Classificação de seções cônicas

R. Wik Atique

Considere uma seção cônica: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

- Caso $b = 0$: completar quadrados: $ax^2 + dx = a(x + \frac{d}{2a})^2 - \frac{d^2}{4a}$.
- Caso $b \neq 0$. Podemos escrever a seção cônica na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0.$$

Sejam $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$. Logo podemos escrever a cônica como:

$$X^t AX + DX + f = 0. \qquad (1)$$

Teorema 1. *Dada uma matriz A simétrica existe uma matriz P ortogonal tal que $A = PBP^t$.*

Definição 1. *(a) A transposta de uma matriz A, denotada por A^t, é uma matriz cujas linhas são as colunas de A.*

(b) Uma matriz A é simétrica se $A^t = A$.

(c) Uma matriz é ortogonal se suas colunas forem vetores ortonormais. Se P é ortogonal, $P^t = P^{-1}$.

Aplicando o teorema à equação (1) temos:

$$X^t AX + DX + f = X^t PBP^t X + DX + f = (P^t X)^t B(P^t X) + DX + f = 0,$$

chamando $P^t X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ temos

$$(P^t X)^t B(P^t X) + DX + f = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + DP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + f = 0$$

Teorema 2. *Sejam λ_1, λ_2 números reais e v_1, v_2 vetores ortonormais (vistos como matrizes colunas) tais que $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2$. Então $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e as colunas de P são os vetores v_1 e v_2. Dizemos que λ_i é autovalor de A e v_i é autovetor de A associado ao autovalor λ_i.*

Prova.

$$P^t AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P^t Av_1 = P^t \lambda_1 v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P^t AP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P^t Av_2 = P^t \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observação 1. *Para calcular λ_i temos que $Av_i = \lambda_i v_i$. Logo $(A - \lambda_i I)v_i = 0$. Como queremos solução não trivial devemos ter $det(A - \lambda_i I) = 0$.*

Exemplo 1. *Considere a cônica:* $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$.

Então $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *e*

$$det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Logo $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 2$.

Para calcular v_1 resolvemos o sistema (procuramos solução de norma 1):

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Para calcular v_2 resolvemos o sistema (procuramos solução de norma 1):

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

Então $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ *e a nova equação da cônica é:*

$$4u^2 + 2v^2 + \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 = 0$$

$$4u^2 + 2v^2 + 8u + 4v + 2 = 0.$$

Completando o quadrado temos:

$$4(u+1)^2 + 2(v+1)^2 - 4 = 0.$$

Chamando $s = u + 1$ e $t = v + 1$ temos a equação reduzida da cônica:

$$4s^2 + 2t^2 = 4,$$

ou

$$s^2 + \frac{t^2}{2} = 1,$$

que representa uma elipse.

Exemplo 2. *Considere a cônica:* $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y + 2 = 0$.

Então $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e*

$$det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Logo $\lambda_1 = 5$ *e* $\lambda_2 = 0$.

Para calcular v_1 *resolvemos o sistema (procuramos solução de norma 1):*

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{pmatrix} 4-5 & 2 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim $v_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Para calcular v_2 *resolvemos o sistema (procuramos solução de norma 1):*

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = \begin{pmatrix} 4-0 & 2 \\ 2 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$.

Então $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ *e a nova equação da cônica é:*

$$5u^2 + 0v^2 + \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + 2 = 0$$

$$5u^2 + \frac{15}{\sqrt{5}}u + 2 = 0.$$

Completando o quadrado temos:

$$5(u + \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 = \frac{1}{4}.$$

Chamando $s = u + \frac{3}{2\sqrt{5}}$ *temos a equação reduzida da cônica:*

$$s^2 = \frac{1}{20},$$

que representa duas retas paralelas.