, norma de vetores, distância entre pontos etc.

Observe também que podemos escolher $(O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}))$ como um sistema de coordenadas em $\mathbb{E}^3$, e em relação a este sistema, π tem uma equação geral $z=0$ e seus pontos tem coordenadas da forma $(x, y, 0)$.

Elipse, hipérbole, parábola

Seja Π um plano em $\mathbb{E}^3$.

Ⓐ Elipse

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos do plano Π, $2c$ sua distância e a um número real tal que $a > c$.

O lugar geométrico dos pontos X do plano Π tais que

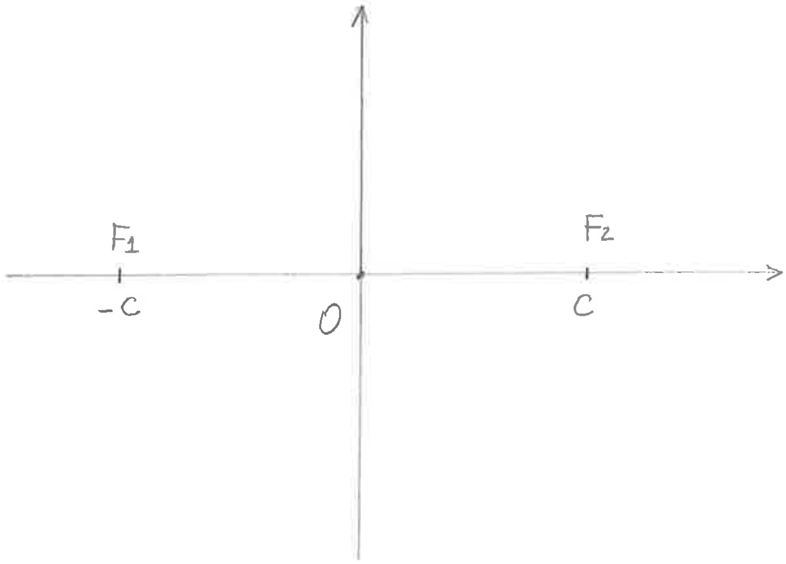
$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

chama-se <u>elipse</u>.

Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado <u>foco</u> da elipse, o segmento F_1F_2 é chamado <u>segmento focal</u>, seu ponto médio, <u>centro</u> da elipse, e $2c$, <u>distância focal</u>.

A reta F_1F_2 chama-se <u>reta focal</u>.

Seja $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ um sistema ortogonal de coordenadas em Π tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$



Temos, em relação ao sistema Σ,

$$X=(x,y)\in \text{Elipse} \iff d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a$$
$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Precisamos tomar cuidado aqui: $A=B \Rightarrow A^2=B^2$, mas $A^2=B^2 \Rightarrow A=B$ ou $A=-B$, então $A=B$ não é equivalente a $A^2=B^2$.

Logo

$$X=(x,y)\in \text{Elipse} \Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$
$$\Rightarrow a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$
$$\Rightarrow a^2(x^2-2\cancel{c}x+c^2+y^2)=a^4-2a^2\cancel{c}x+c^2x^2$$
$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Como $a>c$, segue que $a^2-c^2>0$. Então existe um número real positivo b tal que $a^2-c^2=b^2$.

Logo

$$X=(x,y)\in \text{Elipse} \Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2, obtemos

$$X=(x,y)\in \text{Elipse} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Vamos mostrar que a recíproca vale, ou seja, se

$$X=(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longrightarrow X\in \text{Elipse}.$$

Temos $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$ (*)

Precisamos mostrar que $d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a$.

Temos

$$
\begin{aligned}
(d(X,F_1))^2 &= (x+c)^2+y^2\\
&= x^2+2cx+c^2+y^2\\
&= x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2 \quad (\text{usando } (*))\\
&= \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+c^2+b^2\\
&= \frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2 \quad (\text{usando } a^2-c^2=b^2)\\
&= \left(\frac{c}{a}x+a\right)^2
\end{aligned}
$$

Podemos mostrar, da mesma maneira, que

$$(d(X,F_2))^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2.$$

Portanto $d(X,F_1)=\left|\frac{c}{a}x+a\right|$ e $d(X,F_2)=\left|\frac{c}{a}x-a\right|$.

Como $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, segue que $\dfrac{x^2}{a^2}\leq 1$, o que implica que $\left|\dfrac{x}{a}\right|\leq 1$.

Como $a>0$ então $\dfrac{|x|}{a}\leq 1$.

Agora $c>0$, então $c\dfrac{|x|}{a}\leq c<a$. Logo $\dfrac{c}{a}|x|<a \Rightarrow -a<\dfrac{c}{a}x<a$

Portanto $\dfrac{c}{a}x+a>0$ e $\dfrac{c}{a}x-a<0$.

Daí,
$$\left.\begin{aligned} d(X,F_1)&=\frac{c}{a}x+a\\ d(X,F_2)&=-\frac{c}{a}x+a\end{aligned}\right\} \Rightarrow d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a.$$

Acabamos de mostrar que

$$\boxed{X=(x,y)\in \text{Elipse} \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \quad c^2+b^2=a^2,\ a>b>0$$
$$a>c>0$$

A equação acima chama-se equação reduzida da elipse.

Um resultado que segue das contas anteriores é o seguinte.

Proposição

Um ponto $X=(x,y)$ é um ponto da elipse de equação reduzida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se, e somente se, as distâncias aos focos F_1 e F_2 são

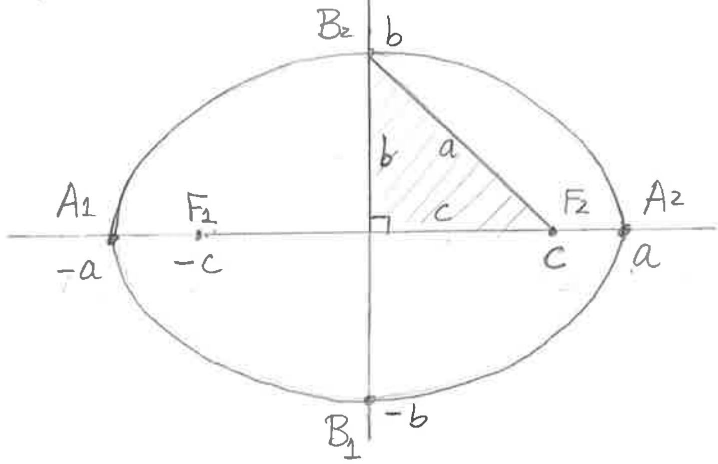
$$d(X,F_1)=a+\frac{c}{a}x \quad e \quad d(X,F_2)=a-\frac{c}{a}x. \qquad \blacksquare$$

Observe que os pontos

$A_1=(a,0)$, $A_2=(-a,0)$, $B_1=(0,-b)$, $B_2=(0,b)$ pertencem a elipse de equação reduzida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Estes pontos são os vértices da elipse.

As cordas A_1A_2 e B_1B_2 são, respectivamente, o eixo maior e o eixo menor da elipse.

A amplitude focal é o comprimento de uma corda que contem um foco e é perpendicular ao segmento focal.



Observação

Podemos escolher um sistema ortogonal de coordenadas com $F_1=(0,-c)$ e $F_2=(0,c)$. Neste caso haverá uma inversão de papeis entre x e y e chegaremos a seguinte equação reduzida da elipse $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Proposição

Uma equação da forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$$

descreve uma elipse em relação a um sistema ortogonal de coordenadas Σ se, e somente se, os números p e q são positivos e distintos.

Exemplos

1. Seja $4x^2 + 169y^2 = 676$ uma equação de uma elipse (em relação a um sistema ortogonal de coordenadas).
Calcule a distância focal, a medida do eixo maior e a medida do eixo menor da elipse.

2. Prove que os focos e o centro da elipse não pertencem a elipse.

3. Prove que se PQ é uma corda qualquer da elipse, então $d(P,Q) \leq 2a$.

(B) Hipérbole

Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de um plano Π, $2c$, sua distância, e a um número real tal que $0<a<c$. O lugar geométrico dos pontos X do plano Π tais que

$$|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=2a$$

chama-se hipérbole. Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado foco da hipérbole, e o segmento F_1F_2 é chamado segmento focal, seu ponto médio, centro da hipébole, e $2c$, distância focal. A reta F_1F_2 chama-se reta focal.

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual $F_1=(-c,0)$ e $F_2=(c,0)$.

Então $X=(x,y)\in$ hipérbole $\iff d(X,F_1)-d(X,F_2)=\pm 2a$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Podemos provar, fazendo contas similares ao caso da elipse, que

$$\boxed{X=(x,y)\in \text{hipébole} \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}, \quad a^2+b^2=c^2, \quad c>b>0, \quad c>a>0$$

A equação acima chama-se equação reduzida da hipébole

Os pontos $A_1=(-a,0)$ e $A_2=(a,0)$ pertencem a hipébole e são chamados vértices (são os pontos em que a reta focal intercepta a hipérbole).

Vamos fazer um esboço da hipérbole.

Observe que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$

$$\iff y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Portanto a hipérbole é união dos gráficos das funções

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \quad e \quad y=-\sqrt{x^2-a^2}.$$

Vamos consider a função $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ (o gráfico de $y=-\sqrt{x^2-a^2}$ é simétrico ao gráfico de $y=b/a\sqrt{x^2-a^2}$ com respeito ao eixo x).

O domínio de definição de $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ é

$$\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-a^2\geqslant 0\}=]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$$

Temos $y'=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, portanto a função é crescente em $]a,+\infty[$ e é decrescente em $]-\infty,-a[$; não tem derivada nos pontos $x=-a$ e $x=a$.

Para analizar o comportamento da função em $\pm\infty$, observe que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{\frac{b}{a}x}=1 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{-\frac{b}{a}x}=1,$$

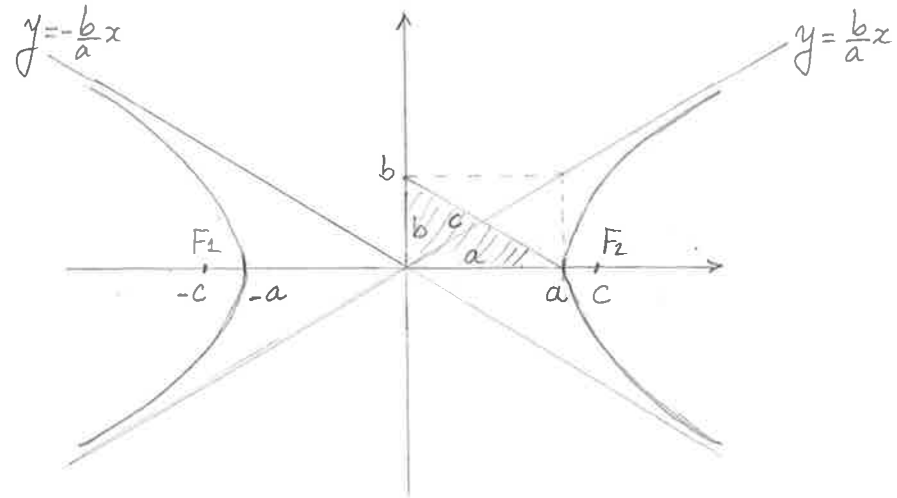
Ou seja, as retas $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$ são <u>retas</u> <u>assíntotas</u> da hipérbole (por simetrca, elas são assintótas de $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$).

Observe que

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\frac{b}{a}x \quad \text{se } x>0$$

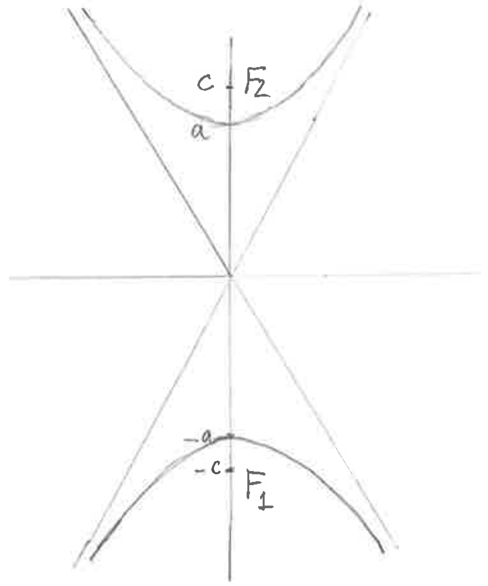
$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<-\frac{b}{a}x \quad \text{se } x<0$$

Podemos juntar as informaçõs acima para obter o seguinte esboço da hipérbole



Podemos ter escolhido um sistema de coordenada em relação ao qual $F_1=(0,-c)$ e $F_2=(0,c)$. Neste caso a equação reduzida da hipérbole é $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

As assíntotas são dadas por $y=\frac{a}{b}x$ e $y=-\frac{a}{b}x$



Proposição

Uma equação da forma $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$ descreve uma hipérbole em relação a um sistema ortogonal de coordenadas Σ se, e somente se, os números p e q são de sinal contrário.

Exemplo

1. Escreva as coordenadas dos vértices e dos focos da hipérbole
$$25x^2 - 144y^2 = 9.$$
Obtenha as equações das assíntotas e faça um esboço da hipérbole.

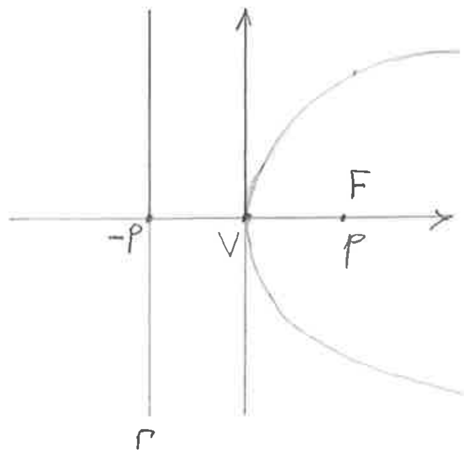
(C) Parábola

Seja r uma reta de um plano Π e F um ponto no plano Π não pertencente a reta r. O lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e r chama-se parábola. F é o foco, r é a diretriz.
O número positivo p tal que $d(F,r) = 2p$ chama-se parâmetro da parábola. A reta que contem o foco F e é perpendicular a diretriz r chama-se eixo da parábola.
O vértice da parábola é o ponto da sua interseção com o eixo.

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas com origem o vértice da parábola e tal que o foco F pertença ao semi-eixo positivo x. Em relação a este sistema, $F = (p,0)$ e $r: x = -p$.

Temos

$$X=(x,y) \in \text{Parábola} \Leftrightarrow d(X,r) = d(X,F)$$
$$\Leftrightarrow |x+p| = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow (x+p)^2 = (x-p)^2+y^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2xp+\cancel{p^2} = \cancel{x^2}-2xp+\cancel{p^2}+y^2$$



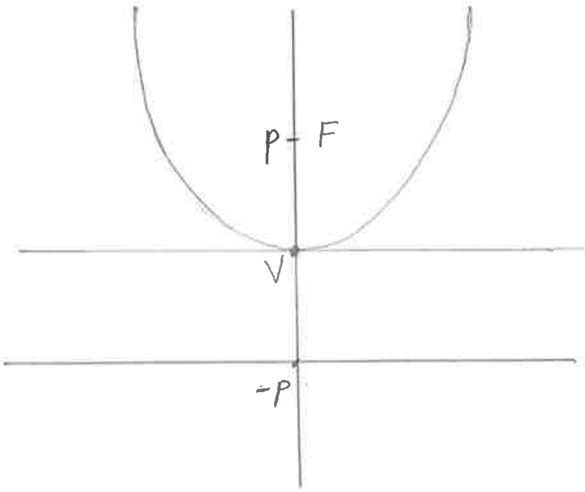
$$\boxed{X=(x,y) \in \text{Parábola} \Leftrightarrow y^2 = 4px}$$

A equação acima chama-se equação reduzida da parábola.

Podemos escolher um sistema de coordenadas tal que o foco F pertença ao semi-eixo positivo y. Neste caso $F=(0,p)$ e $r: \; y=-p$.

A equação reduzida da parábola torna-se

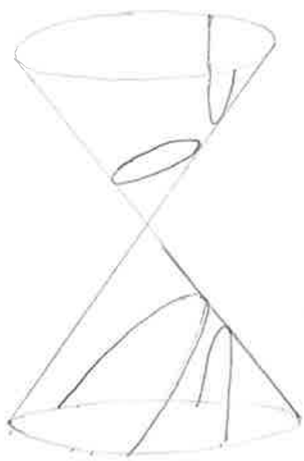
$$x^2=4py$$



<u>Proposição</u> As equações da forma $y^2=qx$ e $x^2=qy$ descrevem parábola em relação a um sistema ortogonal de coordenadas se, e somente se, $q\neq 0$.

<u>Observação</u> (seções cônicas)

A elipse, hipérbole e parábola podem ser realizadas como seções de um cône, ou seja como o lugar geométrico da interseção de um cône com um plano.



Excentricidade

(A) Elipse

A razão $\frac{b}{a}$ de uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ indica a "forma" da elipse. Se $\frac{b}{a}$ é próximo de 1, então a elipse parece um círculo. Podemos usar também a razão $\frac{c}{a}$.

Observe que

$$c^2+b^2=a^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=1,$$

então as razões $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ são complementares:

$$\frac{b}{a} \text{ é próximo de } 0 \iff \frac{c}{a} \text{ é próximo de } 1$$

$$\frac{b}{a} \text{ é próximo de } 1 \iff \frac{c}{a} \text{ é próximo de } 0$$

A razão $e=\frac{c}{a}$ chama-se excentricidade da elipse

A razão $\frac{b}{a}$ chama-se centralidade da elipse.

Observações

(1) $0<e<1$

(2) $e(\text{círculo})=0$

Dizemos que duas elipse são semelhantes se suas excentricidades são iguais.

(B) Hipérbole

A posição da hipérbole em relação as suas assíntotas determina a "forma" da hipérbole. A inclinação das assíntotas é determinada por $\frac{b}{a}$.

Aqui temos $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$

A excentricidade da hipérbole é a razão $e=\frac{c}{a}$.

Observe que $e>1$.

(C) Parábola

Todas as parábolas tem a mesma excentricidade $e=1$.

(Para ver isto, precisa redefinir a elipse/hipérbole usando distância a uma reta e um foco. Ver Camargo & Boulos Capítulo 22, §6.)

Cônicas

Vimos que as equações reduzidas da elipse, hipérbole e parábola são equações de grau dois em x e y.
Tais equações são casos particulares de equações de grau dois geral.

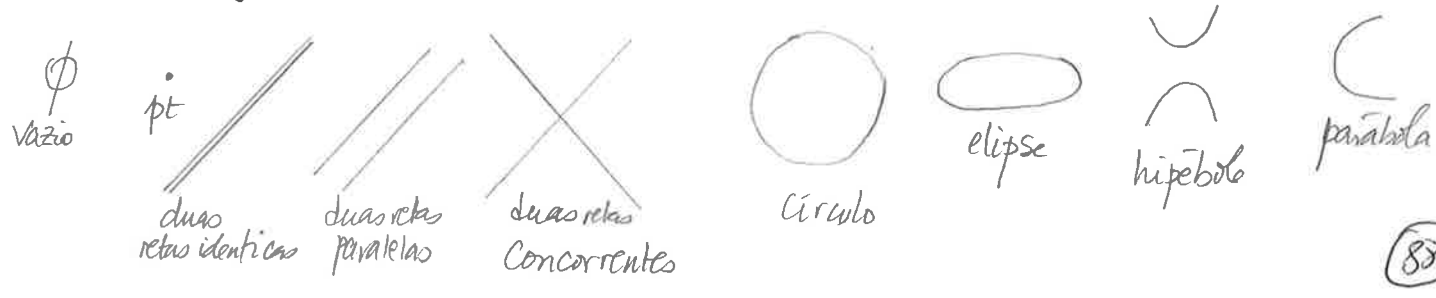
Definição:
Seja $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas em um plano Π.
Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ no plano Π que satisfazem uma equação de segundo grau $g(x,y) = 0$, com

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad , \quad a \neq 0, b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0.$$

Os termos ax^2, bxy e cy^2 são os termos quadráticos.
O termo bxy chama-se termo quadrático misto.
Os termos dx e ey são os termos lineares e f é o termo independente.

Exemplos de cônicas

- $x^2 + y^2 + 1 = 0$: conjunto vazio
- $x^2 + y^2 = 0$: ponto
- $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, i.e., $(x+y)^2 = 0$: duas retas identicas
- $(x+y)(x+y+1) = 0$: duas retas paralelas
- $(x+y)(x-y) = 0$: duas retas concorrentes
- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$: círculo
- $2x^2 + y^2 - 1 = 0$: elipse
- $x^2 - y^2 - 1 = 0$: hipérbole
- $x - y^2 = 0$: parábola



Observação

Podemos mostrar que a lista dos exemplos anteriores esgota as possibilidades das cônicas (ver Camargo & Boulos por uma demonstração).

O nosso objetivo é identificar e fazer o esboço de uma cônica com uma equação dada. Para isso, vamos fazer mudanças do sistema de coordenadas que não mudam a geometria da cônica para reduzir a equação da cônica a uma forma mais simples.

As mudanças que podemos fazer são: translações, rotações e reflexões.

Associamos ao polinômio $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ a seguinte matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \quad \text{chamada de matriz de } g.$$

Exercício

Mostre que $g(x,y) = X^T M X$, onde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Translação e eliminação dos termos lineares

Seja $O' = (h,k)_\Sigma$ um ponto do plano Π. Seja $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ o sistema de coordenadas obtido pela translação de $\Sigma = \Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ para O'. Se $P = (x,y)_{\Sigma_1} = (u,v)_{\Sigma_2}$, então

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$

Vamos estudar os efeitos da translação no polinômio $g(x,y)$.

Seja $\bar{g}(u,v) = g(u+h, v+k)$ obtida substituído x por $u+h$ e y por $v+k$.

Temos

$$\bar{g}(u,v) = a(u+h)^2 + b(v+k)(u+h) + c(v+k)^2 + d(u+h) + e(v+k) + f$$
$$= au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$$
$$= au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + g(h,k).$$

Queremos eliminar os termos lineares em $\bar{g}$, para isso vamos procurar h e k tais que

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

Temos um sistema linear de duas equações a duas incógnitas h e k.

Se $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$ o sistema tem uma solução única

Se $ac - \frac{b^2}{4} = 0$ o sistema pode ter infinitas soluções ou ser incompatível.

Suponha que $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$ e seja (h,k) a solução do sistema. Então

$$g(h,k) = ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f$$
$$= h\underbrace{\cancel{\left(ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2}\right)}}_{0} + k\underbrace{\cancel{\left(\frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2}\right)}}_{0} + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$$
$$= \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f.$$

Portanto

$$\boxed{\bar{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f.}$$

Resumindo

Passo 1:

Escrevemos a matriz de g

$$M = \left(\begin{array}{cc:c} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \hdashline \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array}\right)$$

Passo 2 Calculamos $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4}$

Passo 3

Se $ac - \frac{b^2}{4} \neq 0$ existe uma única translação para o ponto $O' = (h,k)$ que elimina os termos lineares em $\bar{g}$. Os escalares h e k são soluções do sistema linear obtido a partir das primeiras duas linhas da matriz M:

$$\begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

Passo 4 A equação $\bar{g}(u,v) = 0$ no novo sistema de coordenadas tem as seguintes propriedades:

(a) os termos lineares são nulos

(b) os coeficientes dos termos quadráticos são os mesmos em $\bar{g}(u,v)$ e $g(x,y)$

(c) O termo independente em $\bar{g}(u,v)$ é obtido a partir da última linha da matriz M e é dado por

$$g(h,k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$$

onde (h,k) é a solução única do sistema no passo 3.

Exemplo

Usando uma translação, procure transformar $g(x,y)=x^2+y^2-6x-5y+14$ de modo que os coeficientes dos termos lineares passem a ser nulos.

Definição

Um ponto C é <u>centro</u> de uma cônica não vazia se, para todo ponto P que pertence à cônica, o simétrico de P em relação a C também pertence.

Seja $g(x,y)=0$ a equação de uma cônica. Se g não contém termos lineares, então $g(-x,-y)=a(-x)^2+b(-x)(-y)+c(-y)^2+f=g(x,y)$, ou seja $C=O=(0,0)$ é centro da cônica.

Suponha que a cônica tem centro $C=(h,k)$. Fazendo uma translação para C obtemos um novo polinômio $\bar{g}$ com $\bar{g}(u,-v)=g(u,v)$. Isto implica que os termos lineares de $\bar{g}$ são nulos. Portanto (h,k) é solução do sistema

$$(*)\quad \begin{cases} ah+\frac{b}{2}k+\frac{d}{2}=0 \\ \frac{b}{2}h+ck+\frac{e}{2}=0 \end{cases}$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição

$C=(h,k)$ é centro de uma cônica não vazia de equação $g(x,y)=0$ se, e somente se, (h,k) é solução do sistema $(*)$

Analizando as figuras na página 88, obtemos o seguinte grupamento:

Cônicas com Centro único	$ac-\frac{b^2}{4}\neq 0$	ponto, círculo, elipse, hipérbole união de duas retas concorrentes
Cônicas com infinitos centros	$ac-\frac{b^2}{4}=0$	duas retas paralelas ou idênticas ($(*)$ é indeterminado)
Cônicas que não possuem centro	$ac-\frac{b^2}{4}=0$	parábola ($(*)$ é incompatível)

2. Rotação e eliminação do termo quadrático misto

Seja Σ_2 um sistema de coordenadas obtido de Σ_1 (sistema ortonormal inicial de um plano Π) por rotação θ em sentido anti-horário.

Se P é um ponto do plano Π com $P=(x,y)_{\Sigma_1}$ e $P=(u,v)_{\Sigma_2}$, então

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ou seja
$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

Vamos ver como esta rotação afeta um polinômio $g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$.

Denotamos por $\bar{g}(u,v)=g(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta,\ u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta)$. Temos,

$$\begin{aligned}\bar{g}(u,v) &= a(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta)(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta) + c(u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta)^2 \\ &\quad + d(u\cos\theta - v\operatorname{sen}\theta) + e(u\operatorname{sen}\theta - v\cos\theta) + f \\ &= a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f'\end{aligned}$$

Com
$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c\operatorname{sen}^2\theta \\ b' &= -2a\cos\theta\operatorname{sen}\theta + b(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2c\operatorname{sen}\theta\cos\theta = (c-a)\operatorname{sen}2\theta + b\cos 2\theta \\ c' &= a\operatorname{sen}^2\theta - b\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\ d' &= d\cos\theta + e\operatorname{sen}\theta \\ e' &= -d\operatorname{sen}\theta + e\cos\theta \\ f' &= f \end{aligned}$$

Observações

1. Se $d=e=0$, então $d'=e'=0$, ou seja as rotações não criam novos termos lineares
2. $f'=f$, ou seja as rotações não alteram o termo independente
3. Observe que $\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ onde $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz da rotação.

Queremos eliminar o termo quadrático misto, por isso vamos procurar θ de modo que $b'=0$

Se $b=0$, y não possui termo quadrático misto, então não precisamos fazer uma rotação do sistema de coordenadas.

Suponha que $b\neq 0$. Então

$$b'=0 \iff (c-a)\operatorname{sen}\theta + b\cos 2\theta = 0$$

$$\iff \operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b}$$

A equação $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b}$ em θ sempre tem soluções. Logo, é sempre possível, por uma rotação conveniente, eliminar o termo quadrático misto.

Escolhamos uma solução de $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{a-c}{b}$ com $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

É possível simplificar o cálculo de a' e c' para tal rotação

Observamos que

$$a'+c' = a+c$$

$$a'-c' = a(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2b\cos\theta\operatorname{sen}\theta + c(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$= (a-c)\cos 2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta$$

Como $\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{a-c}{b}$, $a-c = b\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$, Logo

$$a'-c' = b\,\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}\cos 2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta = \frac{b(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta)}{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{b}{\operatorname{sen} 2\theta}$$

Pela nossa escolha de $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2\theta} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta}{\operatorname{sen}^2 2\theta}} = \sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2}$$

Portanto, a' e c' são soluções do sistema

$$\begin{cases} a'+c' = a+c \\ a'-c' = b\sqrt{1+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2} \end{cases}$$

Resumindo

Se $b \neq 0$, é sempre possível transformar, por meio de uma rotação de ângulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, o polinômio de grau dois $g(x,y)$ em

$$\bar{g}(u,v) = a'u^2 + b'v^2 + d'u + e'v + f'$$

Com

- $\cot g\, 2\theta = \dfrac{a-c}{b}$

- $\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = b\sqrt{1 + \left(\frac{a-c}{b}\right)^2} \end{cases}$

- $\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

- $f' = f$.

Observação

A idéia é eliminar o termo quadrático misto utilizando uma rotação e tentar eliminar os termos lineares por uma translação. Como as rotações não criam novos termos lineares é melhor começar pela translação.

Exemplo

Identifique e esboce a cônica de equação

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$$

Solução

Seguindo as dicas na página 91, começamos escrevendo a matriz do polinômio da cônica. Temos

$$M = \left(\begin{array}{cc:c} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 7 & 3 \\ \hdashline 6 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

Temos $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 4 = 24 \neq 0$,

portanto existe uma única translação para o ponto $C = (h, k)$ que elimina os termos lineares, e (h, k) é solução do sistema

$$\begin{cases} 4h - 2k + 6 = 0 \\ -2h + 7k + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $h = -2$ e $k = -1$.

O novo termo independente é igual a $6(-2) + 3(-1) - 9 = -24$.

Como a translação não altera os coeficientes do termo quadrático, a nova equação da cônica é

$$4u^2 - 4uv + 7v^2 - 24 = 0.$$

Vamos fazer uma rotação de ângulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ para eliminar o termo quadrático misto $-4uv$, com

$$\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{4-7}{-4} = \frac{3}{4}$$

O sistema na página 95 fica

$$\begin{cases} a' + c' = 4 + 7 = 11 \\ a' - c' = (-4)\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -5 \end{cases}$$

Portanto $a' = 3$ e $c' = 8$. A equação da cônica, em relação ao terceiro sistema de coordenadas, é

$$3t^2 + 8w^2 - 24 = 0,$$

equivalentemente,

$$\frac{t^2}{8} + \frac{w^2}{3} = 1$$

Portanto, a cônica é uma elipse.

Temos $\cot g 2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow tg 2\theta = \frac{4}{3}$.

Usando $tg 2\theta = \frac{2 tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{4}{3}$ obtemos $2tg^2\theta + 3tg\theta - 2 = 0$,

ou seja $tg\theta = -2$ ou $tg\theta = \frac{1}{2}$. Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $tg\theta = \frac{1}{2}$.

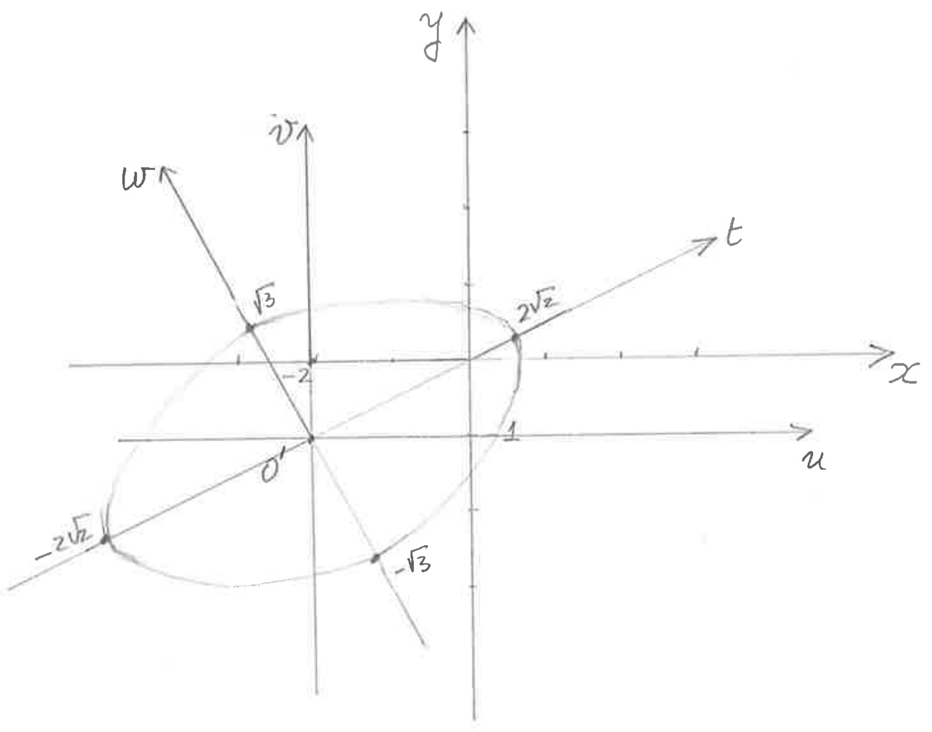
Podemos agora fazer o esboço da elipse:

O sistema de coordenadas inicial é $\Sigma_1 = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ com $P = (x, y)$

A translação é para o ponto $O' = (-2, -1)_{\Sigma_1}$ e o novo sistema é $\Sigma_2 = (O', (\vec{i}, \vec{j}))$. Denotamos $P = (u, v)_{\Sigma_2}$.

O novíssimo sistema de coordenadas $\Sigma_3 = (O', (\vec{e_1}, \vec{e_2}))$ é obtido pela rotação de ângulo $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, com $tg\theta = \frac{1}{2}$. Denotamos $P = (t, w)_{\Sigma_2}$

(Observe que o eixo t contem a origem O do sistema Σ_1, pois $tg\theta = \frac{1}{2}$.)



Podemos fazer o esboço da elipse observando que os vértices tem coordenadas $(\pm 2\sqrt{2}, 0)_{\Sigma_3}$ e $(0, \pm\sqrt{3})_{\Sigma_3}$

Exemplo   Seja $g(x,y) = 7x^2 + 24xy - 256x - 192y + 1456 = 0$
Identifique a cônica $g(x,y)=0$ e determine seus elementos geométricos principais: centro, focos, vértices, assíntotas, diretriz em relação ao sistema de coordenadas inicial.

Vamos considerar um exemplo onde os termos lineares não podem ser eliminados por uma translação.

Seja $$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$$
a equação de uma cônica. Temos

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 16 & -12 & -\frac{85}{2} \\ -12 & 9 & -15 \\ \hline -\frac{85}{2} & -15 & 175 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{vmatrix} = 16\cdot 9 - 12^2 = 144 - 144 = 0$$

O sistema linear $\begin{cases} 16h - 12k - \frac{85}{2} = 0 \\ -12h + 9k - 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h - \frac{3}{4}k - \frac{85}{32} = 0 \\ h - \frac{3}{4}k + \frac{15}{12} = 0 \end{cases}$

é incompatível. Portanto não existe uma translação que pode eliminar os termos lineares.

Sempre existe uma rotação que elimina o termo quadrático misto: Temos

$$\cot 2\theta = \frac{16-9}{-24} = -\frac{7}{24} \quad e \quad \frac{1}{\operatorname{sen} 2\theta} = \sqrt{1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}.$$

logo $$\begin{cases} a' + c' = 25 \\ a' - c' = -24 \cdot \frac{25}{24} = -25 \end{cases} \Rightarrow a' = 0 \quad e \quad c' = 25$$

Os novos termos lineares tem coeficientes d' e e' com

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -85 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Precisamos calcular $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ (não precisamos conhecer o θ)

Temos $\operatorname{cotg} 2\theta = -\frac{7}{24}$ e $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{24}{25}$

Portanto $\cos 2\theta = \operatorname{sen} 2\theta \cdot \operatorname{cotg} 2\theta = -\frac{7}{25}$, ou seja $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{7}{25}$.

Obtemos um sistema de equações em $\cos^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta$:

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{7}{25} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{16}{25} \text{ e } \cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

Como escolhemos $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5} \text{ e } \cos\theta = \frac{3}{5}.$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -85 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -75 \\ 50 \end{pmatrix}$$

e a nova equação da cônica fica

$$25v^2 - 75u + 50v + 175 = 0$$ que pode ser

simplificada para obter

$$v^2 - 3u + 2v + 7 = 0.$$

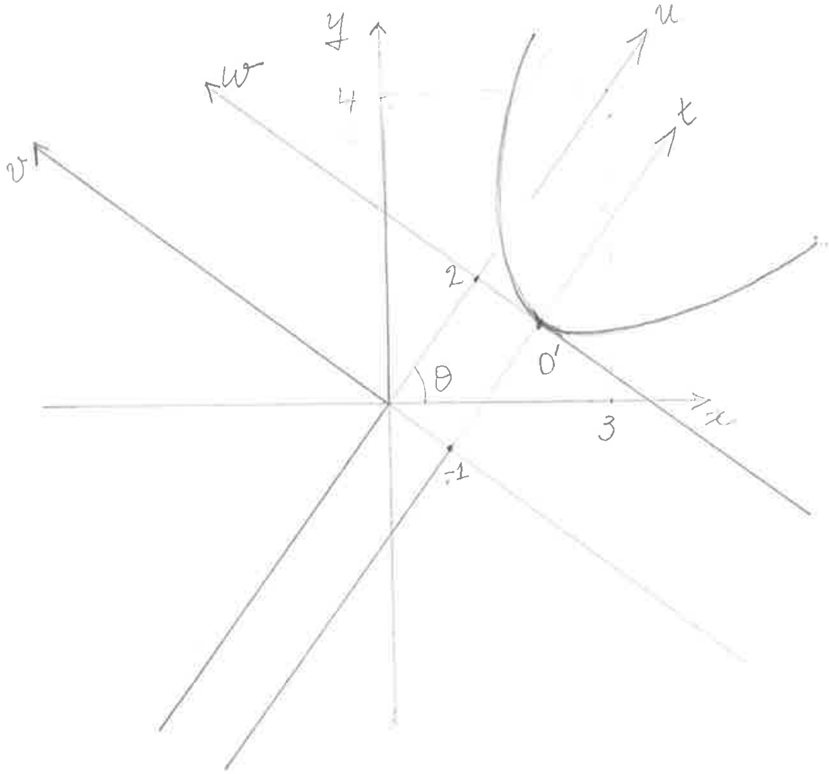
Temos
$$\begin{aligned} v^2 - 3u + 2v + 7 &= v^2 + 2v - 3u + 7 \\ &= (v+1)^2 - 1 - 3u + 7 \\ &= (v+1)^2 - 3(u-2) \end{aligned}$$

Fazendo a translação

$$\begin{cases} u = t + 2 \\ v = w - 1 \end{cases}$$ para o ponto $O' = (2, -1)$

Obtemos a equação reduzida da cônica

$w^2 = 3t$, que é uma parábola.



$tg\theta = \frac{4}{3}$

Retas secantes, tangentes e normais

Vamos estudar a posição relativa de uma reta r e de uma cônica C em um plano π, com um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$.

Seja $r: X = (h, k) + \lambda(m, n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uma equação vetorial da reta r e $g(x,y) = 0$ a equação da cônica C.

Se C é união de duas retas o estudo é o mesmo da posição de duas retas. Portanto, vamos supor que C é uma elipse, hipérbole ou parábola.

Os pontos de interseção de r e C são obtidos resolvendo a equação

$$r \cap C: \quad g(h + \lambda m, k + \lambda n) = 0 \quad \text{em } \lambda.$$

Esta equação tem grau ≤ 2, portanto, $r \cap C$ tem no máximo dois pontos.

<u>Observação</u> A equação $\lambda = 0$ tem uma solução única.
A equação $\lambda^2 = 0$ tem duas soluções iguais
(dizemos que $\lambda^n = 0$ tem uma solução de multiplicidade n.
Quando $n = 1$, dizemos que a solução é simples.)

<u>Definição</u> Seja C uma elipse, hipérbole ou parábola.

(a) Uma reta r é <u>secante</u> a C se $r \cap C$ contem dois pontos distintos

(b) Uma reta r é uma <u>reta tangente</u> a C se $r \cap C$ contem dois pontos identicos (ou seja, a equação de $r \cap C$ tem uma solução dupla). O ponto T em $r \cap C$ é chamado de <u>ponto de tangencia</u> e qualquer vetor diretor $\vec{r}$ de r é chamado <u>vetor tangente</u> a C no ponto T. A reta perpendicular a r em T é chamada <u>reta normal</u> a C em T.

1. Elipse

Escolhamos Σ de modo que C seja dada na forma reduzida

$$g(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Então

$$r\cap C:\ \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2}+\frac{(k+\lambda n)^2}{b^2}-1=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\lambda^2+2\left(\frac{m}{a^2}h+\frac{n}{b^2}k\right)\lambda+\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1=0$$

Como $m\neq 0$ ou $n\neq 0$, o coeficiente $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}$ de λ^2 é diferente de zero, ou seja a equação de $r\cap C$ sempre é de grau 2.

Temos

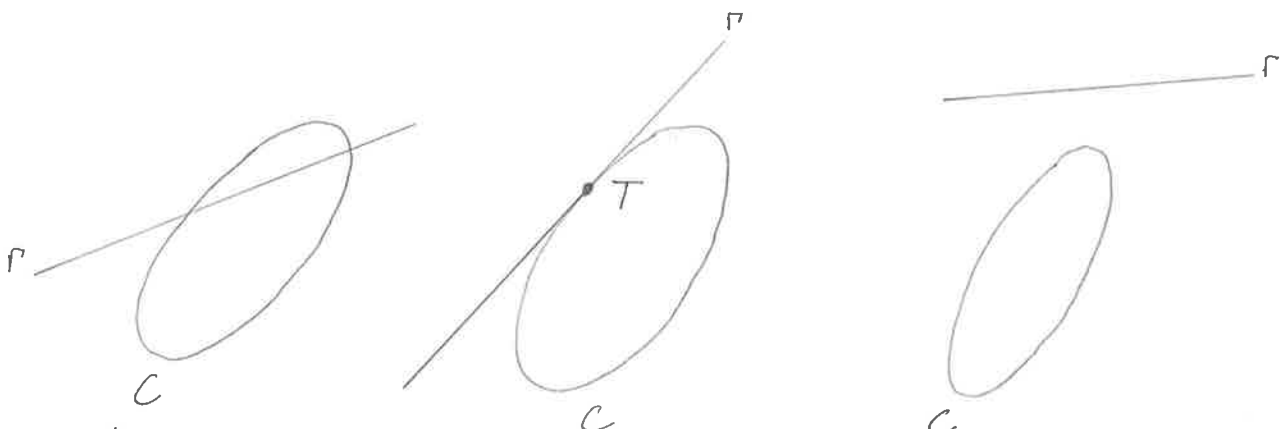
$$\Delta=4\left[\left(\frac{m}{a^2}h+\frac{n}{b^2}k\right)^2-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1\right)\right]$$

Se

$\Delta>0$: a equação de $r\cap C$ tem duas soluções distintas. A reta r é uma reta secante

$\Delta=0$: a equação de $r\cap C$ tem uma raiz dupla λ_0. A reta r é uma reta tangente a C no ponto $T=(h+\lambda_0 m,\ k+\lambda_0 n)$

$\Delta<0$: $r\cap C=\phi$



reta secante

reta tangente

$r\cap C=\phi$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse

Equação da reta tangente

Seja $T=(h,k)$ o ponto de tangencia da reta r e da elipse.

Temos $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1=0$, portanto

$$\Delta = 4\left(\frac{m}{a^2}h+\frac{n}{b^2}k\right)^2.$$

Como r é uma reta tangente a C no ponto T, $\Delta=0$, ou seja

$\frac{m}{a^2}h+\frac{n}{b^2}k=0$. Equivalentemente, $(m,n)\cdot\left(\frac{h}{a^2},\frac{k}{b^2}\right)=0$.

Daí $\vec{r}=(m,n)$ é ortogonal a $\left(\frac{h}{a^2},\frac{k}{b^2}\right)$, portanto é paralelo

a $\left(-\frac{k}{b^2},\frac{h}{a^2}\right)$. Podemos então usar o vetor

$\vec{u}=-a^2b^2\left(-\frac{k}{b^2},\frac{h}{a^2}\right)=(ka^2,-hb^2)$ como vetor diretor da reta r.

Com este vetor, uma equação vetorial de r é

$$r:\ X=(x,y)=(h,k)+\lambda(ka^2,-hb^2)$$

ou seja $\begin{cases} x=h+\lambda ka^2 \\ y=k-\lambda hb^2 \end{cases}$

Daí $\frac{x-h}{ka^2}=\frac{y-k}{-hb^2} \iff hb^2x+ka^2y=h^2a^2+k^2a^2$

$\underset{\text{dividindo por } a^2b^2}{\iff} \frac{h}{a^2}x+\frac{k}{b^2}y=1.$

Proposição

Seja $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ uma equação reduzida da elipse e $T=(h,k)$ um ponto da elipse. A equação da reta tangente a C em T é dada por

$$\boxed{\frac{h}{a^2}x+\frac{k}{b^2}y=1}$$

Exemplo

Considere a elipse $\frac{x^2}{4}+y^2-1=0$ e as retas $r: X=(x,y)=(0,k)+\lambda(m,0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

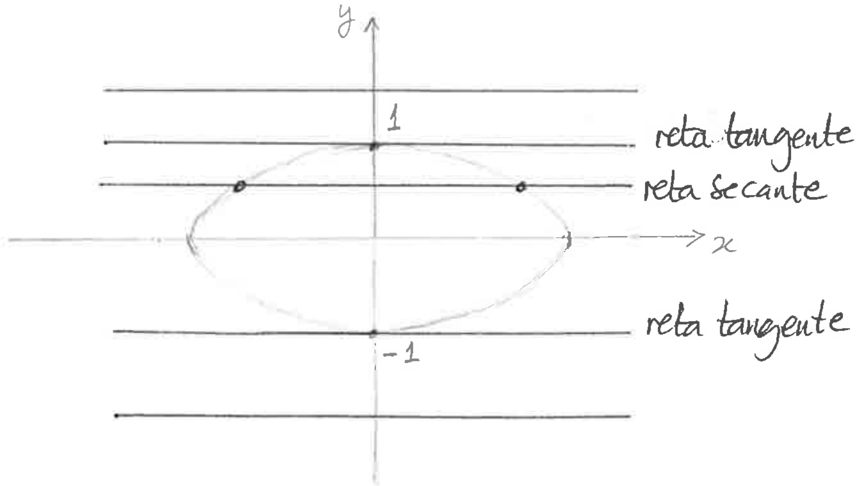
Temos $r:\begin{cases} x=\lambda m \\ y=k \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ (retas horizontais).

Logo $r\cap C: \frac{(\lambda m)^2}{4}+k^2-1=0 \iff \lambda^2=\frac{4}{m^2}(1-k^2)$

- $1-k^2<0 \iff k<-1$ ou $k>1$, $r\cap C=\emptyset$
- $1-k^2=0 \iff k=\pm 1 \Rightarrow \lambda^2=0$, $\lambda=0$ solução dupla

  $k=1$; $r: X=(\lambda m, 1), \lambda\in\mathbb{R}$, reta tangente no ponto $(0,1)$

  $k=-1$, $r: X=(\lambda m,-1), \lambda\in\mathbb{R}$, reta tangente no ponto $(0,-1)$
- $1-k^2>0 \iff -1<k<1$, $\lambda=\pm\frac{2}{m}\sqrt{1-k^2}$, temos duas soluções distintas, r é uma reta secante.



2. Hipérbole

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas de modo que os focos da hipérbole estejam no eixo x.

Então $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ e

$$r\cap C: \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2}-\frac{(k+\lambda n)^2}{b^2}-1=0$$

$$\iff \left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)\lambda^2+2\left(\frac{mh}{a^2}-\frac{nk}{b^2}\right)\lambda+\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}-1=0$$

A equação de $r\cap C$ é de segundo grau se, e somente se, $\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\neq 0$.

Temos $\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)\neq 0 \iff \frac{m}{a}-\frac{n}{b}\neq 0$ e $\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\neq 0$

$\iff \vec{r}=(m,n)$ não é paralelo (a,b) ou $(a,-b)$

$\iff r$ não é paralela a uma das assíntotas.

Se a equação de $r \cap C$ é de segundo grau, calculamos Δ:

$\Delta > 0$: r é uma reta secante

$\Delta = 0$: r é uma reta tangente. Se λ_0 é a solução dupla da equação de $r \cap C$, então $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ é o ponto de tangencia

$\Delta < 0$: $r \cap C = \phi$

Suponha que r é paralela a uma das assíntotas. Vamos analizar o caso $\vec{r} = (a, b)$ (ou caso $\vec{r} = (a, -b)$ é similar).

Temos $r \cap C$: $2\left(\frac{h}{a} - \frac{k}{b}\right)\lambda + \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 = 0$

$\frac{h}{a} - \frac{k}{b} = 0 \iff k = \frac{b}{a} h \iff A = (h, k) \in r$ pertence a reta assíntota

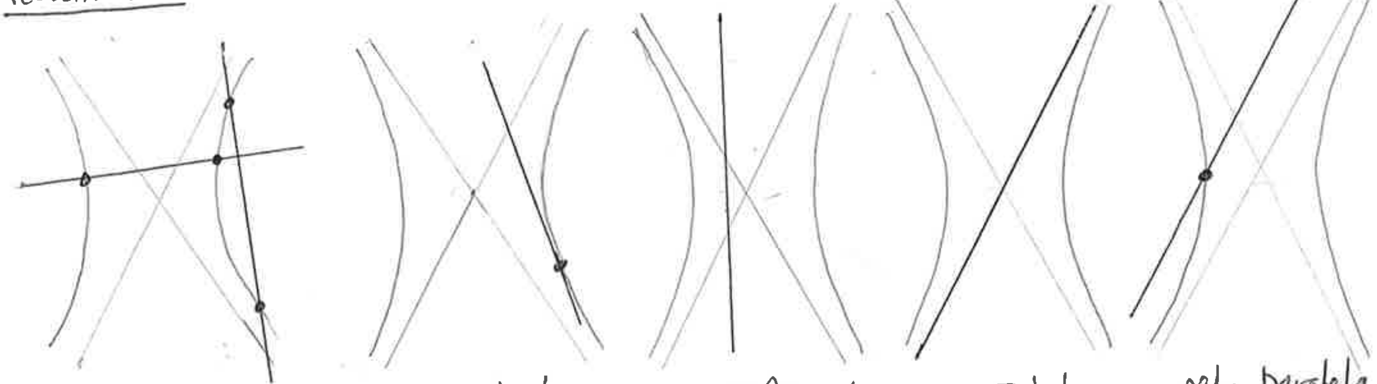
$\iff r$ é uma das assíntotas

Como $\frac{h}{a} = \frac{k}{b}$, $\frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 = -1 \neq 0$, logo $r \cap C = \phi$

Se $\frac{h}{a} - \frac{k}{b} \neq 0$, r é paralela a uma das assíntotas mas é distinta da assíntota.

Neste case a equação de $r \cap C$ tem uma solução única.

Resumindo



retas secantes $(\Delta > 0)$ | reta tangente $(\Delta = 0)$ | $r \cap C = \phi$ $(\Delta < 0)$ | assíntota | reta paralela a uma das assíntotas

3. Parábola

Escolhamos um sistema de coordenadas de modo que a equação de C seja na forma reduzida $y^2=4px$. Então

$$r\cap C:\quad (k+n\lambda)^2=4p(h+\lambda m) \iff n^2\lambda^2+2(nk-2pm)\lambda+k^2-4ph=0$$

A equação de $r\cap C$ é de segundo grau se, e somente se, $n\neq 0$, equivalentemente $\vec{r}=(m,n)$ não é parelelo ao eixo da parábola.

Se $n\neq 0$, $\Delta>0$: r é uma reta secante

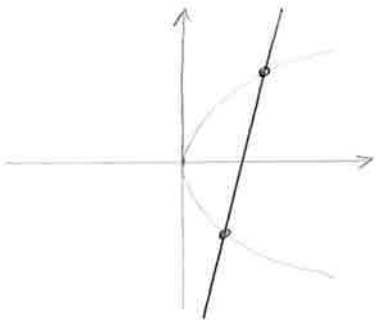
$\Delta=0$: r é uma reta tangente no ponto $T=(h+\lambda_0 m, k+\lambda_0 m)$

onde λ_0 é a solução dupla da equação de $r\cap C$

$\Delta<0$: $r\cap C=\phi$

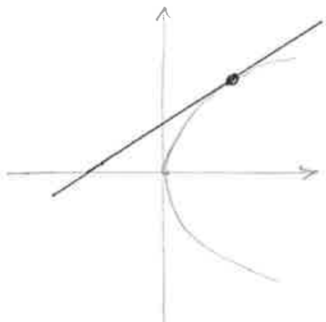
Se $n=0$, $r\cap C$: $-4pm\lambda+k^2-ph=0$

Como $p\neq 0$ e $m\neq 0$ $r\cap C$ é um ponto único.



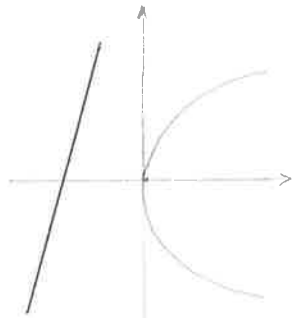
$n\neq 0$, $\Delta>0$

reta secante



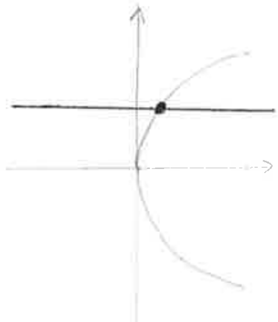
$n\neq 0$, $\Delta=0$

reta tangente



$n\neq 0$, $\Delta<0$

$r\cap\Delta=\phi$



$n=0$

Coordenadas polares (no plano)

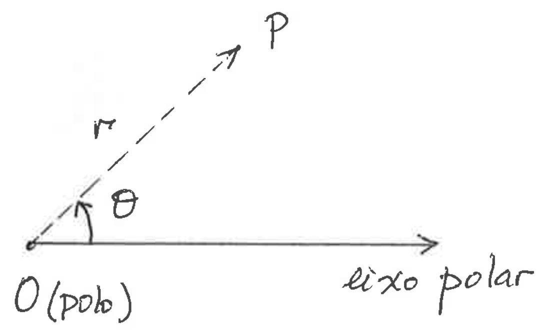
Um sistema de coordenadas nos ajuda a localizar as posições de pontos no plano (ou no espaço).

Seja $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ um sistema ortogonal de coordenadas de um plano. Tal sistema é chamado sistema de coordenadas cartesiano

Podemos localizar a posição de um ponto no plano usando um outro tipo de sistema de coordenadas.

Coordenadas polares

Fixamos um ponto O no plano e uma semi-reta orientado.



Chamamos O polo e a semi-reta eixo-polar

Dado um ponto P do plano denotamos por θ o ângulo entre o semi-eixo polar e $\vec{OP}$ medido no sentido anti-horario, e por r o modulo de $\vec{OP}$, i.e., $r = \|\vec{OP}\|$.

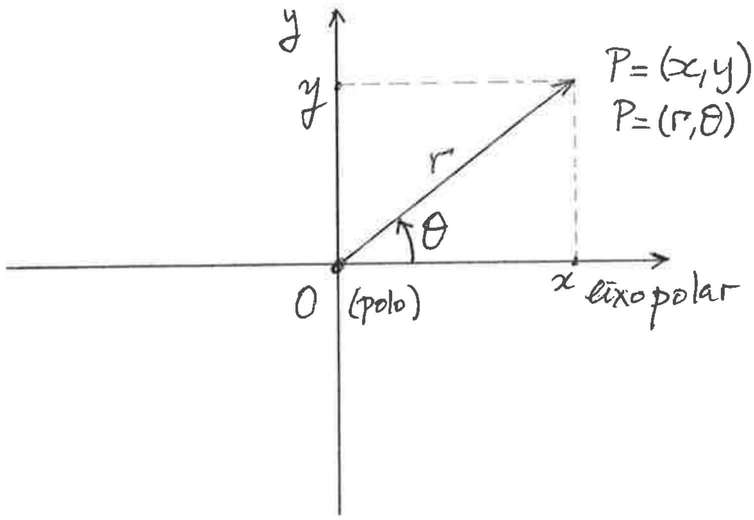
O par (r, θ) é denominado coordenadas polares do ponto P, θ é o argumento e r o raio.

Observações

1. Variando $\theta \in [0, 2\pi)$, $r > 0$ fica associado a cada ponto do plano um único par (r, θ), exceto o polo que tem coordenadas $(0, \theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
2. Podemos supor que $\theta \in \mathbb{R}$, mas temos que tomar cuidado porque (r, θ) e $(r, \theta + 2\pi)$ representam o mesmo ponto no plano.

Relação entre coordenadas polares e cartesianas

Seja $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ um sistema de coordenadas cartesiano.
Escolhamos O com o polo e semi-exo x, $\overrightarrow{Ox}$, como o eixo polar



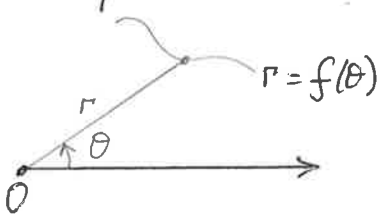
Seja P um ponto do plano distinto da origem (polo).
Temos $\frac{x}{r} = \cos\theta$ e $\frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$, portanto,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Funções em coordenadas polares



Expressões da forma $r = f(\theta)$ são chamadas funções em coordenadas polares.

Exemplos

1. $r = 1$

Como $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r=1 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

O gráfico da função $r=1$ é o círculo de centro O e raio 1.

2. $r = -3\,\text{sen}\,\theta$

Multiplicando por r, obtemos $r^2+3r\,\text{sen}\,\theta=0$. Em coordenadas cartesianas, a equação fica

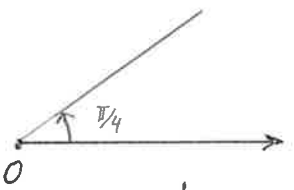
$$x^2+y^2+3y=0 \iff x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$$

que é a equação do círculo de centro $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ e raio $\frac{3}{2}$.

3. $r\cos\theta = 3$

A equação, em coordenadas cartesianas, é $x=3$, que é a equação da reta vertical passando por $(3,0)$

4. $\theta = \frac{\pi}{4}$



é a equação da semi-reta que forma um ângulo $\frac{\pi}{4}$ com o eixo polar.

5. Lemniscata : é o lugar geométrico do pontos P de um plano cujo produto das distâncias a dois ponto fixos F_1 e F_2 do plano é constante e igual a $\left(\frac{d(F_1,F_2)}{2}\right)^2$

Vamos achar a equação da lemniscata em coordenadas cartesianas e polares.

Escolhamos um sistema de coordenadas $\Sigma=(0,(\vec{i},\vec{j}))$ tal que $F_1=(-a,0)$ e $F_2=(0,a)$.

Então $X=(x,y)\in$ lemniscata $\iff d(X,F_1)\cdot d(X,F_2)=a^2$

$$X=(x,y)\in \text{lemniscata} \iff \sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$$

$$\iff \left((x+a)^2+y^2\right)\left((x-a)^2+y^2\right)=a^4$$

$$\iff (x+a)^2(x-a)^2+y^2\left((x+a)^2+(x-a)^2\right)+y^4=a^4$$

$$\iff x^4-2a^2x^2+\cancel{a^4}+2x^2y^2+2a^2y^2+y^4=\cancel{a^4}$$

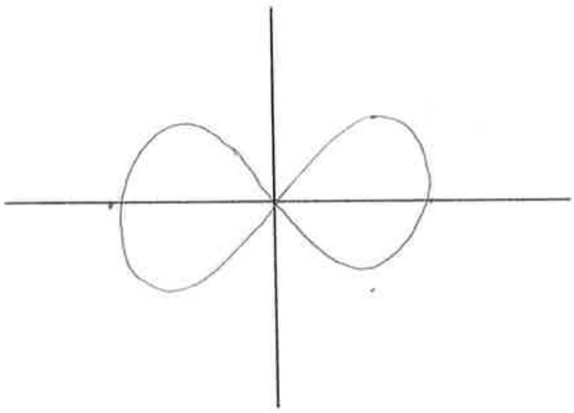
$$\iff \boxed{(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0}$$

que é uma equação de grau 4 em x,y.

Em coordenadas polares, esta equação vira,

$$(r^2)^2-2a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta)=0$$

$$\iff \boxed{r^2-2a^2\cos 2\theta=0}$$



Exercício

Achar equações da elipse/hiperbole/parábola nas coordenadas polares.

Superfície esférica

Vamos considerar o lugar geométrico de pontos do espaço $\mathbb{E}^3$ cujas coordenadas, em relação a um dado sistema de cordenadas, satisfazem uma equação de grau dois. Começamos com a esfera.

Definição

A esfera, ou superfície esférica, S de centro C e raio o número positivo ρ é o lugar geométrico dos pontos X de $\mathbb{E}^3$ tais que $d(X,C)=\rho$.

Seja $\Sigma=(O,B)$ um sistema ortogonal de coordenadas, e suponha que, em relação a ele, $C=(x_0,y_0,z_0)$ e $X=(x,y,z)$. Então

$$X\in S \iff (x-x_0)^2+(y-z_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2.$$

Esta equação é chamada equação reduzida da superfície esférica

Desenvolvendo os quadrados, obtemos

$$X=(x,y,z)\in S \iff x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-\rho^2=0$$

que é da forma

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0. \quad (*)$$

Esta equação é chamada equação geral da superfície esférica.

Nem todas as equações da forma $(*)$ descrevem superfícies esféricas; por exemplo $x^2+y^2+z^2+1=0$.

Podemos escrever $(*)$, completando quadrados, da forma

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$$

Portanto,

Proposição: A equação $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ descreve, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas fixado,

(a) uma superfície esférica de centro $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ e raio $\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}/2$ se $a^2+b^2+c^2-4d>0$;

(b) o conjunto formado pelo ponto $C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$ se $a^2+b^2+c^2-4d=0$;

(c) o conjunto vazio se $a^2+b^2+c^2-4d<0$.

Exemplo

1. Qual é o conjunto descrito pela equação
$$x^2+y^2+z^2-\sqrt{3}x-4y+8=0.$$
2. Determine o centro da superfície esférica de equação
$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-15=0$$
3. Quantas esferas passam por 1/2/3 pontos fixados?

Proposição

Existe uma superfície esférica única que contém os pontos distintos P, Q, R e S se, e somente se, esses pontos não são coplanares.

Demonstração

Precisamos achar um único ponto C (centro) equidistante dos quatro pontos P, Q, R, S. O ponto C é equidistante de P e Q, i.e. $d(C,P)=d(C,Q)$, se e somente se, C pertence ao plano mediador de PQ. Portanto, C é equidistante aos quatro pontos se, e somente se, pertence a interseção dos planos mediadores de PQ, PR e PS.

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas $\Sigma=(O,E)$. Sejam $\overrightarrow{PQ}=(a_1,b_1,c_1)_E$, $\overrightarrow{PR}=(a_2,b_2,c_2)_E$, $\overrightarrow{PS}=(a_3,b_3,c_3)$ as coordenadas dos vetores na base E. Tais vetores são normais aos planos mediadores de PQ, PR e PS respectivamente. Logo, as equações de tais planos são da forma
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

Os planos tem um ponto em comum se, e somente se, o sistema formado pelas três equações acima tem solução única. Equivalentemente,
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$
Esta condição é equivalente a $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}$ são LI, que é equivalente a P, Q, R, S não são coplanares. ☒

Seja S uma superfície esférica de centro C e raio ρ. Um ponto P é interior a S se $d(P,C) < \rho$, e exterior a S se $d(P,C) > \rho$.

Um conjunto de pontos é interior (resp. exterior) a S se todos os seus pontos são interiores (resp. exteriores) a S.

Exemplo

Localize o ponto $A = (2,-1,3)$ em relação a superfície esférica

$S: x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+7=0.$

Interseção e posição relativa de reta e superfície esférica

Proposição

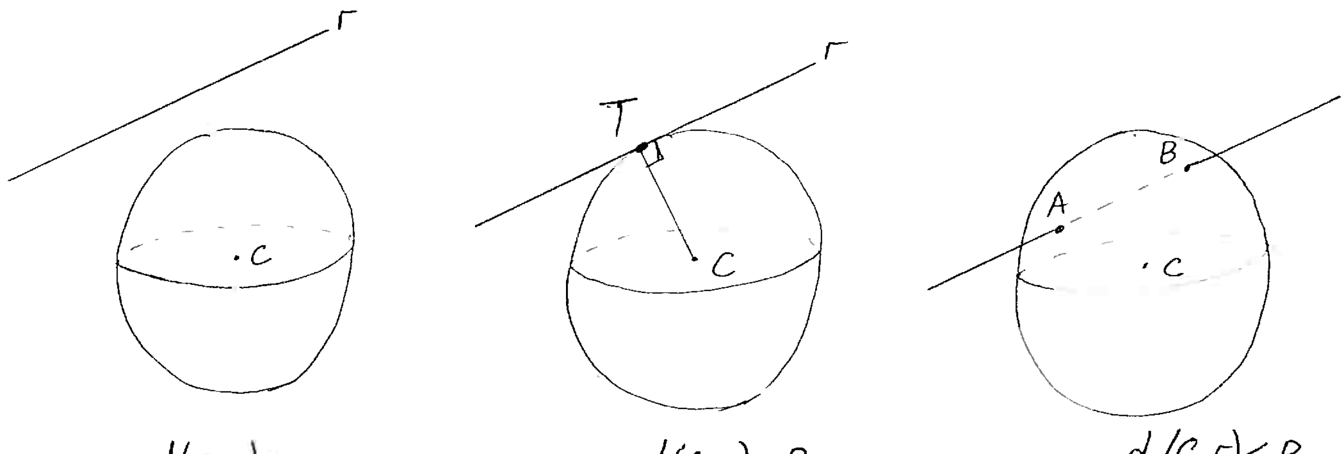
Sejam r uma reta e S uma superfície esférica de centro C e raio ρ.

(a) Se $d(C,r) > \rho$, então r é exterior a S, ou seja $S \cap r = \phi$.

(b) Se $d(C,r) = \rho$, então $r \cap S$ contém um único ponto que é a projeção ortogonal de C sobre r. Os demais pontos de r são exterior a S.

(c) Se $d(C,r) < \rho$, então $r \cap S$ é formado de dois pontos distintos A e B, cujo ponto médio é a projeção ortogonal de C sobre r.

Todos os pontos interiores ao segmento AB são interiores a S e todos os pontos da reta r, exteriores ao segmento AB, são exteriores a S.



$d(C,r) > \rho$

r é exterior a S

$r \cap S = \phi$

$d(C,r) = \rho$

$S \cap r$ é um ponto T

r é uma reta tangente a esfera no ponto T

$d(C,r) < \rho$

$S \cap r = \{A, B\}$

r é uma reta secante.

Demonstração

(a) Por definição $d(C,r)=$ menor das distâncias $d(C,P)$, com $P\in r$.

Se $d(C,r)>\rho$, então $d(C,P)\geqslant d(C,r)>\rho$ para todo $P\in r$.

logo, todos os pontos de r são exteriores a S, ou seja, $S\cap r=\phi$.

(b) e (c). Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas com origem $O=C$ e de tal modo que um vetor diretor da reta r seja $\vec{r}=(0,0,1)$.

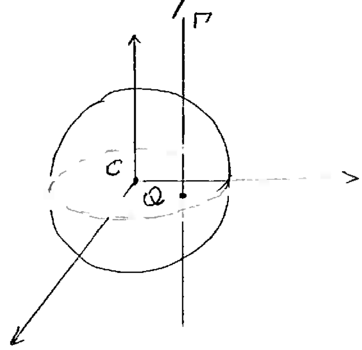
Seja $Q=(x_0,y_0,0)$ o ponto de interseção de r com o plano $z=0$.

Uma equação vetorial de r é

$$r:\ X=Q+\lambda\vec{r}\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

ou seja $X=(x_0,y_0,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ são as coordenadas de todo os ponto de r.

A equação de S é : $x^2+y^2+z^2=\rho^2$



Temos $X\in r\cap S \iff x_0^2+y_0^2+\lambda^2=\rho^2$

$$\iff \lambda^2=\rho^2-(x_0^2+y_0^2)$$

$$\iff \lambda^2=\rho^2-d^2(Q,O)$$

$$\iff \lambda^2=\rho^2-d^2(C,r) \quad (*)$$

Portanto,

- Se $\rho=d(A,r)$, a equação $(*)$ tem uma solução dupla $\lambda=0$, ou seja r e S tem um único ponto em comum. Para os demais valores de λ, $d(X,C)>0$, para todos $X=(x_0,y_0,\lambda)\in r$, $\lambda\neq 0$. Ou seja os demais ponto são exteriores a S

- Se $\rho>d(C,r)$, a equação $(*)$ tem duas soluções distintas λ_1,λ_2. Ou seja, $r\cap S$ é formado de dois pontos distintos $A=(x_0,y_0,\lambda_1)$ e $B=(x_0,y_0,\lambda_2)$.

Os ponto interiores do segmento AB são os pontos $X=(x_0,y_0,\lambda)$ com $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ e os pontos da reta r exteriores ao segmento AB são os pontos $X=(x_0,y_0,\lambda)$ com $\lambda<\lambda_1$ ou $\lambda>\lambda_2$. Analizando o sinal de $\lambda^2-(\rho^2-d^2(C,r))$, obtemos que

$X=(x_0,y_0,\lambda)$ é interior (resp. exterior) a S se, e somente se, $\lambda_1<\lambda<\lambda_2$ (resp. $\lambda<\lambda_1$ ou $\lambda>\lambda_2$). ▨

Exemplo

Sejam $r: X = (1,0,a) + \lambda(a,a,0)$ e $S: 8x^2+8y^2+8z^2-16x+24y-8z+19=0$.

Determine a, em cada caso: (1) r é tangente a S, (2) r é secante a S, (3) r é exterior a S.

Interseção e posição relativa de plano e superfície esférica

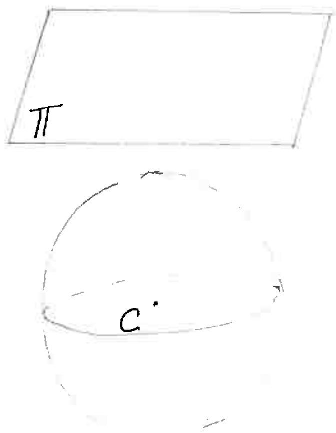
Proposição

Sejam π um plano e S uma superfície esférica de centro C e raio ρ.

(a) Se $d(C,\pi) > \rho$, então π é exterior a S, ou seja $\pi \cap S = \phi$.

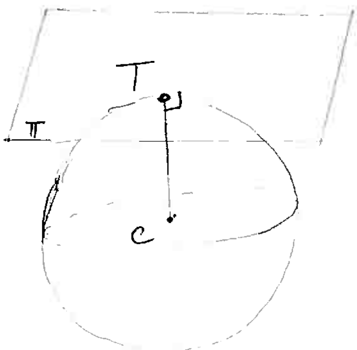
(b) Se $d(C,\pi) = \rho$, então $\pi \cap S$ contém um único ponto que é a projeção ortogonal de C a π. Os demais pontos de π são exteriores a S.

(c) Se $d(C,\pi) < \rho$, então $\pi \cap S$ é o círculo de raio $r = \sqrt{\rho^2 - d^2(C,\pi)}$ contido em π, cujo centro é a projeção ortogonal de C a π.



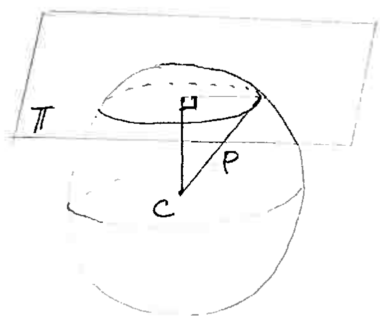
π exterior a S

$d(C,\pi) > \rho$



π tangente a S

$d(C,\pi) = \rho$



π plano secante

$d(C,\pi) < \rho$

Demonstração

Fixamos um sistema ortogonal de coordenadas de origem $O = C$ e tal que o plano Oxy seja paralelo a π.

As equações de S e Π, em relação a este sistema de coordenadas, são

$$S: x^2+y^2+z^2=\rho^2$$
$$\Pi: z=m$$

logo $S\cap\Pi: \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2-m^2 \\ z=m \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=\rho^2-d^2(C,\Pi) \\ z=m \end{cases}$

(observando que $d(C,\Pi)=|m|$)

Portando, $S\cap\Pi$ é $\begin{cases} \phi & \text{se } d(C,\Pi)>\rho \\ \text{ponto} & \text{se } d(C,\Pi)=\rho \\ \text{círculo de centro } (0,0,m) \text{ e raio } \sqrt{\rho^2-d^2(C,\Pi)} & \text{se } d(C,\Pi)<\rho \end{cases}$

observe que o centro de $S\cap\Pi$ no caso $d(C,\Pi)<\rho$ é a projeção ortogonal de C a Π. No caso $d(C,\Pi)=\rho$, o ponto $(0,0,m)$ de interseção de S e Π é a projeção ortogonal de C a Π. ▨

Exemplo

Obtenha uma equação geral do plano tangente a superfície esférica S no ponto T, com

$$S: x^2+y^2+z^2-2x-1=0 \quad e \quad T=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Solução

Temos $S: (x-1)^2+y^2+z^2=2$, ou seja a superfície esférica tem centro $C=(1,0,0)$ e raio $\rho=\sqrt{2}$.

O ponto $T\in S$, de fato $\left(\frac{-1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)-1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-1=0$.

O vetor $\overrightarrow{OT}=\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ é um vetor normal ao plano Π, tangente a S em T. Portanto uma equação geral de Π é

$$\Pi: -4x+y-z+d=0$$

Como $T\in\Pi$, $-4\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)+d=0 \Rightarrow d=-2$. Daí,

$$\Pi: -4x+y-z-2=0 \iff 4x-y+z+2=0$$ ▨

Quádricas

Uma quádrica é o lugar geométrico de pontos de $\mathbb{E}^3$ descrito, em relação a um sistema (ortogonal) de coordenadas, por uma equação de segundo grau

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz+j=0.$$

Nós vamos estudar alguns casos particulares da equação acima (Um estudo análogo das cônicas pode ser feito para as quádricas.)

Elipsóide

Uma quádrica Ω é uma elipsóide se existem números reais positivos a, b, c, pelo menos dois deles distintos, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

chamada equação reduzida da elipsóide.

Vamos estudar a interseção da elipsóide com planos paralelos aos coordenados

Seja $\pi: z=k$. Temos

$$\pi\cap\Omega: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ z=k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

Portanto, $\pi\cap\Omega$ é o conjunto vazio se $k^2>c^2$; é o ponto $(0,0,k)$ se $k^2=c^2$; é a elipse de equação reduzida $\frac{x^2}{pa^2}+\frac{y^2}{pb^2}=1$ no plano $z=k$, onde $p=1-\frac{k^2}{c^2}$, se $k^2<c^2$. [se $a=b$, a elipse se degenera a uma circunferência.]

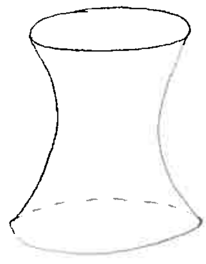
Tomando planos paralelos a Oxz ou a Oyz conduz a conclusões semelhantes.

Hiperbolóide de uma folha

Uma quádrica Ω é uma hiperbolóide de uma folha se existem números reais positivos a, b, c e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

chamada equação reduzida de Ω.



Vamos analizar a interseção de Ω com os planos paralelos aos coordenados.

Interseção com os planos $z = k$

$$\Pi \cap \Omega : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

Portanto,

- Se $a = b$, $\Pi \cap \Omega$ é uma circonferência no plano $z = k$ com centro $(0,0,k)$ e raio $\sqrt{1 + k^2/c^2}$.
- Se $a \neq b$, $\Pi \cap \Omega$ é uma elipse, no plano $z = k$, com centro $(0,0,k)$. Estude a posição dos focos desta elipse.

Interseção com os planos $y = k$

$$\Pi \cap \Omega : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

- Se $k^2 = b^2$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{a}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{a}\right) = 0$; portanto $\Pi \cap \Omega$ é união das duas retas concorentes

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{a} = 0 \\ y = k \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{a} = 0 \\ y = k \end{cases}$$

- Suponha que $k^2 \neq b^2$ e denote por $p = 1 - \frac{k^2}{b^2}$. Então

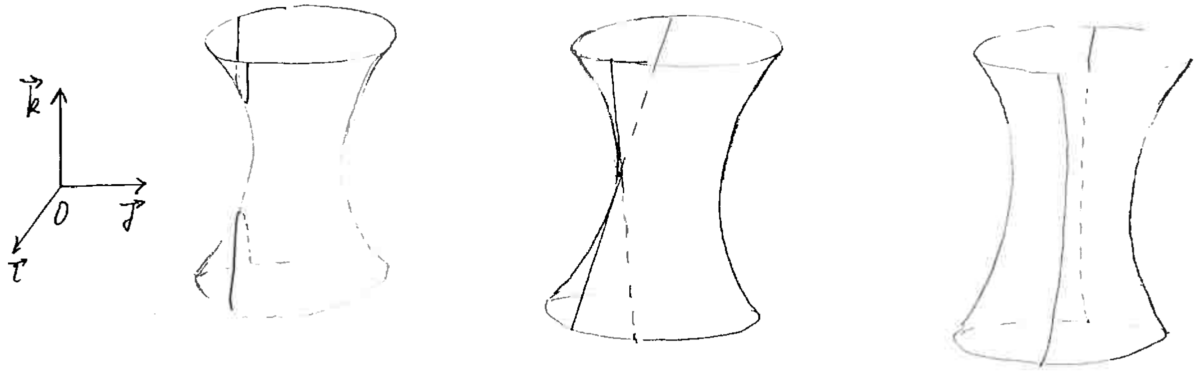
$$\Pi \cap \Omega : \begin{cases} \frac{x^2}{pa^2} - \frac{z^2}{pb^2} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

que é uma equação reduzida de uma hiperbole.

Se $p>0$, o centro da hipérbole é $(0,k,0)$ e seus focos são localizados na reta $r: X=(0,k,0)+\lambda(1,0,0), \lambda\in\mathbb{R}$.

Se $p<0$, o centro da hipérbole é $(0,k,0)$ e seus focos são sobre a reta $r: X=(0,k,0)+\lambda(0,0,1), \lambda\in\mathbb{R}$.

Observe que $p<0 \Leftrightarrow k<-b$ ou $k>b$ e
$p>0 \Leftrightarrow -b<k<b$.



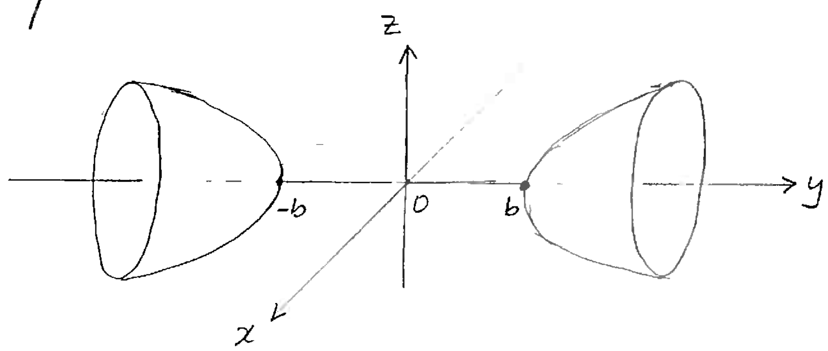
$k<-b$ $\quad$ $k=-b$ $\quad$ $-b<k<b$

Hiperbolóide de duas folhas

Uma quádrica Ω é uma hiperbolóide de duas folhas se existem numero reais positivos a,b,c e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

chamada equação reduzida de Ω.



Analize a interseção de Ω com planos paralelos aos coordenados.

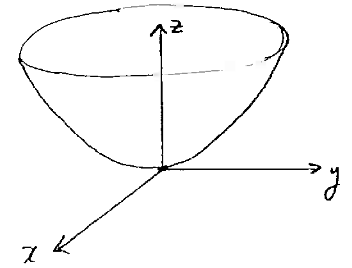
Parabolóide

Se existem números reais positivos a e b e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual uma quádrica Ω seja descrita pela equação

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

então (a) se $a \neq b$, Ω é um parabolóide elítico

(b) se $a = b$, Ω é um parabolóide de rotação

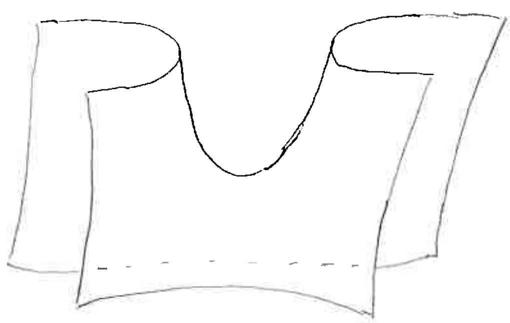


Estude a interseção de Ω com os planos paralelos aos coordenados.

Def Uma quádrica Ω é um parabolóide hiperbólico se existem números reais positivos a e b e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

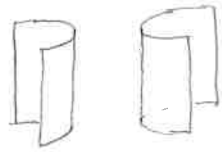
chamada equação reduzida de Ω.



Estude a inteseção de Ω com os planos paralelos aos coordenados.

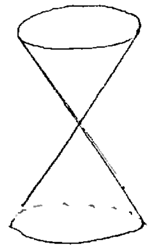
Quadricas cilíndricas (Q.C.)

a, b, c números positivos

	Equação reduzida	
Q.C. elíptica	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\neq b)$	
Q.C. hiperbólica	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
Q.C. parabólica	$y^2=cx$	

Quádricas cônicas

$a>0, b>0, \quad \Omega: \ z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



Exemplo

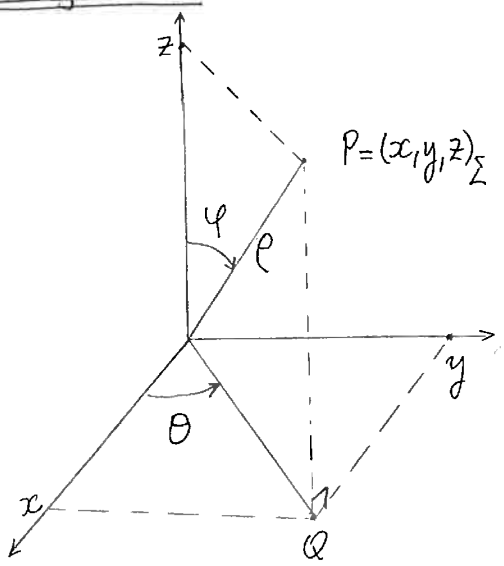
Sejam $A=(0,3,0)$ e $B=(0,-3,0)$. Obtenha uma equação geral do lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que $d(X,A)-d(X,B)=m$ e identifique o lugar geométrico, nos casos

(a) $m=2$, (b) $m=6$, (c) $m=10$, (d) $m=-2$.

Sol

$$4m^2x^2+(4m^2-144)y^2+4m^2z^2+36m^2-m^4=0$$

Coordenadas esféricas



Seja $\Sigma=(O,B)$ um sistema ortogonal de coordenadas em $\mathbb{E}^3$ e (x,y,z) as coordenadas de um ponto em $\mathbb{E}^3$

Podemos identificar a posição do ponto P com as seguintes dados:

$\rho = d(P,O)$; $0 \leq \rho < \infty$

$\varphi =$ ângulo entre o eixo-z e a reta OP ; $0 \leq \varphi < \pi$

$\theta =$ ângulo entre o eix-x e a reta OQ, onde Q é a projeção ortogonal de P ao plano xy; $0 \leq \theta \leq 2\pi$

A tripla (ρ, θ, φ) chama-se coordenadas esféricas do ponto P.
Temos as seguintes relações entre as coordenadas cartesianas e esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \ x \neq 0 \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \ z \neq 0 \end{cases}$$

Coordenadas cilíndricas

As coordenadas cilíndricas de $P=(x,y,z)$ é a tripla (r,θ,z) onde (r,θ) são as coordenadas polares do ponto Q no plano xy, com Q a projeção ortogonal de P a este plano. Temos

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ y = r\operatorname{sen}\theta & r \geq 0 \\ z = z \end{cases}$$