32ª aula SMA0300 GA

28ª aula síncrona – Semana 15

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Quinta-feira 25/06/2020

Na aula de hoje:

- **EPPA 28 (Exercício 13 lista 3)**
- **Coordenadas polares**

  1ª parte da aula: Apresentação das coordenadas polares

  2ª parte da aula: Relação entre as coordenadas polares e coordenadas cartesianas

- **Proposta do EPPA 29**

EPPA 28 – ex.13 – lista 3

a) Utilizando o método de completar o quadrado perfeito:

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2x - 8y + 16z + 9 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + 2(y^2 - 4y) + 4(z^2 + 4z) + 9 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 + 4z + 4) - 1 - 8 - 16 + 9 = 0$$

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 4(z+2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{8} + \frac{(z+2)^2}{4} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(z+2)^2}{2^2} = 1}$$

Essa é a equação da quádrica no sistema (x, y, z) (sistema antigo).

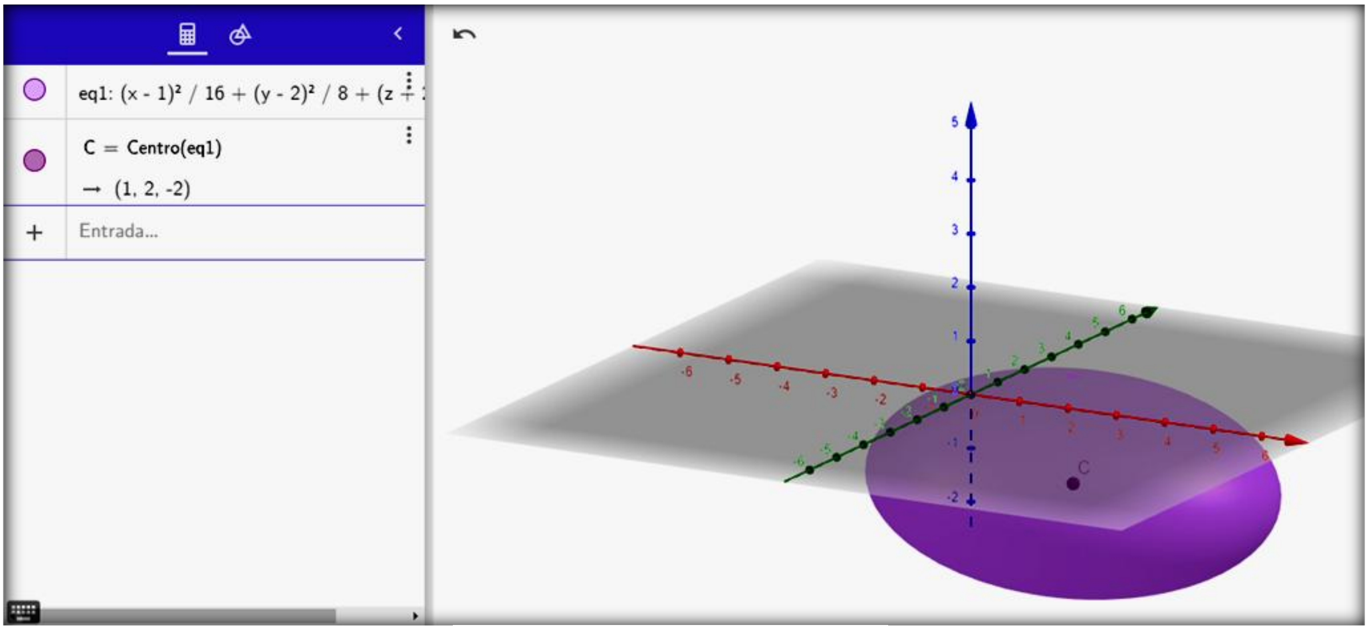
Sendo $u = x - 1$, $v = y - 2$ e $w = z + 2$, temos:

$$\boxed{\frac{u^2}{4^2} + \frac{v^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{w^2}{2^2} = 1}$$

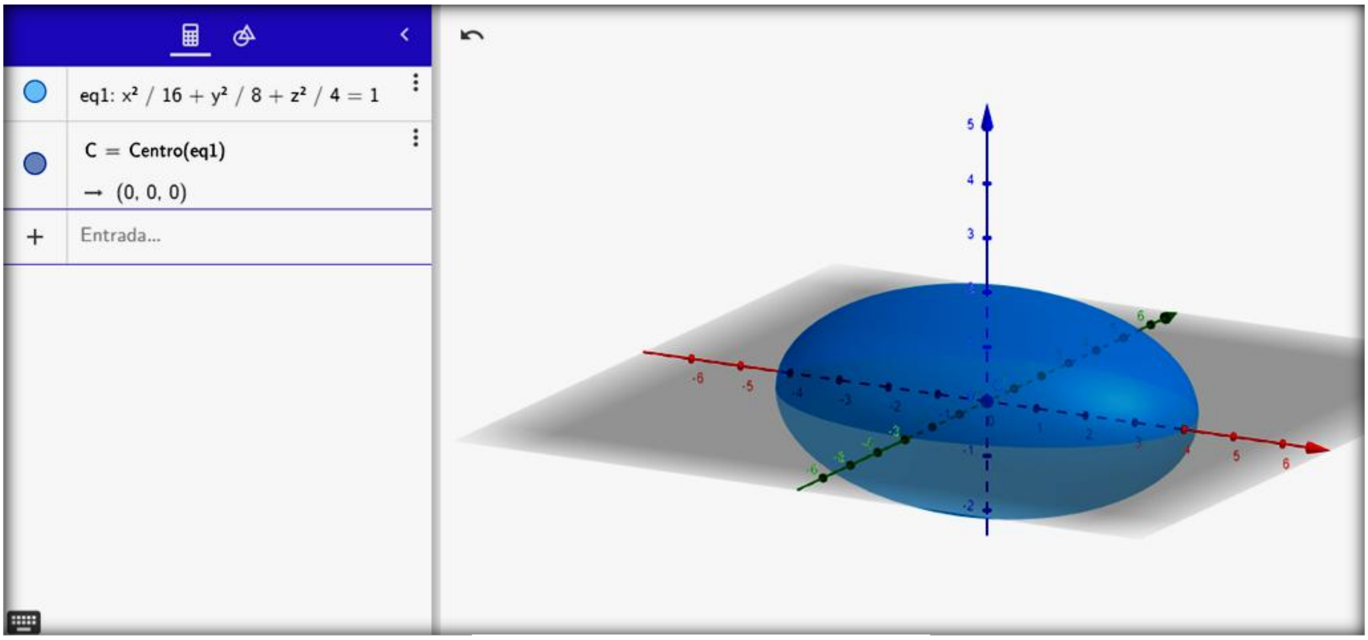
Essa é a equação da quádrica no sistema (u, v, w) (sistema novo).

A quádrica em questão é um elipsoide:

- Seu semieixo na abscissa (eixo x ou u) mede 4;
- Seu semieixo na ordenada (eixo y ou v) mede $2\sqrt{2}$;
- Seu semieixo na cota (eixo z ou w) mede 2;
- Seu centro é o ponto $(1, 2, -2)$ no sistema antigo e $(0, 0, 0)$ no sistema novo.



Elipsoide no sistema (x, y, z).



Elipsoide no sistema (u, v, w).

b) Novamente, utilizando o método de <u>completar o quadrado perfeito</u>:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4z - 2 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) + 4z - 2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + 4z - 1 - 1 - 2 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 - 4z$$

$$z-1=-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{4}$$

$$\boxed{z-1=-\left(\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}\right)}$$

Essa é a equação da quádrica no sistema (x, y, z) (sistema antigo).

Sendo $u = x-1$, $v = y-1$ e $w = z-1$, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{w=-\left(\frac{u^2}{2^2}+\frac{v^2}{2^2}\right)}}$$

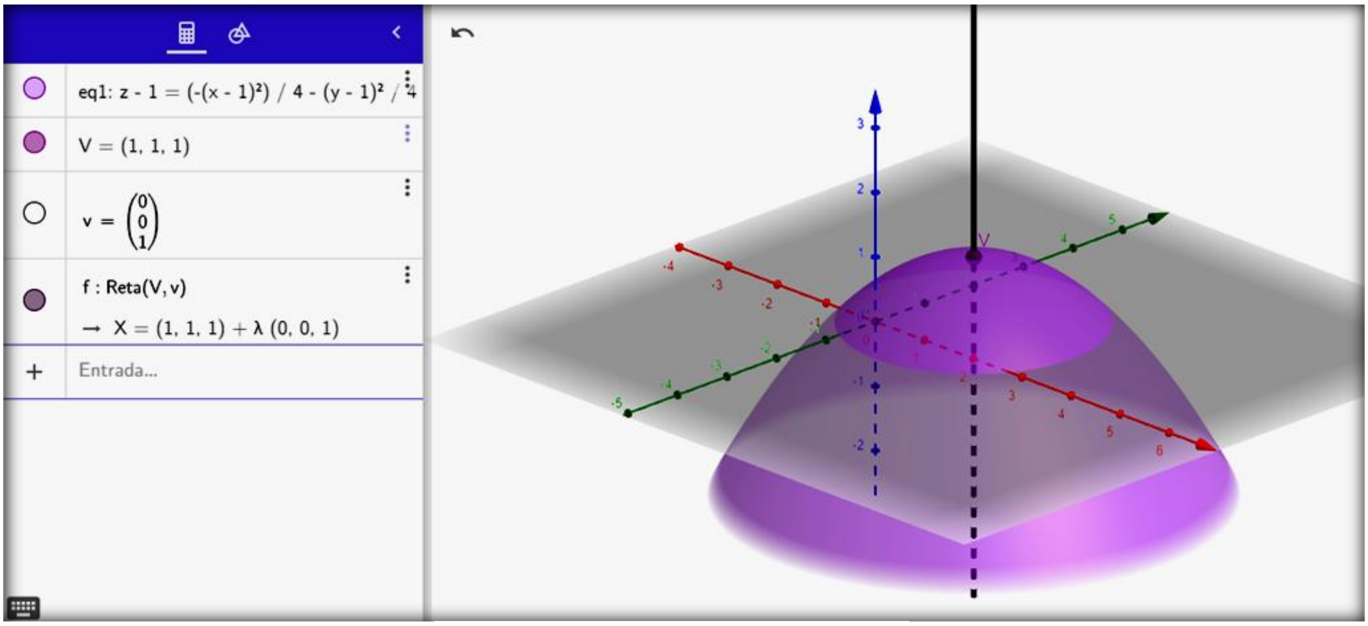
Essa é a equação da quádrica no sistema (u, v, w) (sistema novo).

A quádrica em questão é um paraboloide elíptico de revolução:

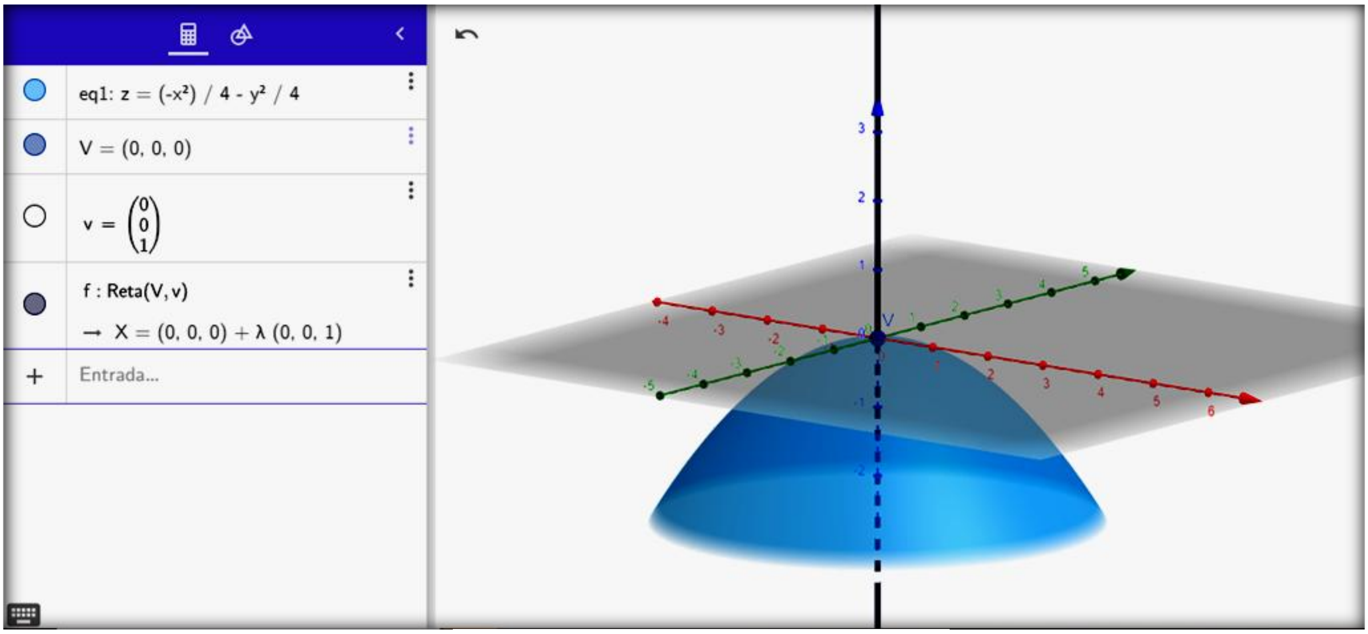
- É um paraboloide de "cabeça para baixo" (concavidade voltada para o eixo z, ou w, no sentido negativo);

- No sistema antigo:
  - Seu vértice é o ponto $(1,1,1)$;
  - Seu eixo de revolução é a reta $X=(1,1,1)+\lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$;
  - A sua interseção com qualquer plano de equação do tipo $z=a$, com $a<1$, é uma circunferência com centro em $(1,1,a)$ e raio $2\sqrt{1-a}$. No caso em que $a=1$, essa interseção é o próprio vértice do paraboloide.

- No sistema novo:
  - Seu vértice é o ponto $(0,0,0)$;
  - Seu eixo de revolução é a reta $X=(0,0,0)+\lambda(0,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
  - A sua interseção com qualquer plano de equação do tipo $z=a$, com $a<0$, é uma circunferência com centro em $(0,0,a)$ e raio $2\sqrt{-a}$. No caso em que $a=0$, essa interseção é o próprio vértice do paraboloide.



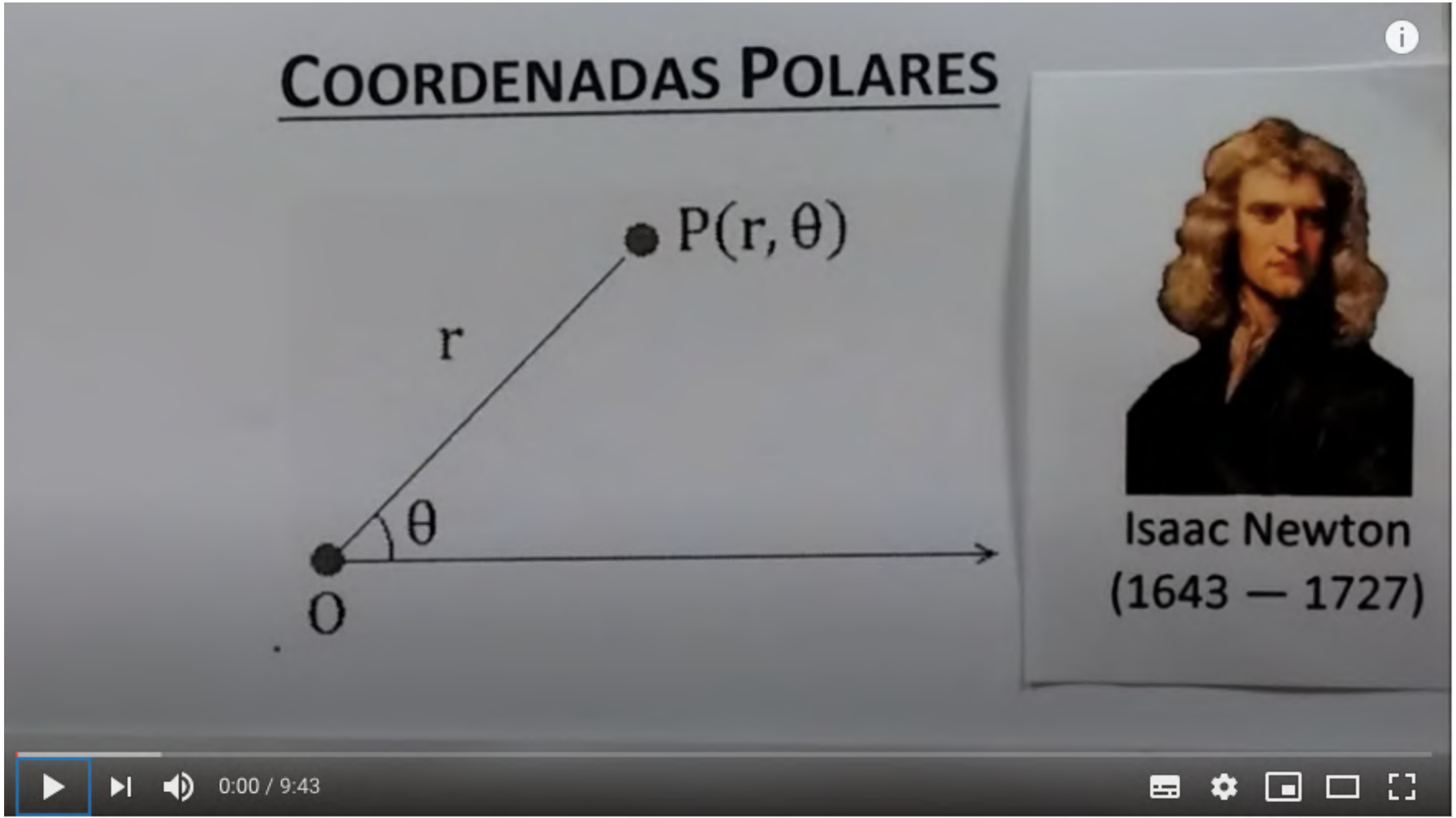
Paraboloide no sistema (x, y, z).



Paraboloide no sistema (u, v, w).

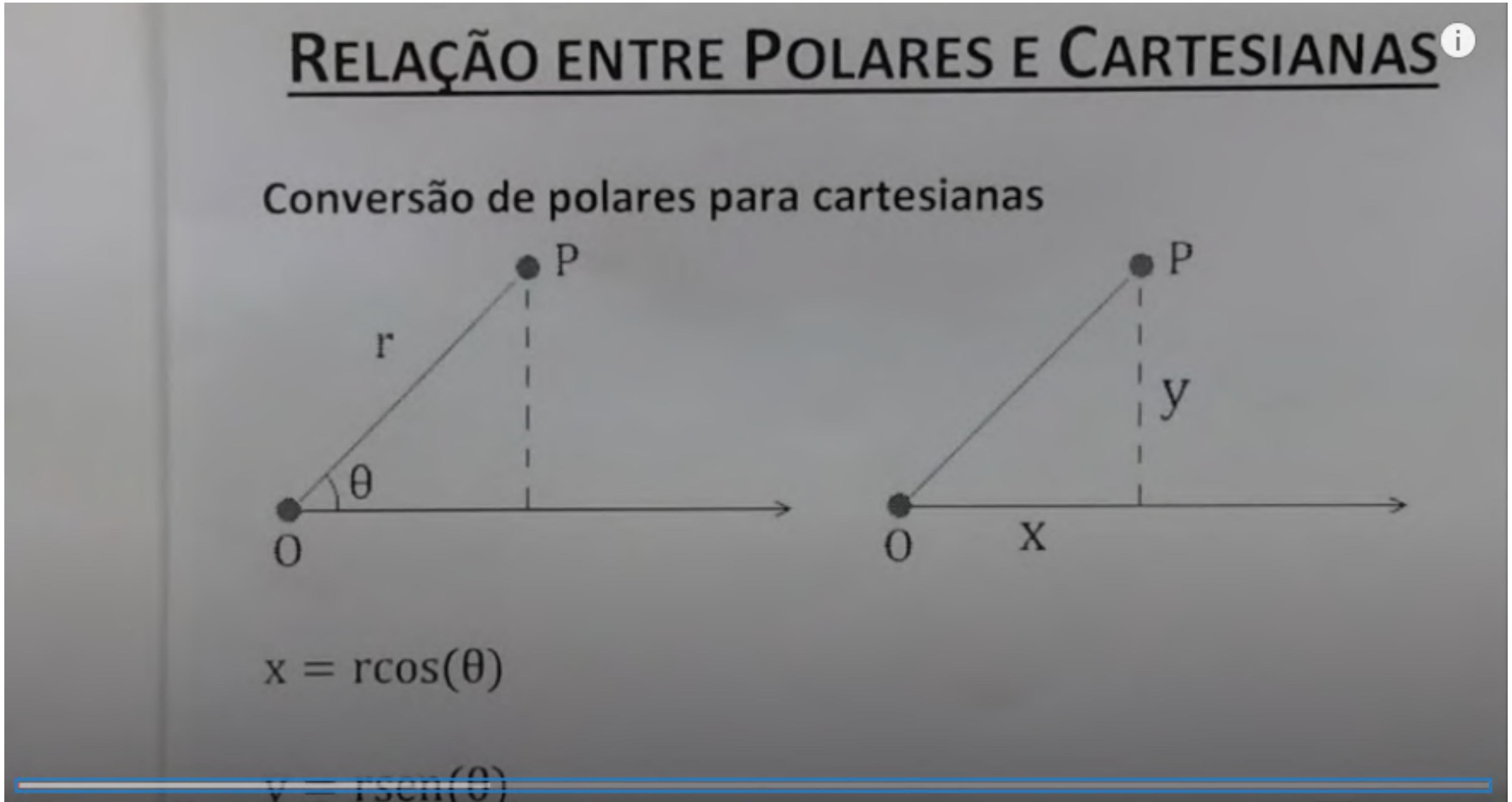
1ª parte. Apresentação das coordenadas polares

https://www.youtube.com/watch?v=4jUyBiB1Uy4



2ª parte. Relação entre as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas

https://www.youtube.com/watch?v=vpl9lZTyznU



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \longleftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan(\theta) = y/x \ \text{se } x \neq$$

Qual é a curva no plano que tem, em coords. polares, equação

$\boxed{r = 2}$ nas variáveis r, θ

Geometricamente:

r	θ
2	0
2	$\pi/4$
2	
2	
2	
$\vdots$	$\vdots$

Algebricamente:

$$2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2 = 4}$$

Calc I

$y = f(x)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Vamos esboçar a curva dada em coords. polares pela equação

$$\boxed{r = 2\cos\theta}$$

$r(\theta) = 2\cos\theta$

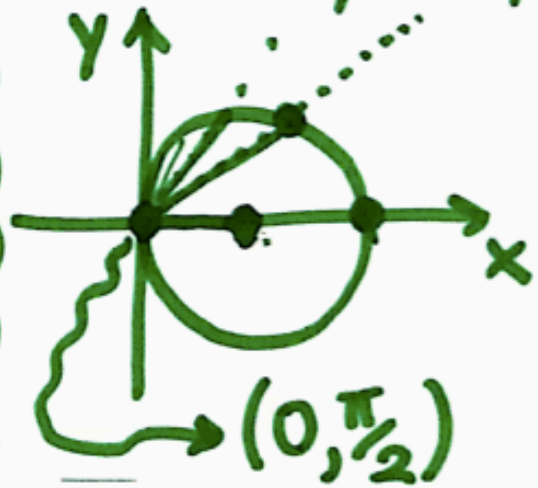
$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

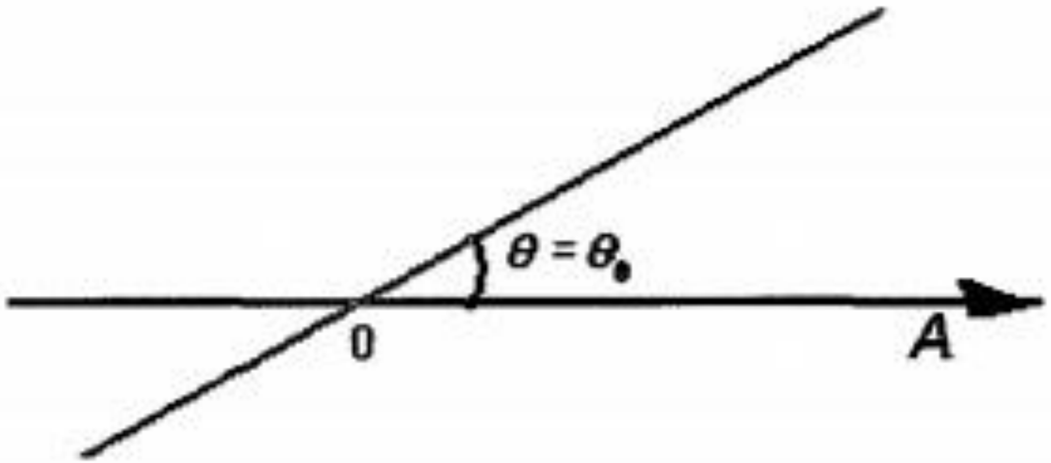
$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

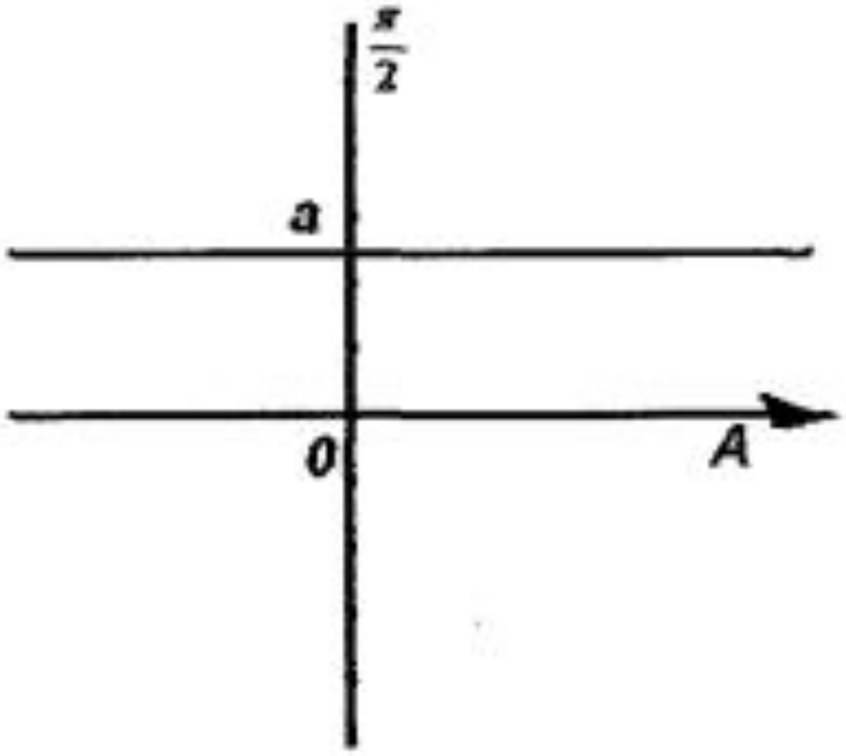


Equações de algumas RETAS em coordenadas polares

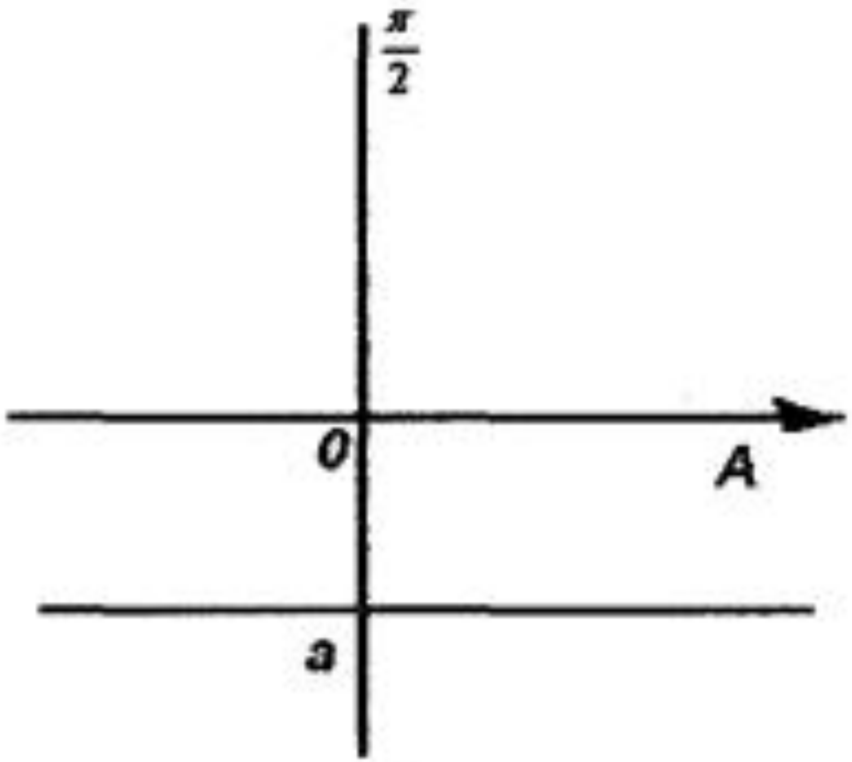
(a) $\theta = 0$ ou $\theta = \theta_0$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de θ_0 ou θ_0 radianos com o eixo polar;



(b) $rsen\theta = a$ é uma reta paralela ao eixo polar.

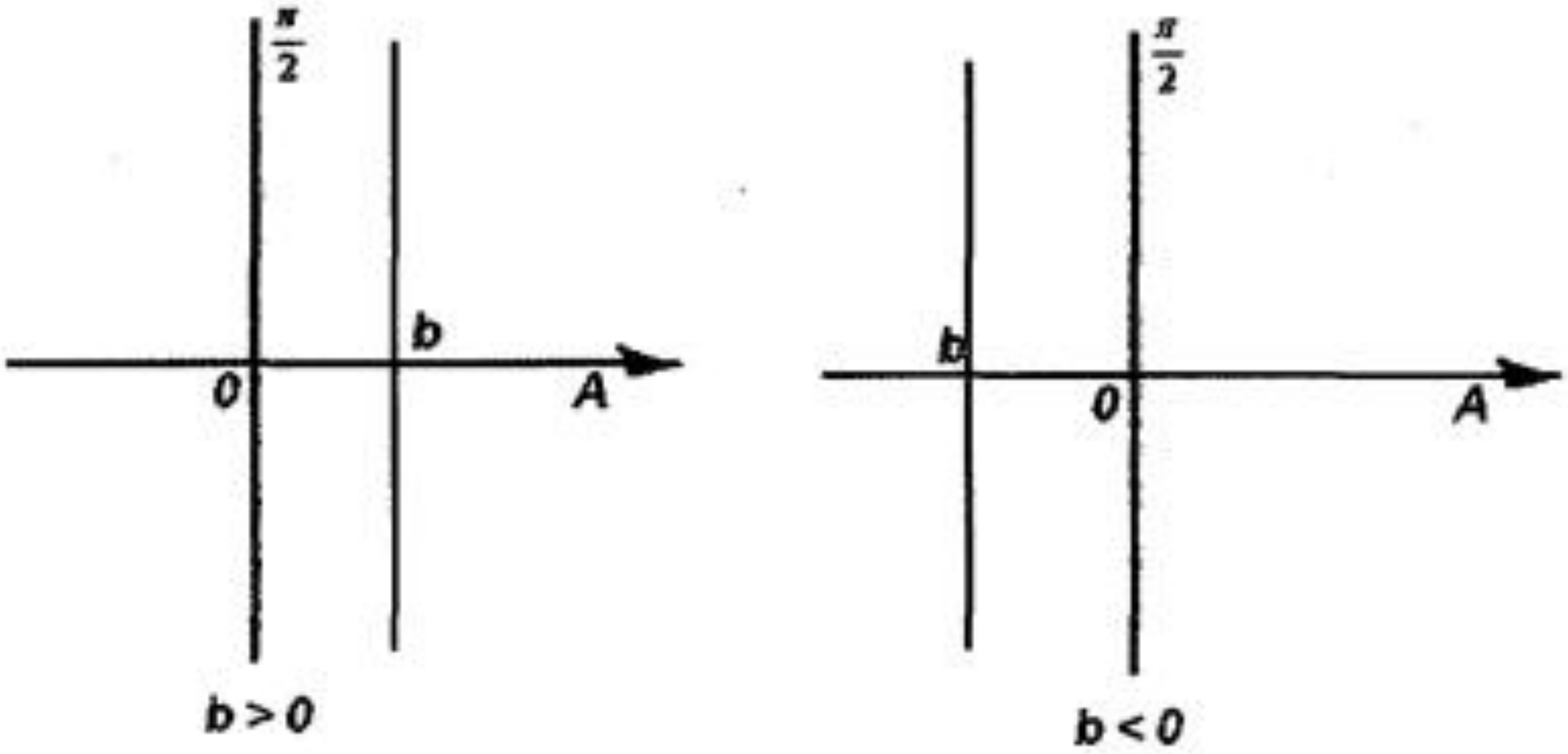


a > 0



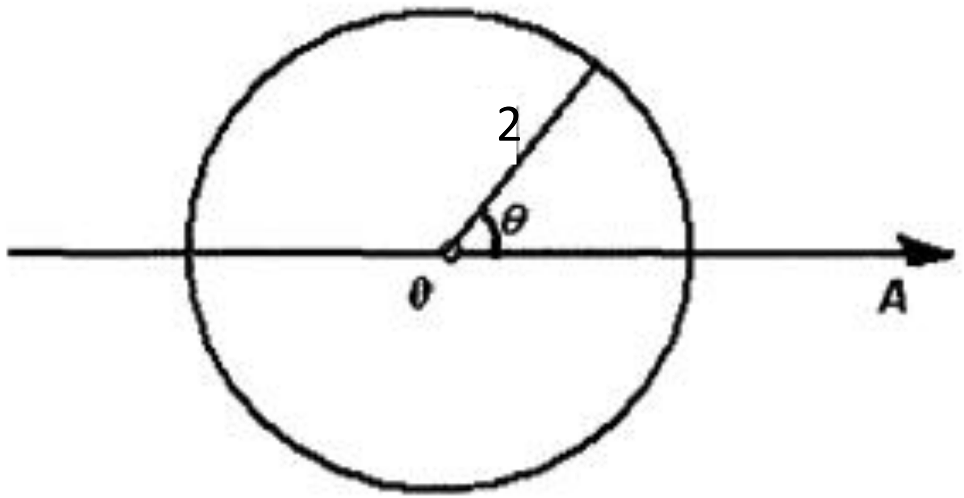
a < 0

(c) $r\cos\theta = b$ é uma reta paralela ao eixo $\dfrac{\pi}{2}$;



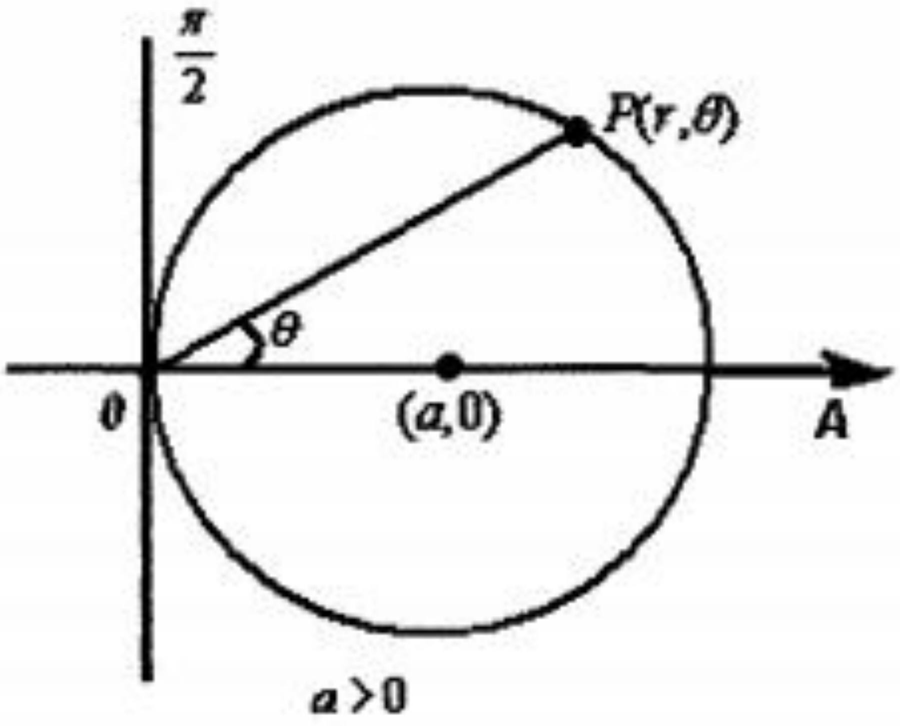
Equações de algumas CIRCUNFERÊNCIAS em coordenadas polares

(a) $r = 2$ em coordenadas polares é a equação de uma circunferência centrada no pólo e raio 2

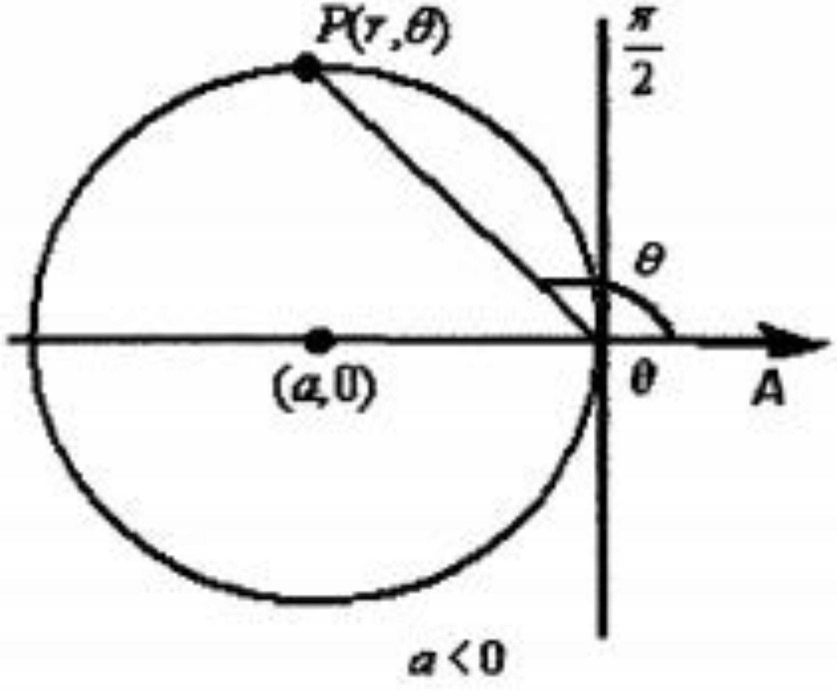


(b) $r = a\cos\theta, a \in \mathbb{R}$, é uma circunferência com centro no eixo polar e tangente ao eixo $\dfrac{\pi}{2}$;

- Se $a > 0$, o gráfico está a direita do pólo;



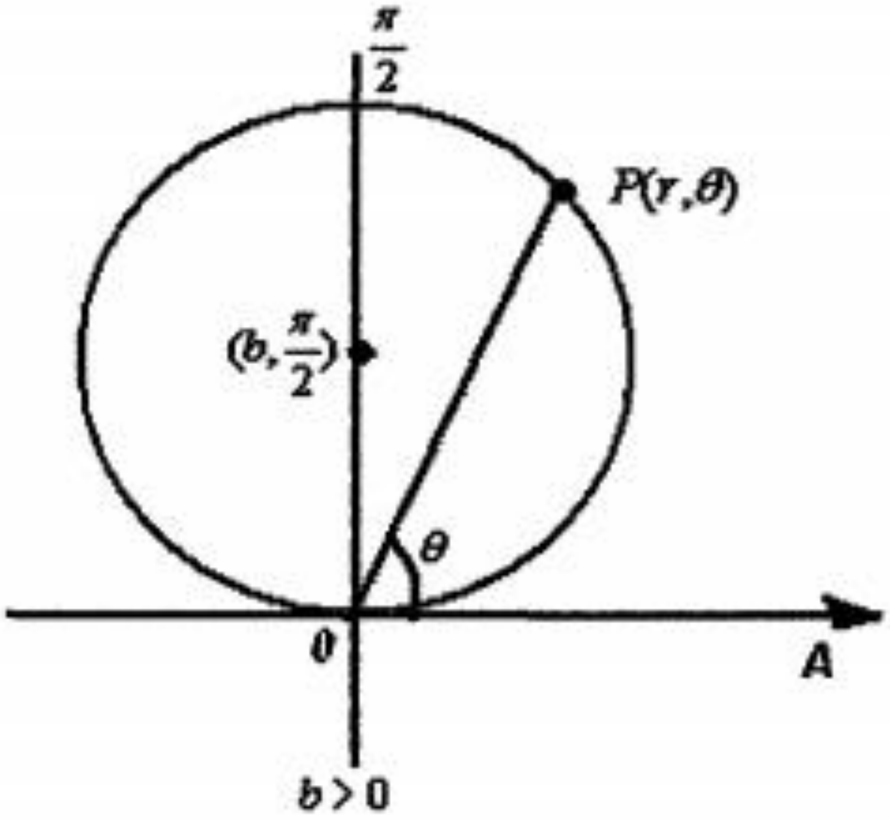
- Se $a < 0$, o gráfico está a esquerda do pólo;

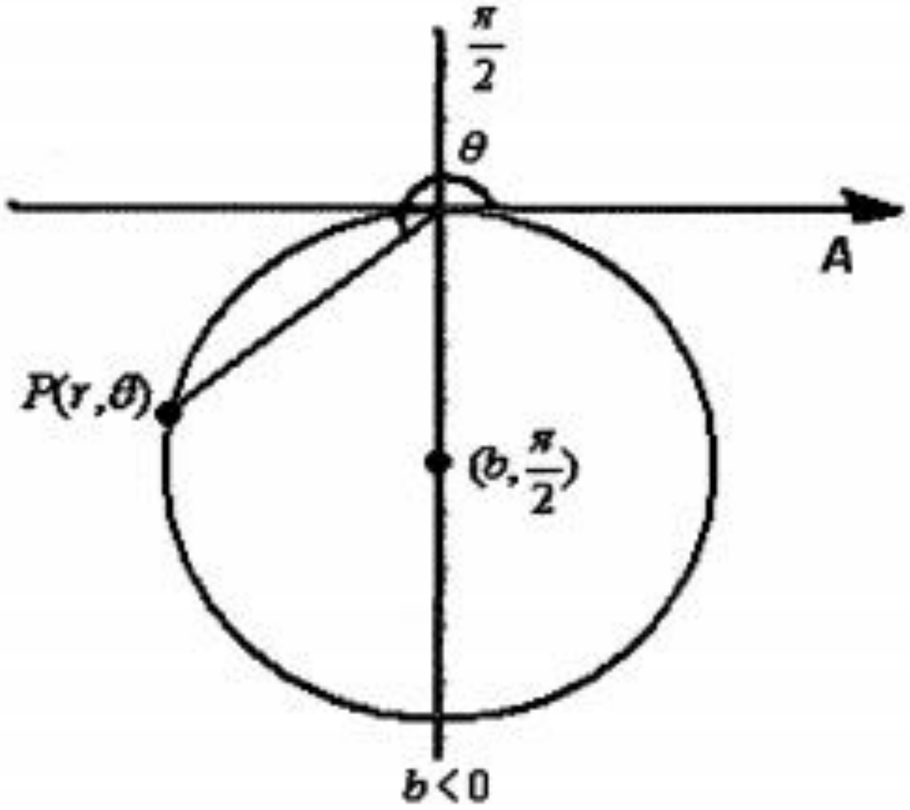


(c) $r = b sen\theta$ é uma circunferência centrada no eixo $\frac{\pi}{2}$ e tangente ao eixo polar.

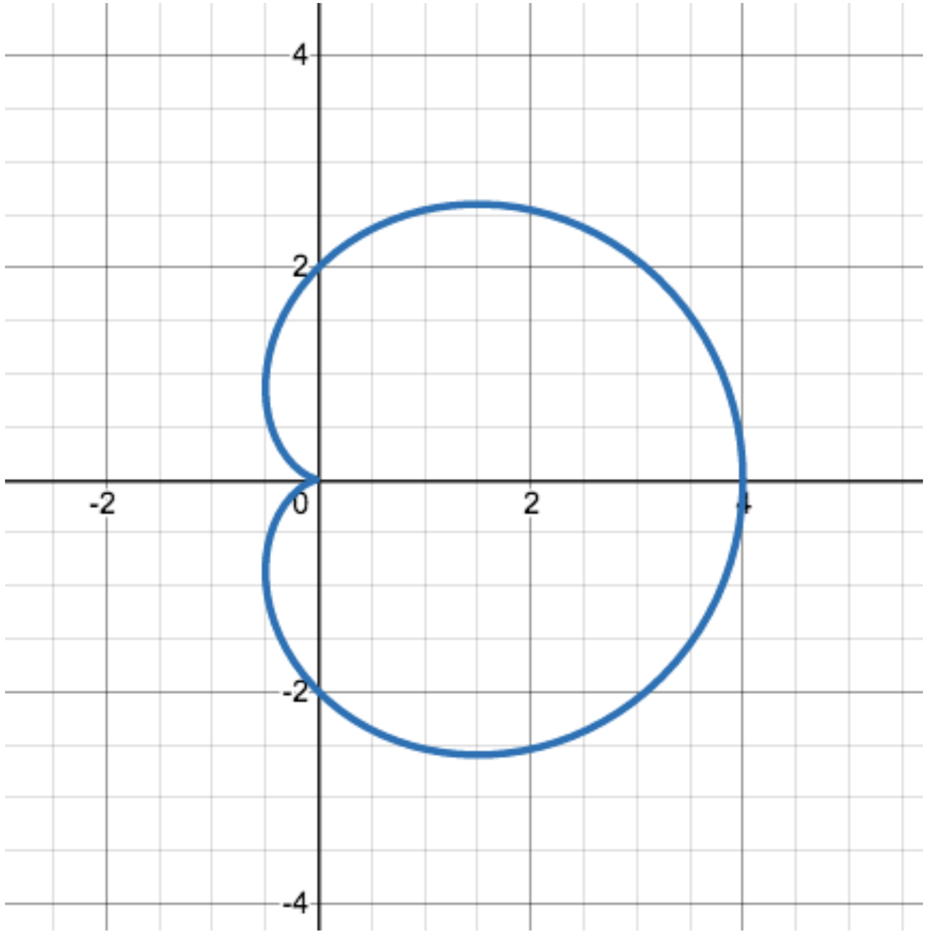
- Se $b > 0$, o gráfico está acima do pólo;

- Se $b < 0$, o gráfico está abaixo do eixo polar;

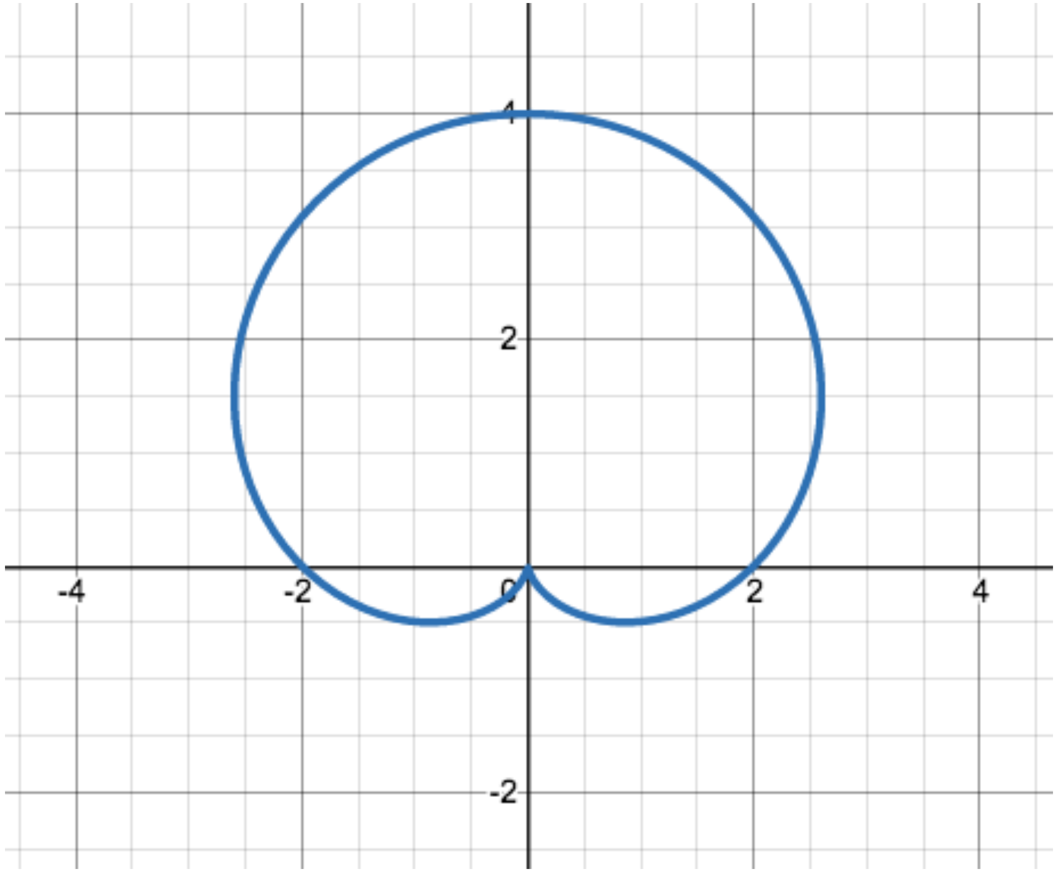




A curva chamada CARDIÓIDE

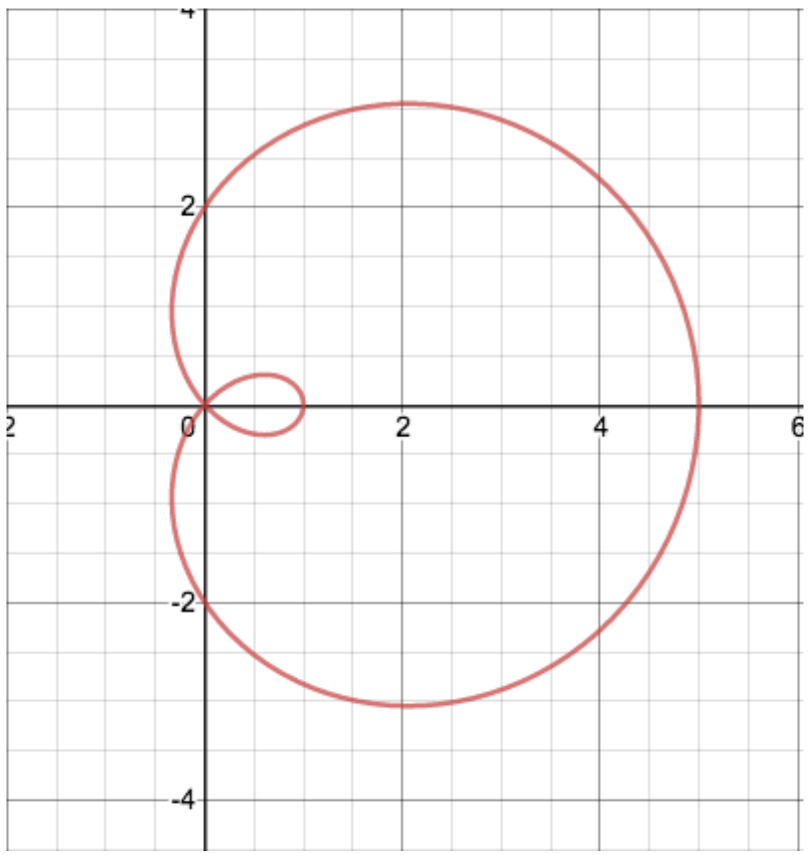


$$r = 2 + 2\cos\theta$$



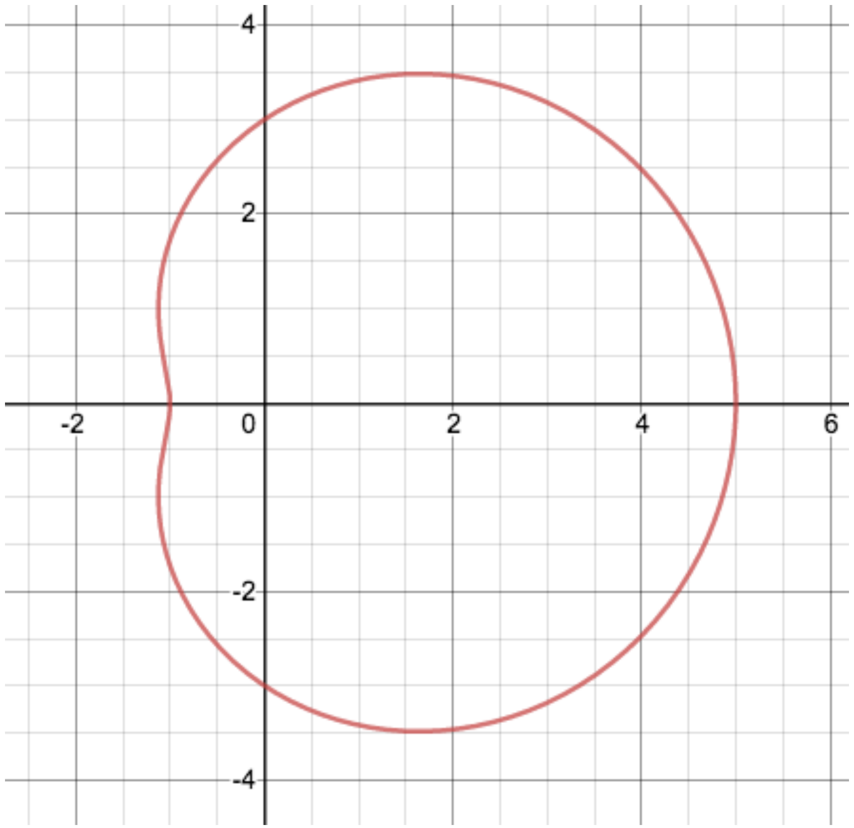
$$r = 2 + 2\sin\theta$$

As curvas chamadas LIMAÇON



$$r = 2 + 3\cos\theta$$

LIMAÇON COM LAÇO



$$r = 3 + 2\cos\theta$$

LIMAÇON SEM LAÇO

No desmos, vamos plotar as equações das rosáceas
$r = \cos(n\,\theta)$ e $r = \text{sen}(n\,\theta)$

EPPA 29. Exercício 16 Lista 3