USP/ICMC/SMA

SMA0300 Geometria Analítica
Atividade Avaliativa 1

30 de março de 2023

Professora: Miriam Manoel / Curso: Estatística e Ciência de Dados

Nome ______________________________

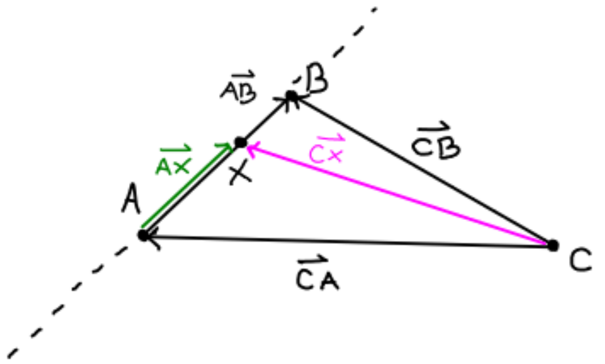
Número USP ______________________________

Resolução

Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Se $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ e se X é um ponto sobre a reta que passa por A e B e tal que $\overrightarrow{CX}$ é paralelo a $\vec{u}$, então

- (●) $\overrightarrow{CX} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$
- ( ) $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$
- ( ) $\overrightarrow{CX} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$
- ( ) nenhuma das demais alternativas é verdadeira.
- ( ) $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$
- ( ) $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

(Apenas marcar a alternativa não tem pontuação.)



Como $\overrightarrow{CX}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar tal que $\overrightarrow{CX} = \alpha\vec{u}$.

Da mesma forma, os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos, pois X se encontra na reta que contém o segmento AB. Ou seja, existe também um escalar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \beta\overrightarrow{AB}$.

Porém, como $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$ pela definição de soma vetorial, devemos ter $\alpha\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AB}$. Sabendo que $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, desenvolvemos essa expressão como

$$\alpha\left(\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AB}$$

Por sua vez, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$, novamente pela definição de soma vetorial. Assim, a igualdade acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\alpha\left(\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)\right) = \overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{AB}$$

Entretanto, utilizando as propriedades aritméticas da soma vetorial e do produto por escalar, essa expressão pode ser convenientemente apresentada como

$$\left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha - 1\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3}\alpha - \beta\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Contudo, por representarem os lados de um triângulo, os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são paralelos ou, de maneira equivalente, são linearmente independentes. Assim, os coeficientes que os acompanham na combinação linear acima devem se anular, descrevendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\alpha - 1 = 0 \\ \\ \frac{1}{3}\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação segue que $\alpha = 3/4$, de forma que

$$\overrightarrow{CX} = \alpha\vec{u} = \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}.$$