

① Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} , resolva o sistema nas inequações vetoriais \vec{x} e \vec{y} , apresentando as passagens dos seus cálculos vetoriais:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{u} & (1) \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{v} & (2) \end{cases}$$

Solução: Considere (1). Somando em ambos os membros o vetor $-\vec{y}$, temos,

$$(\vec{x} + \vec{y}) + (-\vec{y}) = \vec{u} + (-\vec{y}),$$

e pela associatividade

$$\vec{x} + (\vec{y} + (-\vec{y})) = \vec{u} + (-\vec{y}).$$

Usando a notação $\vec{u} - \vec{y}$ para $\vec{u} + (-\vec{y})$ e considerando que a soma de um vetor com seu oposto é o vetor nulo, obtemos

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{u} - \vec{y}. \quad (*)$$

Logo, pela propriedade do elemento neutro, $\vec{x} = \vec{u} - \vec{y}$.

Substituindo em (2), temos

$$(\vec{u} - \vec{y}) - \vec{y} = \vec{v}$$

logo, pela associatividade, $\vec{u} + (-\vec{y} - \vec{y}) = \vec{v}$. Pela segunda propriedade do produto de vetor por escalar,

$$\vec{u} + (-1 - 1)\vec{y} = \vec{v},$$

então, $\vec{u} - 2\vec{y} = \vec{v}$. Somando $-\vec{u}$ em ambos os membros,

$$-\vec{u} + (\vec{u} - 2\vec{y}) = -\vec{u} + \vec{v}$$

pela associatividade,

$$((-\vec{u}) + \vec{u}) + (-2\vec{y}) = -\vec{u} + \vec{v}$$

logo, $-2\vec{y} = -\vec{u} + \vec{v}$. Multiplicando ambos os membros

por $-\frac{1}{2}$, obtemos

$$\vec{y} = -\frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{v})$$

e pela primeira propriedade do produto de vetor por escalar,

$$\vec{y} = \frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2}.$$

Lembre que $\vec{x} = \vec{u} - \vec{y}$, de acordo com (*). Então,

$$\vec{x} = \vec{u} - \left(\frac{\vec{u}}{2} - \frac{\vec{v}}{2} \right)$$

→ primeira propriedade do produto de vetor por escalar.

$$= \vec{u} + \left(-\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2} \right)$$

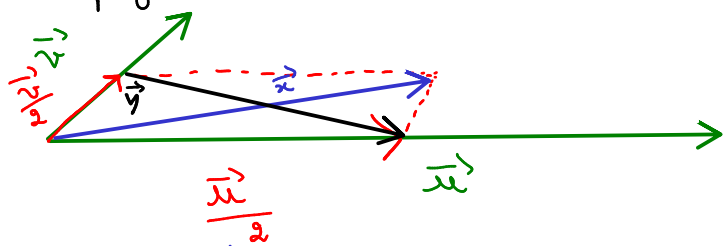
→ propriedade associativa

$$= \left(\vec{u} - \frac{\vec{u}}{2} \right) + \frac{\vec{v}}{2}$$

→ segunda propriedade do produto por escalar.

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \vec{u} + \frac{\vec{v}}{2} = \frac{1}{2} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v}.$$

2) No caso de \vec{u} e \vec{v} serem os vetores representados como na figura abaixo, represente os vetores \vec{x} e \vec{y} .



Solução: Vimos que

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Usando a regra do paralelogramo, conseguimos \vec{x} como na figura. Observe que a lógica para resolver o exercício é a mesma apresentada em aula, para representar os vetores soma $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$.

O vetor \vec{y} está representado em preto.