SMA0300-Geometria Analítica - Aula 4

Roberta Wik Atique

Medida Angular entre vetores

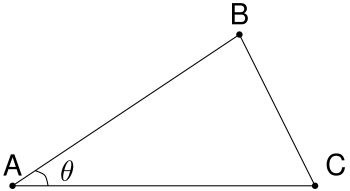
Definição: Sejam $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AC}$ vetores não nulos. A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $B\hat{A}C$.

Observe que:

1. $0 \leq \theta \leq \pi$ se θ for em radianos ou $0 \leq \theta \leq 180$ se θ for em graus.
2. A medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ independe dos representantes $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ com a mesma origem de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente.
3. Se $\theta < \frac{\pi}{2}$ dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo agudo.
4. Se $\theta > \frac{\pi}{2}$ dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo obtuso.
5. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam ângulo reto.
6. Seja α a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$. Se $\theta = \alpha$ dizemos que $\vec{u}$ forma ângulos congruentes com $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Se $\theta + \alpha = \pi$ dizemos que $\vec{u}$ forma ângulos suplementares com $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Notação: $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$.

Vamos aplicar a lei dos cossenos no triângulo BAC:



Onde $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ e $\vec{u} - \vec{v} = \vec{CB}$.

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\underbrace{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta}_{\text{produto escalar}}$$

Produto Escalar

Definição: O produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é o número real definido por:

a Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;

b Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$

onde θ é a medida angular entre eles.

Proposição:

a Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ então

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

b $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

c $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} \longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Proposição: Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal e $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E$. Então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Prova: Vimos que:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$-2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 - 2z_1 z_2 = -2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Portanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Exercícios

Nos exercícios todas as coordenadas se referem a uma base ortonormal fixada.

Exercício 1: Determine x de modo que $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$ sejam ortogonais.

Solução:

Exercícios

Nos exercícios todas as coordenadas se referem a uma base ortonormal fixada.

Exercício 1: Determine x de modo que $\vec{u} = (x, 0, 3)$ e $\vec{v} = (1, x, 3)$ sejam ortogonais.
Solução:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = x + 0 + 9,$$

$$x = -9.$$

Exercício 2: Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.
Solução: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$.

Exercício 2: Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.

Solução: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$.

$$\begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$\vec{u} = (1, -1, -1).$$

Exercício 3: Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
Solução: Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ podemos escrever $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - x, -y, 3 - z)$.

Exercício 3: Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
Solução: Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ podemos escrever $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - x, -y, 3 - z)$.
$\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ são LD:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = x - 3y + 2z = 0$$

Exercício 3: Decomponha $\vec{u} = (1, 0, 3)$ como soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ sejam LD e $\vec{w}$ seja ortogonal aos dois últimos.
Solução: Seja $\vec{v} = (x, y, z)$. Como $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ podemos escrever $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (1 - x, -y, 3 - z)$.
$\vec{v}$, $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$ são LD:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = x - 3y + 2z = 0$$

$\vec{w}$ é ortogonal a $(1, 1, 1)$ e $(-1, 1, 2)$:

$$\begin{cases} 1 - x - y + 3 - z = 0 & \longrightarrow x + y + z = 4 \\ -(1 - x) - y + 2(3 - z) = 0 & \longrightarrow x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 4 \\ x - y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2) \text{ e } \vec{w} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$$

Proposição: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

b $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

c $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

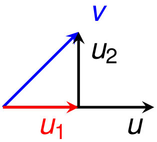
d Se $\vec{u} \neq \vec{0} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Exercício: Classifique como verdadeiro ou falso.

1. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
2. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v} - \vec{w}$.
3. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ então $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
4. $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{w}} = \dfrac{\vec{v}}{\vec{w}}$

Projeção Ortogonal

Exercício: Decomponha o vetor $\vec{v} = (-3, 4, 1)$ como uma soma de um vetor paralelo a $\vec{u} = (1, 5, 4)$ e um vetor ortogonal a $\vec{u}$.



Vamos escrever $\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ onde $\vec{u}_1 = \alpha\vec{u} = \alpha(1, 5, 4)$ e $\vec{u}_2 \cdot \vec{u} = 0$.

$$\vec{u}_2 = \vec{v} - \vec{u}_1 = (-3 - \alpha, 4 - 5\alpha, 1 - 4\alpha)$$

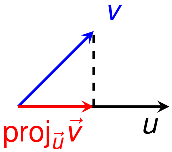
$$0 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u} = (-3 - \alpha, 4 - 5\alpha, 1 - 4\alpha) \cdot (1, 5, 4) = 21 - 42\alpha.$$

Portanto $\alpha = 1/2$, $\vec{u}_1 = (1/2, 5/2, 2)$ e $\vec{u}_2 = (-7/2, 3/2, -1)$.

Definição: Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo. Dado um vetor qualquer $\vec{v}$ o vetor $\vec{w}$ satisfazendo as propriedades abaixo é chamado de projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

- **a** $\vec{w}$ é paralelo a $\vec{u}$.
- **b** $\vec{v} - \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

Notação: $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$.



Proposição:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\ \vec{u}.$$

Prova: $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \alpha\vec{u}$ onde

$$0 = (\vec{v} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha\vec{u} \cdot \vec{u}.$$

Portanto,

$$\alpha\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

Exercício

(Exercício 9-61 Boulos) Em relação a uma base ortonormal, sebe-se que $\overrightarrow{AB} = (2, \sqrt{3}, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{3}, 1)$.

- **a** Verifique que A, B e C são vértices de um triângulo.
- **b** Calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A e a área do triângulo.

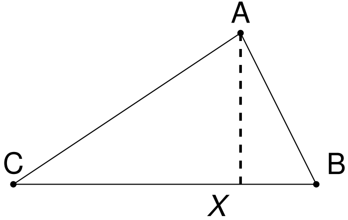
Resolução:

(a) Segue do fato de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ ser LI. Alternativamente, seja θ a medida angular entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(2, \sqrt{3}, 1) \cdot (-1, \sqrt{3}, 1)}{\sqrt{4+3+1}\sqrt{1+3+1}} = \frac{-2+3+1}{\sqrt{40}}.$$

Como $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \neq 1, -1$ segue que A, B e C são vértices de um triângulo.

(b)



Vamos projetar ortogonalmente $\overrightarrow{CA} = (1, -\sqrt{3}, -1)$ sobre $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (1, -\sqrt{3}, -1) + (2, \sqrt{3}, 1) = (3, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{CX} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{CB}} \overrightarrow{CA} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|^2} \overrightarrow{CB} = \frac{(1, -\sqrt{3}, -1) \cdot (3, 0, 0)}{\|(3, 0, 0)\|^2} \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CX} = \frac{3}{9}(3, 0, 0) = (1, 0, 0).$$

Portanto o comprimento da altura é

$$\|\overrightarrow{AX}\| = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}\| = \|(-1, \sqrt{3}, 1) + (1, 0, 0)\| = \|(0, \sqrt{3}, 1)\|$$

$$\|\overrightarrow{AX}\| = \sqrt{3+1} = 2$$

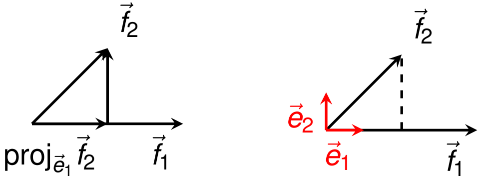
e a área do triângulo é

$$2\|\overrightarrow{CB}\|/2 = \sqrt{9} = 3.$$

Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

Seja $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ uma base dada. Vamos construir uma base ortonormal $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ onde $\vec{e}_1$ é paralelo a $\vec{f}_1$ e $\vec{e}_2, \vec{f}_1, \vec{f}_2$ são LD.

1. $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|}$, ou seja, $\vec{e}_1$ é o versor de $\vec{f}_1$.
2. $$\vec{e}_2 = \frac{\vec{f}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_2}{\|\vec{f}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_2\|}$$



3. $$\vec{e}_3 = \frac{\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_2} \vec{f}_3}{\|\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_2} \vec{f}_3\|}$$

Exercício 1: Mostre que $\vec{e}_3$ é ortogonal a $\vec{e}_1$ e é ortogonal a $\vec{e}_2$.

Exercício 2: Aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt na base $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde $\vec{f}_1 = (1, 2, 2)$, $\vec{f}_2 = (1, 0, 1)$ e $\vec{f}_3 = (1, 1, 1)$.

- $\vec{e}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \dfrac{(1, 2, 2)}{3}$.
- $\mathrm{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_2 = (\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 = 1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

  $\vec{f}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1} \vec{f}_2 = (1, 0, 1) - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

  $\vec{e}_2 = \frac{(2/3, -2/3, 1/3)}{\|(2/3, -2/3, 1/3)\|} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

- $\mathrm{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_3 = (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \frac{5}{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

  $\mathrm{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_3 = (\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 = \frac{1}{3}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

  $\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_1}\vec{f}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{e}_2}\vec{f}_3$

  $(1,1,1) - \frac{5}{3}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - \frac{1}{3}(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9})$

  $\vec{e}_3 = 3(-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$