SMA0300-Geometria Analítica - Aula 3

Roberta Wik Atique

Definição: Uma tripla ORDENADA linearmente independente $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ chama-se base de V^3.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e $\vec{v}$ um vetor qualquer de V^3. Então existem únicos escalares x, y, z tais que $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Tais escalares são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ na base E. Notação: $\vec{v} = (x, y, z)_E$.

Observação 1: Uma base é uma tripla ordenada, isto significa que se trocarmos as ordens dos vetores obtemos outra base diferente da inicial. A coordenada x é a primeira coordenada de $\vec{v}$ na base E, a coordenada y é segunda e a coordenada z é a terceira.

Observação 2 (Proposição 8 da aula 2): Seja $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma sequência de vetores LI. Se

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = \beta_1 \vec{e_1} + \beta_2 \vec{e_2} + \beta_3 \vec{e_3}$$

então $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ e $\alpha_3 = \beta_3$.

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base, $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)_E$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)_E$ vetores de V^3 e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 + x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3 =$$

$$(x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 + (z_1 + z_2)\vec{e}_3$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_E$$

$$\alpha\vec{v}_1 = \alpha(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) = \alpha x_1\vec{e}_1 + \alpha y_1\vec{e}_2 + \alpha z_1\vec{e}_3$$

$$\alpha\vec{v}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)_E$$

Proposição:

a $(x_1, y_1, z_1)_E + (x_2, y_2, z_2)_E = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)_E$.

b $\alpha(x_1, y_1, z_1)_E = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)_E$.

c $\vec{0} = (0, 0, 0)_E$.

d $\vec{v} = (x, y, z)_E \rightarrow -\vec{v} = (-x, -y, -z)_E$

Exercícios:

1. Prove que $\vec{u} = \vec{0} \longleftrightarrow \vec{u} = (0, 0, 0)_E$. (item c) acima).
2. Prove o item d) acima.
3. Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$, calcule as coordenadas de $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.
4. O vetor $\vec{t} = (4, 0, 13)$ é combinação linear de $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$?

1. $\vec{0} = \vec{u} = (x, y, z)_E \to \vec{0} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Mas $\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3$. Segue da Proposição 8 que $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Reciprocamente

$$\vec{u} = (0, 0, 0)_E \to \vec{u} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

2. $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = (1, -1, 3) + 2(2, 1, 3) - 3(-1, -1, 4) = (1, -1, 3) + (4, 2, 6) + (3, 3, -12) = (8, 4, -3)$.
3. $(4, 0, 13) = x(1, -1, 3) + y(2, 1, 3) + z(-1, -1, 4) = (x + 2y - z, -x + y - z, 3x + 3y + 4z)$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 4z = 13 \end{cases}$$

$x = 1$, $y = 2$, $z = 1$. Logo $\vec{t}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$.

Exemplos:

1. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (2, 4, 6)$ são LI ou LD?
2. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{w} = (2, 4, 5)$ são LI ou LD?
3. $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$ são LI ou LD?

LD - aula 2

1. Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, ou seja, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta\vec{u}$.
2. Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Em outras palavras, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, existem escalares x, y e z não todos nulos tais que $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$.

Voltemos ao exemplo 3: para verificar se $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$ são LI ou LD temos que resolver a equação

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \quad (*)$$

se a única solução for $x = y = z = 0$ então os vetores são LI, caso contrário, LD. Vamos reescrever $(*)$:

$$x(1, -1, 3) + y(2, 1, 3) + z(-1, -1, 4) = (0, 0, 0)$$

$$(x + 2y - z, -x + y - z, 3x + 3y + 4z) = (0, 0, 0).$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Escrevendo este sistema na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que as colunas da matriz A são as coordenadas dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Temos um sistema linear homogêneo de 3 equações e 3 incógnitas. O sistema tem solução única trivial se $\det(A) \neq 0$. ($AX = 0 \leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}0 = 0 \leftrightarrow I.X = X = 0$).

Proposição: Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)_E$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)_E$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)_E$ são LD $\longleftrightarrow$

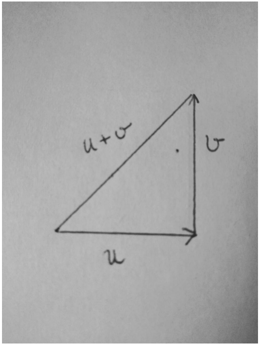
$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Aqui estamos usando o fato que $\det(A) = \det(A^t)$.

Definição: (a) Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AC}$ e as retas AB e AC são perpendiculares.
(b) O vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Proposição Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais $\longleftrightarrow$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$



Definição: Uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é ortonormal se:
(a) $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$, em outras palavras, os vetores da base são unitários.
(b) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, e $\vec{e}_3$ são dois a dois ortogonais.

Proposição Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal. Se $\vec{v} = (x, y, z)_E$ então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$