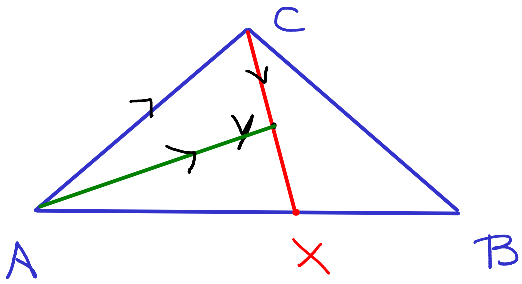
Seja ABC um triângulo de vértices A, B e C. Seja X um ponto do segmento AB t.q. $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{XB}$. Seja Y o ponto médio do segmento CX. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\overrightarrow{AY} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, então $a + b$ é igual a:

Solução:



Temos, das informações dadas,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AY} &= a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}\\ &= a(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}) + b\overrightarrow{AC}\\ &= a(\overrightarrow{AX} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AX}) + b\overrightarrow{AC}\\ &= a\left(\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AX}\right) + b\overrightarrow{AC}\\ &= \left(\tfrac{3}{2}a\right)\overrightarrow{AX} + b\overrightarrow{AC}. \quad (*)\end{aligned}$$

Por outro lado, veja que $\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{YX}$ e

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{YX}. \quad (**)$$

Queremos escrever $\overrightarrow{AY}$ como uma soma que envolva $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AC}$ para podermos comparar com $(*)$.

Observe que já temos o $\overrightarrow{AC}$. Note que,

$$\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AX}$$

então, substituindo em $(**)$

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AX}$$

logo, $2\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}$. Então,

$$\overrightarrow{AY} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Temos assim duas expressões para a $\overrightarrow{AY}$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AY} = \left(\frac{3}{2}a\right)\overrightarrow{AX} + b\,\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AY} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

logo,

$$\left(\frac{3}{2}a\right)\overrightarrow{AX} + b\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

então, igualando os coeficientes dos respectivos vetores,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Portanto, $a + b = \frac{5}{6}$.