# SMA0300-Geometria Analítica - Exercícios - distâncias e ângulos

Roberta Wik Atique

Exercício: Determine a projeção ortogonal da reta $r: x+1 = y+2 = 3z-3$ sobre o plano $\pi: x-y+2z=0$.

Resolução: Tome dois pontos de $r$ e faça a projeção sobre o plano. Tome a reta que passa por estas duas projeções.
$P = (-1, -2, 1)$ é um ponto de $r$. Para achar a projeção tome uma perpendicular a $\pi$ passando por $P$:
$X = (-1, -2, 1) + \lambda(1, -1, 2)$. Faça a interseção desta reta com $\pi$:

$$0 = (-1 + \lambda - (-2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) = 6\lambda + 3$$

$\lambda = -1/2$ e $P' = (-3/2, -3/2, 0)$. Termine o exercício...

Exercício: Mostre que o lugar geométrico dos ponto do espaço que são equidistantes do ponto $A = (1, -1, 2)$ e do ponto $B = (4, 3, 1)$ é um plano. Mostre ainda que este plano contém o ponto médio do segmento $AB$ e é perpendicular a reta que contém os pontos $A$ e $B$.

Resolução: $P = (x, y, z)$ tal que $d(P, A) = d(P, B)$:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2$$

$$6x + 8y - 2z - 20 = 0 \quad 3x + 4y - z - 10 = 0$$

Seja $M = (5/2, 1, 3/2)$ o ponto médio do segmento $AB$.

$$3(5/2) + 4.1 - 3/2 - 10 = 10 - 10 = 0$$

logo $M$ pertence ao plano. O vetor $\overrightarrow{AB} = (3, 4, -1)$ é paralelo ao vetor normal do plano e portanto o plano é perpendicular à reta $AB$.

Exercício Obtenha uma equação vetorial da reta $r$ paralela a
$s: \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, concorrente com
$t: X = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$ e que dista 1 do ponto
$A = (1, 2, 1)$.

Resolução: $r: X = (-1, 1-\lambda, 1+2\lambda) + \mu(1,0,2) = B + \mu\vec{u}$.

$$d(A,r) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1$$

$$(-2-2\lambda)^2 + (4+2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 = 5$$

$$9\lambda^2 + 26\lambda + 16 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -2, -\frac{8}{9}$$

Exercício: Obtenha uma equação vetorial da reta $t$, paralela ao plano $\pi\colon z = 0$, que dista 3 dele, e é concorrente com as retas $r\colon X = (1, -1, -1) + \lambda(1, 2, 4)$ e $s\colon \begin{cases} x - y = 1 \\ 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$

Resolução: Podemos escrever: $s\colon \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 2\mu \\ z = 3 + 3\mu. \end{cases}$ Sejam

$A = (1 + \lambda, -1 + 2\lambda, -1 + 4\lambda) \in r \cap t$ e
$B = (1 + 2\mu, 2\mu, 3 + 3\mu) \in s \cap t$. Então $t$ é a reta $AB$. O vetor
$\vec{\eta} = (0, 0, 1)$ é normal ao plano $\pi$. Então

$$0 = \vec{\eta} \cdot \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) \cdot (2\mu - \lambda, 2\mu - 2\lambda + 1, 3\mu - 4\lambda + 4) = 3\mu - 4\lambda + 4.$$

$$d(A, \pi) = |-1 + 4\lambda| = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1\,(\mu = 0)\,\text{ou}\ \lambda = -\frac{1}{2}\,(\mu = -2).$$

$$t : X = (2, 1, 3) + \lambda(-1, -1, 0)$$

ou

$$t : X = (\frac{1}{2}, -2, -3) + \lambda(-\frac{7}{2}, -2, 0)$$

## Ângulo

Exercício: Determine uma equação vetorial da reta $r$, contida no plano $\pi\colon x + y = 0$, que forma um ângulo de $\pi/6$ radianos com o plano $\alpha\colon y - z = 1$ e dista 1 do eixo-$x$.

Resolução: Seja $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor diretor de $r$. Então

$$r \subset \pi \;\Rightarrow (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = a + b = 0 \;\Rightarrow a = -b.$$

$$\sin \pi/6 = \frac{|\vec{u} \cdot (0, 1, -1)|}{\|\vec{u}\| \, \|(0, 1, -1)\|} = \frac{|b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$2|b - c| = \sqrt{2(2b^2 + c^2)} \;\Rightarrow 2c^2 - 8bc = 0 \;\Rightarrow c = 4b \text{ ou } c = 0$$

$$\vec{u} = (-b, b, 4b) \text{ ou } (-b, b, 0) \;\Rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 4) \text{ ou } (-1, 1, 0)$$

Seja $A=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto de $r$. Então $x_0+y_0=0$. Seja $B=(0,0,0)$ um ponto do eixo $x$ e $\vec{v}=(1,0,0)$ um vetor diretor do eixo $x$. Assim,

$$1 = d(r, \text{eixo}\, x) = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot \vec{u}\wedge \vec{v}|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$$

$$= \frac{|(-y_0,y_0,z_0)\cdot(0,-4,1)|}{\sqrt{17}} \text{ ou } \frac{|(-y_0,y_0,z_0)\cdot(0,0,1)|}{\sqrt{1}}$$

$z_0=\sqrt{17}+4y_0$ e
$A=(-y_0,y_0,\sqrt{17}+4y_0)=(0,0,\sqrt{17})+y_0(-1,1,4)$ ou
$z_0=-\sqrt{17}+4y_0$ e
$A=(-y_0,y_0,-\sqrt{17}+4y_0)=(0,0,-\sqrt{17})+y_0(-1,1,4)$. Ou,
$z_0=1$ e $A=(-y_0,y_0,1)=(0,0,1)+y_0(-1,1,0)$ ou $z_0=-1$ e
$A=(-y_0,y_0,-1)=(0,0,-1)+y_0(-1,1,0)$

$$X=(0,0,\sqrt{17})+y_0(-1,1,4)+\lambda(-1,1,4)=(0,0,\sqrt{17})+\mu(-1,1,4)$$

$$X=(0,0,\sqrt{17})+\mu(-1,1,4)$$