USP/ICMC/SMA

SMA0300 Geometria Analítica
Atividade Avaliativa 1

30 de março de 2023

Professora: Miriam Manoel / Curso: Estatística e Ciência de Dados

Nome ______________________________

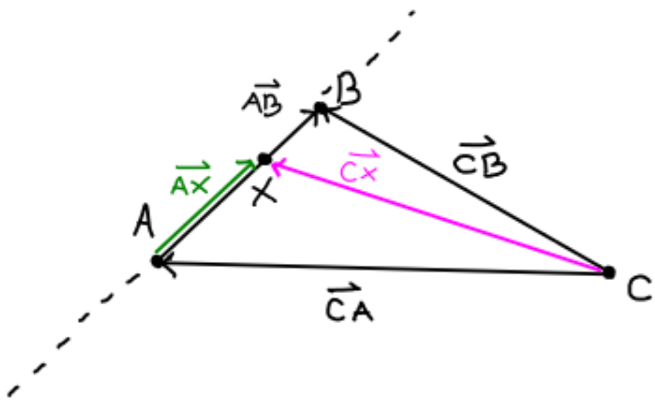
Número USP ______________________________

Resolução

Sejam A, B e C vértices de um triângulo. Se $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$ e se X é um ponto sobre a reta que passa por A e B e tal que $\vec{CX}$ é paralelo a $\vec{u}$, então

- ○ $\vec{CX} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$
- ● $\vec{CX} = \frac{2}{5}\vec{CA} + \frac{3}{5}\vec{CB}$
- ○ $\vec{CX} = \frac{3}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB}$
- ○ $\vec{CX} = \frac{3}{5}\vec{CA} + \frac{2}{5}\vec{CB}$
- ○ nenhuma das demais alternativas é correta.
- ○ $\vec{CX} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{3}{4}\vec{CB}$

(Apenas marcar a alternativa não tem pontuação.)



Sendo $\vec{CX}$ paralelo ao vetor $\vec{u}$, deve haver $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar tal que $\vec{CX} = \alpha \vec{u}$.

Da mesma forma, como X pertence à reta que contém o segmento AB, o vetor $\vec{AX}$ é paralelo ao vetor $\vec{AB}$. Isto é, existe também um escalar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{AX} = \beta \vec{AB}$.

Porém, pela definição de soma vetorial, $\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{AX}$, de onde podemos concluir que $\alpha \vec{u} = \vec{CA} + \beta \vec{AB}$. Sabendo que $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$, essa expressão se escreve ainda como

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}\right) = \vec{CA} + \beta\vec{AB}$$

Por sua vez, a definição da soma vetorial nos revela novamente que $\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB}$. Assim, a igualdade acima equivale a

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{2}\left(\vec{CA} + \vec{AB}\right)\right) = \vec{CA} + \beta\vec{AB}$$

Utilizando as propriedades aritméticas da soma vetorial e do produto por escalar, reproduzimos essa expressão como

$$\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha - 1\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{2}\alpha - \beta\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Porém, representando os lados de um triângulo, os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{AB}$ são não paralelos ou, de modo equivalente, são linearmente independentes. Isso significa que os coeficientes que os acompanham na combinação linear acima são nulos. Logo, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\alpha - 1 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

, cuja única solução é dada por $\alpha = \frac{6}{5}$ e $\beta = \frac{3}{5}$.

Em particular,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha\vec{u} = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CB} .$$