Resolução da Atividade 6

Para a cônica descrita pela equação

$$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0 \quad ,$$

i) Reduza a sua equação de forma a obter uma expressão mais simples, através de uma translação e/ou rotação;

ii) No caso de usar uma rotação, dê o ângulo;

iii) Reconheça a cônica;

iv) Faça um esboço da cônica juntamente com o sistema de coordenadas (x, y). Apresente também o sistema de coordenados em que a cônica tem a equação reduzida como em i).

↪ Resolução: Da equação da cônica no sistema de coordenadas (x, y) extraímos os coeficientes $a = 32$, $b = 52$, $c = -7$ e $f = 180$.

Como não há termos lineares em sua expressão, podemos simplificá-la através de uma rotação dos eixos coordenados por um ângulo conveniente $0 < \theta < \pi/2$. A escolha desse ângulo é tal que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{52}{32-(-7)} = \frac{52}{39} = \frac{4}{3} > 0$$

Logo, consideramos

(Resposta do item ii))

$$\theta = \frac{\operatorname{arctg} 4/3}{2} \, .$$

Note que $\theta < \pi/4$.

Nesse caso, a equação da cônica em um novo sistema de coordenados (u, v) é dada por

$$a' u^2 + c' v^2 + f' = 0,$$

em que $f' = f = 180$ e $a', c' \in \mathbb{R}$ solucionam o sistema linear

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 32 - 7 = 25 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 2\theta} = b\sqrt{1 + \dfrac{(a-c)^2}{b^2}} = 52\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{52 \cdot 5}{4} = 65 \end{cases}$$

Somando as duas equações, tem-se que $2a' = 90$, de forma que $a' = 45$ e $c' = -20$. Ou seja, nas variáveis u e v a cônica tem equação descrita por

$$45u^2 - 20v^2 + 180 = 0,$$

ou, equivalentemente, (Resposta do item i)

$$-\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} = 1 \quad .$$

Trata-se então de uma (Resposta do item iii)

hipérbole

cujas folhas intersectam o eixo v nos vértices $(0,3)$ e $(0,-3)$, representadas no sistema de coordenadas rotacionado.

Entretanto, no sistema de coordenadas (x,y) original, a cônica intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0,y)$ com y tal que

$$32 \cdot 0^2 + 52 \cdot 0 \cdot y - 7y^2 + 180 = 0, \text{ ou seja,}$$

quando $y = \pm\sqrt{\dfrac{180}{7}}$.

Analogamente, como $32x^2 + 52x \cdot 0 - 7 \cdot 0^2 + 180 = 0$ é uma equação que não tem soluções em x, a cônica não intersecta o eixo das abscissas. Logo, um esboço para a hipérbole encontrada pode ser dado por