USP/ICMC/Departamento de Matemática

SMA0300 Geometria Analítica - Atividade 2

20.04.2023

Nome: RESOLUÇÃO **Número USP:**

Para α um número real, considere os seguintes vetores de V^3 expressos na base canônica $C = (\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$:

$$\vec{f_1} = (1, 0, 0)_C, \quad \vec{f_2} = (-1, 2, 0)_C, \quad \vec{f_3} = (-1, 1, \alpha)_C.$$

(a) Determine todos os possíveis valores de α para que $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ sejam LI.

Para que $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ sejam L.I., o determinante da matriz abaixo, cujas linhas são as coordenadas desses vetores na base C, deve ser não nulo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Como $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = 2\alpha$ (pelo método dos cofatores, por exemplo), o conjunto de valores possíveis para α é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Para os valores de α do item (a), qual é a matriz M_{CF} de mudança da base canônica C para a base $F : (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$? Deixe sua resposta em função de α.

A matriz de mudança da base canônica C para a base F possui como colunas as coordenadas de $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ em C, nessa ordem.

Logo, $M_{CF} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

(c) Para $\alpha = 1$, escreva o vetor $\vec{v} = (0, 3, 1)_C$ na base F.

Seja $\vec{v} = (x, y, z)_F$ a representação em coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base F. Então, como $\vec{v} = (0, 3, 1)_C$ é a representação de $\vec{v}$ em termos de suas coordenadas na base canônica,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_C = M_{CF} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Para $\alpha = 1$, essas igualdades matriciais equivalem ao sistema linear (escalonado) ao lado, cuja solução é $z = 1$, $y = 1$, $x = 2$. Logo, $\vec{v} = (2, 1, 1)_F$.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Como $z = 1$, $2y = 3 - z = 2$. Assim, $y = 1$.

Como $z = y = 1$, $x = y + z = 2$.