Questão 6: Determine os pontos da reta $r: X=(0,1,1)+\lambda(1,1,2)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ que equidistam dos planos

$$\pi_1: x+2y-z-3=0 \quad e \quad \pi_2: x-y+2z=1$$

Solução: Lembre que dado $P=(x_0,y_0,z_0)$ um ponto do espaço e $\pi: ax+by+cz+d=0$ um plano dado pela sua equação geral, temos que a distância de P ao plano π é dado por:

$$d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Seja $P=(\lambda,1+\lambda,1+2\lambda)$ para $\lambda\in\mathbb{R}$ um ponto da reta r. Vamos calcular a distância de P ao π_1,

$$d(P,\pi_1)=\frac{|\lambda+2(1+\lambda)+(-1)(1+2\lambda)-3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|\lambda-2|}{\sqrt{6}}.$$

Agora vamos calcular a distância de P ao π_2,

$$d(P,\pi_2)=\frac{|\lambda+(-1)(1+\lambda)+2(1+2\lambda)-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{|4\lambda|}{\sqrt{6}}.$$

Note que o conjunto dos pontos de r que equidistam de π_1 e π_2 são os $P\in r$ tal que

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2),$$

logo $\frac{|\lambda-2|}{\sqrt{6}}=\frac{|4\lambda|}{\sqrt{6}}$. Com isso, o conjunto procurado é o conjunto de pontos da forma $P=(\lambda,1+\lambda,1+2\lambda)$ onde $|\lambda-2|=|4\lambda|$, isto é, $4\lambda=\lambda-2$ ou $4\lambda=2-\lambda$, daí $\lambda=\frac{2}{5}$ ou $\lambda=-\frac{2}{3}$.

Portanto os pontos de r que equidistam de π_1 e π_2 são

$$\left\{\left(\frac{2}{5},1+\frac{2}{5},1+\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{2}{3},1-\frac{2}{3},1-\frac{4}{3}\right)\right\}.$$