SMA0300-Geometria Analítica - Aula 12
Ângulos

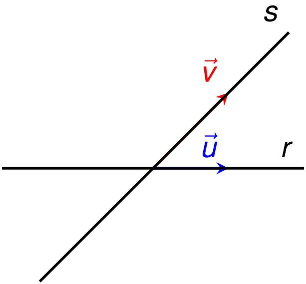
Roberta Wik Atique

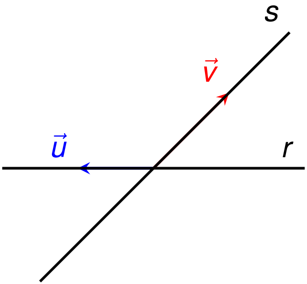
Ângulo entre duas retas

Sejam r e s duas retas com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente.

(a) Caso r e s paralelas. Então o ângulo entre r e s é zero.

(b) Caso r e s concorrentes. O ângulo entre r e s é o menor ângulo formado por elas. Seja θ o ângulo entre r e s. Então $0 < \theta \leq \pi/2$.





Seja α o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se $0 < \alpha \leq \pi/2$ então $\theta = \alpha$ e $\cos\theta = \cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

Se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ então $\theta = \pi - \alpha$ e $\cos\theta = -\cos\alpha = -\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

(c) Caso r e s reversas. Seja s' uma reta paralela a s e concorrente com r. Então o ângulo entre r e s é o ângulo entre r e s'.

Definição: Sejam r e s duas retas com vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente. O ângulo θ entre r e s é dado por (notação $\theta =$ang(r, s)):

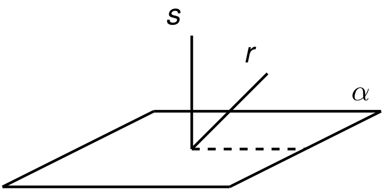
$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}$$

Ângulo entre reta e plano

Sejam r uma reta com vetor diretor $\vec{u}$ e α um plano com vetor normal $\vec{\eta}$.

(a) Caso r paralela a α ou contida em α. Então o ângulo entre r e α é zero.

(b) Caso r e α transversais. Seja s uma reta perpendicular a α passando pelo ponto de interseção de r e α (e portanto $\vec{\eta}$ é um vetor diretor de s). O ângulo entre r e α é $\frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, s)$.



Seja $\varphi =$ang(r, s).

Definição: Sejam r uma reta com vetor diretor $\vec{u}$ e α um plano com vetor normal. $\vec{\eta}$. O ângulo θ entre r e α é dado por (notação $\theta =$ang(r, α)):

$$\boxed{\sin\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{\eta}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{\eta}\|}}$$

pois $\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi$.

Ângulo entre dois planos

Definição: Sejam α_1 e α_2 dois planos com vetores normais $\vec{\eta}_1$ e $\vec{\eta}_2$ respectivamente. Então o ângulo θ entre α_1 e α_2 é dado por:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2|}{\|\vec{\eta}_1\|\|\vec{\eta}_2\|}}$$