Uma equação geral para o plano π que contém a reta

$$r: \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

e é paralelo à reta $s : x - 1 = y = z - 1$ é

Resolução

Use a ideia de feixe de planos para resolver.

Apresente sua resolução manuscrita. Resposta direta (sem os cálculos) não será pontuada.

Como π contém a reta r, π pertence ao feixe de planos dessa reta. Ou seja, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ tais que

$$\pi: \alpha(y-1) + \beta(x+z) = 0$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$\pi: \beta x + \alpha y + \beta z - \alpha = 0 ,$$

de onde concluímos que um vetor normal a π é expresso em coordenadas como $\vec{n} = (\beta, \alpha, \beta)$.

Visto que π é paralelo a reta s, o vetor $\vec{n}$ é ortogonal ao vetor diretor de s. Para determinarmos esse vetor diretor, escrevemos

$$x - 1 = y = z - 1 = \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Essas igualdades se traduzem então na seguinte equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \cdot 1 \\ y = 0 + \lambda \cdot 1 \\ z = 1 + \lambda \cdot 1 \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Logo, um vetor diretor de s pode ser escrito em coordenadas como $\vec{v} = (1,1,1)$.

Dado que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (pois $\vec{n}$ e $\vec{v}$ são ortogonais), obtemos que

$$2\beta + \alpha = (\beta, \alpha, \beta) \cdot (1,1,1) = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

Logo, $\alpha = -2\beta$, com $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Em particular, devemos ter $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Assim, escrevemos a equação geral de π como

$$\pi: \ \beta x - 2\beta y + \beta z + 2\beta = 0$$

Ao dividirmos os dois lados dessa equação por β, escrevemos a equação geral de π também como

$$\boxed{\pi: \ x - 2y + z + 2 = 0}$$