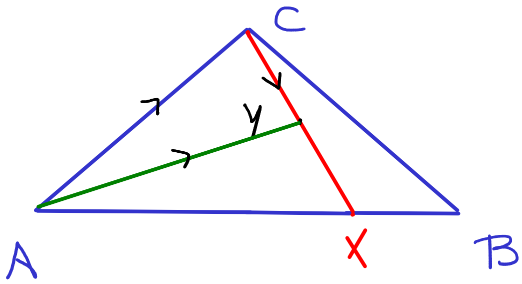
Seja $ABC$ um triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$. Seja $X$ um ponto do segmento $AB$ t.q. $\overrightarrow{AX} = 3\overrightarrow{XB}$. Seja $Y$ o ponto médio do segmento $CX$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $\overrightarrow{AY} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, então $a+b$ é igual a:

Solução:




Temos, das informações dadas,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AY} &= a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \\
&= a\left(\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}\right) + b\overrightarrow{AC} \\
&= a\left(\overrightarrow{AX} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AX}\right) + b\overrightarrow{AC} \\
&= a\left(\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{AX}\right) + b\overrightarrow{AC} \\
&= \left(\tfrac{4}{3}a\right)\overrightarrow{AX} + b\overrightarrow{AC}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, veja que $\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{YX}$ e

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{YX}. \qquad (**)$$

Queremos escrever $\overrightarrow{AY}$ como uma soma que envolva $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AC}$ para podermos comparar com $(*)$.

Observe que já temos o $\overrightarrow{AC}$. Note que,

$$\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AX} = -\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AX}$$

então, substituindo em $(**)$

$$\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{AX}$$

logo, $2\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}$. Então,

$$\overrightarrow{AY} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AX}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Temos assim duas expressões para a $\overrightarrow{AY}$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AY} = \left(\frac{4}{3}a\right)\overrightarrow{AX} + b\,\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AY} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

logo,

$$\left(\frac{4}{3}a\right)\overrightarrow{AX} + b\,\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

então, igualando os coeficientes dos respectivos vetores,

$$\begin{cases} \frac{4}{3}a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Portanto, $a+b = \frac{7}{8}$.