SMA0300-Geometria Analítica - Aula 9
Planos

Roberta Wik Atique

Axioma: Três pontos não colineares em E^3 determinam um único plano.

Objetivo: Encontrar uma equação do plano determinado pelos pontos A, B e C não colineares. Observe que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ é LI Seja π o plano determinado por A, B e C. Seja X um ponto qualquer de π. Note que $X = A + \overrightarrow{AX}$

$$X \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ é LD}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

para um par de números reais λ, μ.

Equação vetorial do plano ABC:

$$\boxed{X = A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}, \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Definição: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI paralelos ao plano π são chamados de vetores diretores deste plano.

Observação: Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores diretores do plano ABC.

Um ponto e dois vetores LI determinam um único plano. Seja $A \in E^3$ um ponto e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI. Se X é um ponto do plano, $(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v})$ é LD. Logo existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Assim, a equação vetorial do plano que passa por A e cujos vetores diretores são $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{A} + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Equações paramétricas do plano

Dados $S = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ um sistema de coordenadas, $A = (x_0, y_0, z_0)$ ponto em E^3, $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (m, n, p)$ vetores LI. Seja π o plano determinado por A, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Seja $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer de π:

$$X = (x, y, z) = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p),$$

$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a + \mu m, y_0 + \lambda b + \mu n, z_0 + \lambda c + \mu p),$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemplos

Exemplo 1: Sejam $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (3, 1, 0)$. Determine uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π determinado por A, B e C.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 1) = (1, -1, 2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 1, 0) - (1, 2, 1) = (2, -1, -1).$$

$$X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(2, -1, -1).$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Exemplo 2: $A = (1, 0, 3) \in \pi$? Encontre um ponto do plano π.

Equação geral do plano

Seja π o plano determinado por $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$.

$$X = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ é LD} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(sp - tn)(x - x_0) + (tm - rp)(y - y_0) + (rn - sm)(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Equação Geral do Plano:

$$\boxed{\text{ax+by+cz+d=0}}$$

Exercício 1: Encontre uma equação geral do plano determinado por $A = (1, 1, 0)$, $\vec{u} = (0, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x + 2y - 4z - 1 = 0$$

$$x - 2y + 4z + 1 = 0.$$

Exercício 2: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $P = (4, 1, -1)$ e contém a reta $r : X = A + \lambda\vec{u} = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

Observe primeiro que P não pertence à r.

Exercício 2: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $P = (4, 1, -1)$ e contém a reta $r : X = A + \lambda\vec{u} = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

Observe primeiro que P não pertence à r.

$\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ são vetores diretores do plano.

Exercício 2: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $P = (4, 1, -1)$ e contém a reta $r : X = A + \lambda\vec{u} = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$.

Observe primeiro que P não pertence à r.

$\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ são vetores diretores do plano.

$$\overrightarrow{AP} = (4, 1, -1) - (2, 4, 1) = (2, -3, -2)$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8x - 6y + z + 39 = 0.$$

Posição relativa entre reta e plano

Considere uma reta r e um plano π. Podemos ter:

- r é paralela a π.
- r está contida em π.
- r é transversal a π (ou concorrente com π).

Sejam $A \in r$ e $\vec{u}$ um vetor diretor de r. Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de π.

- Se $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ LD e A NÃO pertence a π então r é paralela a π.
- Se $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ LD e $A \in \pi$ então r está contida em π.
- Se $(\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ é LI então r é transversal a π.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \quad x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \quad X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \; x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \; X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$.

$\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \quad x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \ X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$.

$\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$.

Exemplos

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \; x - 1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \; X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$.

$\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, 0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$.
Seja $A = (1, 0, 0) \in r$.

Exemplo 1: Estude a posição relativa entre
$r: \quad x-1 = 2y = 2z$ e
$\pi: \quad X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$.

$\vec{u} = (2,1,1)$, $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ e $\vec{v}_2 = (2,2,0)$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$.
Seja $A = (1,0,0) \in r$.
Como A não pertence a π então r é paralela a π.

Exemplo 2: Encontre m para que $r: \; X = (1,0,0) + t(m,2,m)$ seja transversal ao plano $\pi: \; x + my + z = 0$.

Exemplo 2: Encontre m para que $r: \ X = (1,0,0) + t(m,2,m)$ seja transversal ao plano $\pi: \ x + my + z = 0$.

$\vec{u} = (m,2,m)$. Sejam $A = (1,0,-1)$, $B = (0,1,-m)$ e $C = (-m,1,0)$ pontos de π. $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (-1,1,-m+1)$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (-m-1,1,1)$.

$$M = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ -1 & 1 & -m+1 \\ -m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = 4m^2$. Então a reta é tranversal ao plano para todo $m \neq 0$.

Vetor normal a um plano

Definição: Um vetor não nulo $\vec{\eta} \in V^3$ é um vetor normal a um plano π se for ortogonal a todo vetor paralelo a π.

Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores diretores de π. Todo vetor $\vec{v}$ paralelo a π é combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Isto é, existem escalares α e β tais que $\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. Se $\vec{\eta}$ é ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ então

$$\vec{\eta} \cdot \vec{v} = \vec{\eta} \cdot (\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha\,\vec{\eta} \cdot \vec{v}_1 + \beta\,\vec{\eta} \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

Proposição: Um vetor $\vec{\eta} \in V^3$ é normal a um plano π se for ortogonal aos vetores diretores de π.

Proposição: $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ é normal a π.

Proposição: Se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral do plano π então $\vec{\eta} = (a, b, c)$ é um vetor normal a π.

Prova: Seja $\vec{v} = (m, n, p)$ um vetor paralelo a π. Seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de π ($\Rightarrow$ $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$) . Então $A + \vec{v} = (x_0 + m, y_0 + n, z_0 + p)$ é um ponto de π, logo satisfaz a equação:

$$0 = a(x_0 + m) + b(y_0 + n) + c(z_0 + p) + d =$$

$$= ax_0 + by_0 + cz_0 + d + am + bn + cp = am + bn + cp$$

$$\vec{\eta} \cdot \vec{v} = (a, b, c) \cdot (m, n, p) = am + bn + cp = 0.$$

Um ponto e um vetor normal determinam um plano: seja $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto e $\vec{\eta} = (a, b, c)$ um vetor não nulo. O plano π que passa por A e $\vec{\eta}$ é normal tem equação:

$$X = (x, y, z) \in \pi \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AX} \cdot \vec{\eta} = 0$$

$$\Leftrightarrow\; (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(a, b, c) = a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

fazendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ temos que $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação de π.

Exemplos

Exemplo 1: Seja π o plano dado por $2x - 5y + z = 0$. Então $\vec{\eta} = (2, -5, 1)$ é um vetor normal a π.

Exemplo 2: Seja π o plano dado pelas equações

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Então $\vec{v}_1 = (1, -1, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, -1, -1)$ são vetores diretores de π. Logo $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ é normal a π:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3, 5, 1)$$

Exemplo 3: Encontre uma equação geral para o plano que passa por $A = (1, 2, 1)$ e $\vec{\eta} = (3, 3, -1)$ é um vetor normal:

$$3(x-1) + 3(y-2) - (z-1) = 3x + 3y - z - 8 = 0.$$

Posição relativa entre plano e plano:

(a) Dois planos são paralelos ou coincidentes se têm vetores normais paralelos.

(b) Dois planos são transversais se têm vetores normais LI.

Exemplos:

1. $x - 2y + z - 2 = 0$ e $x - 2y + z - 3 = 0$ são paralelos.
2. $x - 2y + z - 2 = 0$ e $x + 2y + z - 2 = 0$ são transversais.
3. $x - 2y + z - 2 = 0$ e $2x - 4y + 2z - 4 = 0$ são coincidentes.