SMA0300 Geometria Analítica
Aula 6

13/04/2023, quinta-feira

Miriam Manoel

Na aula de hoje…

Método prático para 3 vetores L.I. ou L.D. (continuação: exemplos)

Base ortogonal e base ortonormal

A base canônica de V^3

Matriz de mudança de base

Coordenadas de um vetor em bases distintas

Exemplo 1.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

1. Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$, $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$ são LI ou LD.

Exemplo 2.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

Calcule m para que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E$$

$$\vec{v} = (1, 2, m)_E$$

$$\vec{w} = (1, 1, 1)_E$$

sejam LD.

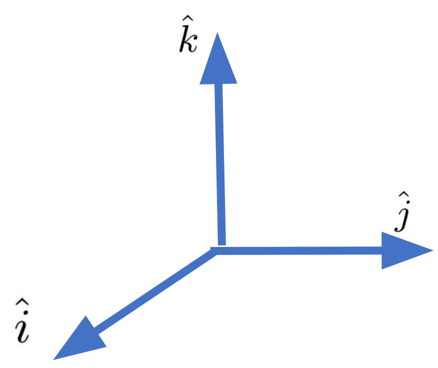
Base ortogonal, base ortonormal, base canônica de V^3

Definição. Uma base de V^3 é chamada **ortogonal** se seus vetores são ortogonais dois a dois.

Definição. Uma base de V^3 é chamada **ortonormal** se seus vetores são ortogonais dois a dois e, além disso, são todos unitários.

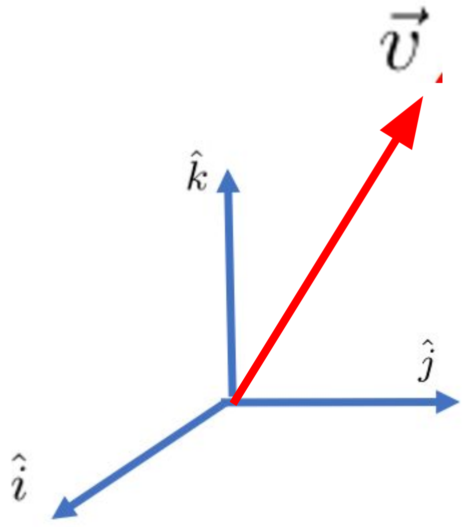
Convencionalmente, chamamos de **base canônica** de V^3 a base ortonormal que é representada nos eixos x, y, z do espaço cartesiano $\mathbf{R}^3$. Esta base é usualmente denotada por

$$C = \left(\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}\right)$$



Note: esta base obedece a "regra da mão direita".

O módulo de um vetor quando dado numa base ortonormal



Faremos na lousa. Veremos que advém diretamente do Teorema de Pitágoras.

Coordenadas de um vetor em bases distintas

Se temos as coordenadas de um dado vetor **numa base E**, como calcular suas coordenadas **numa outra base F**?

Dadas duas bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ de V^3, um vetor $\vec{v}$ de V^3 têm coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ na base E e coordenadas $(y_1, y_2, y_3)_F$ na base F.

Qual a relação entre as duas ternas de coordenadas deste vetor $\vec{v}$?

Começamos construindo uma **matriz de mudança da base E para a base F**:

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

A matriz de mudança de base, da base E para a base F é

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 + y_3 \vec{f}_3$$

$$= y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_1 + a_{31}\vec{e}_3) + y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3)$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3$$

$$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Pela unicidade das coordenadas, temos

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \quad + a_{23}y_3$$

$$x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \quad + a_{33}y_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F$$

Escrevendo as equações na forma matricial, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{f_1} & \vec{f_2} & \vec{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F .$$

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}_F$$

Vetor na base E
(base velha)

Matiz de mudança
da base E
para a base F

Vetor na base F
(base nova)

se de matriz de mudança
E para base F.

Exemplo

Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base de V^3, tome

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$$

(a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3.

(b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{v} = (1,1,1)_E$ na base F.

Propriedades das matrizes de mudança de base

(1) $$M_{EE} = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E \xrightarrow{\text{Id}} E$$

(2) $$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "M"] & F \arrow[l, shift left, "M^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(3) $$M_{EF} \cdot M_{FG} = M_{EG}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & F \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Faremos mais exemplos até o final da aula.