Aula 20 SMA0300 GA

Miriam Manoel

ICMC/USP, São Carlos - SP

Quinta-feira, 01 de junho de 2023

Aula de hoje.

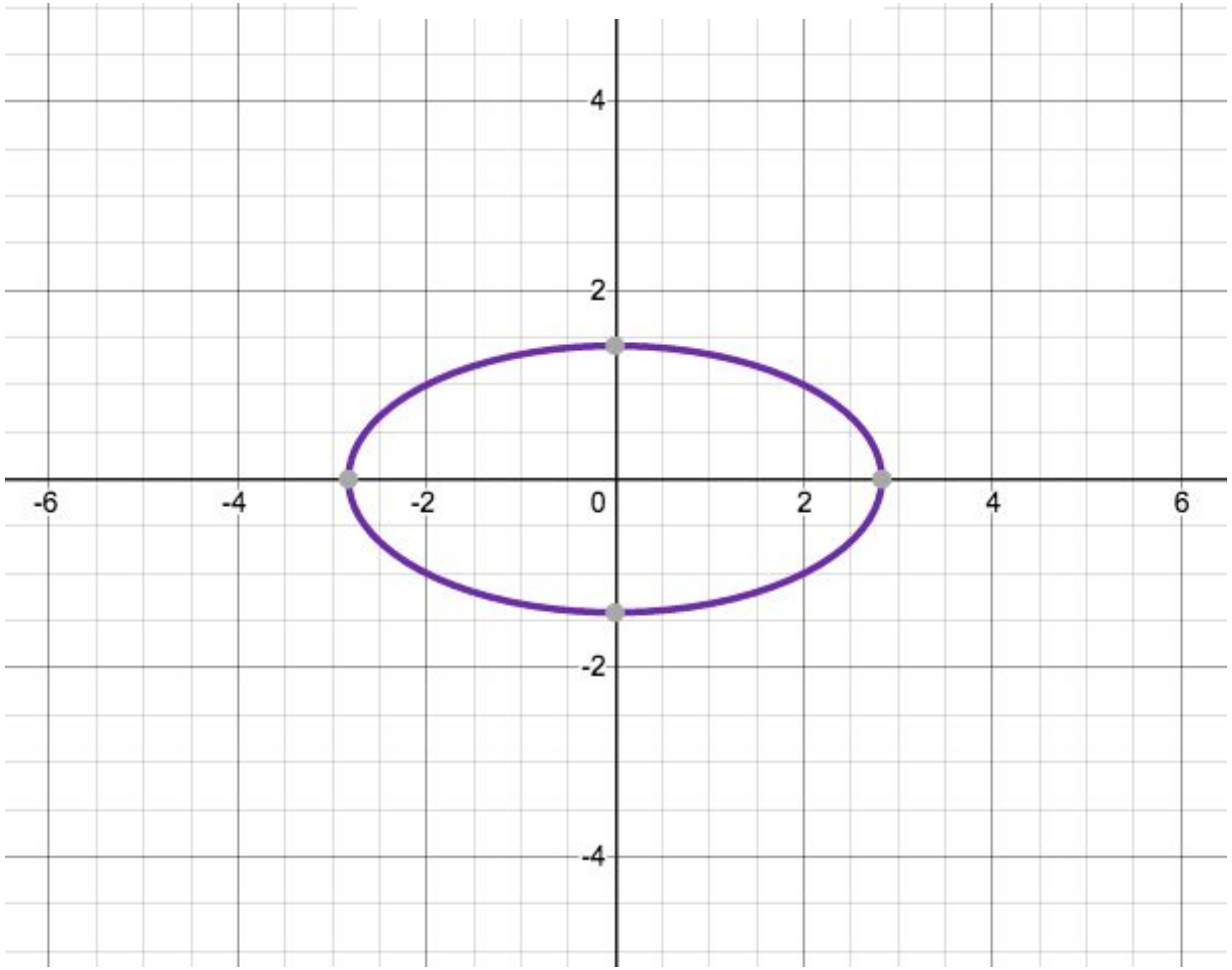
Cônicas – parte 2

- Exemplos para os nove tipos de cônicas
- Translação do sistema de coordenadas

No que segue, veremos com exemplos todos os tipos possíveis de cônicas.nove

Exemplo 1.

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

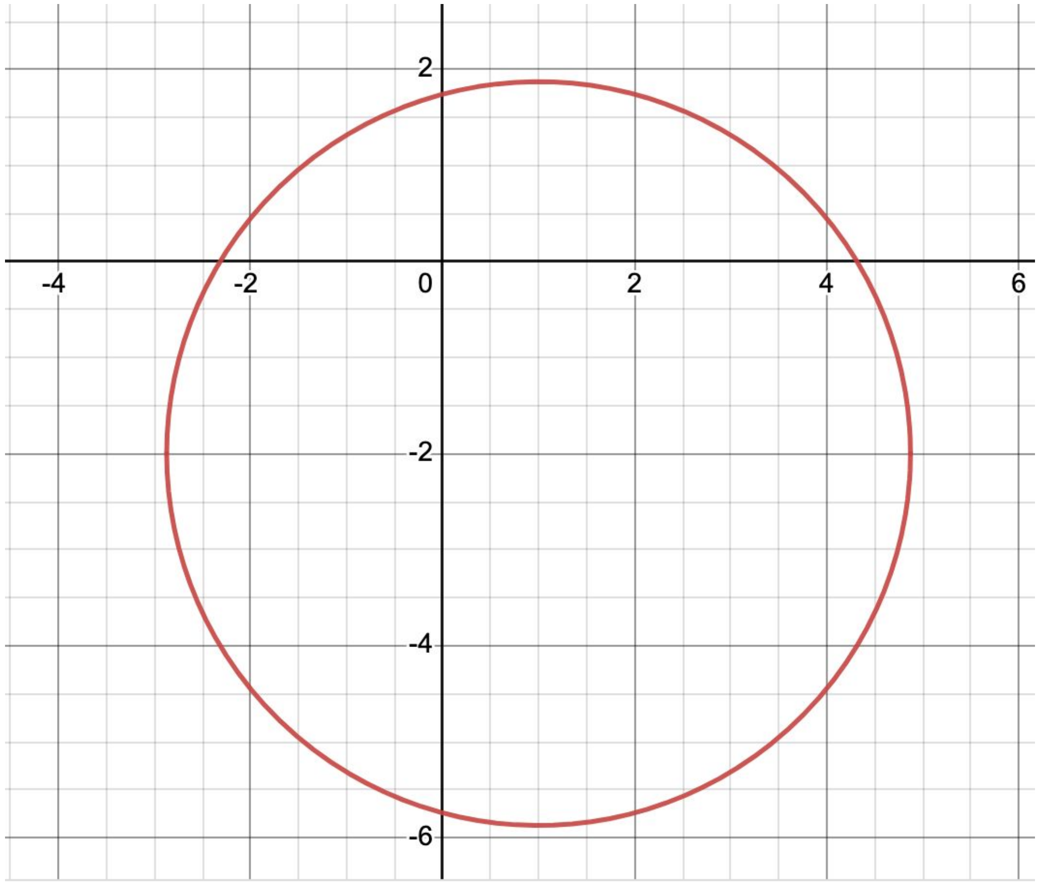


elipse

Exemplo 2.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 = 0$$

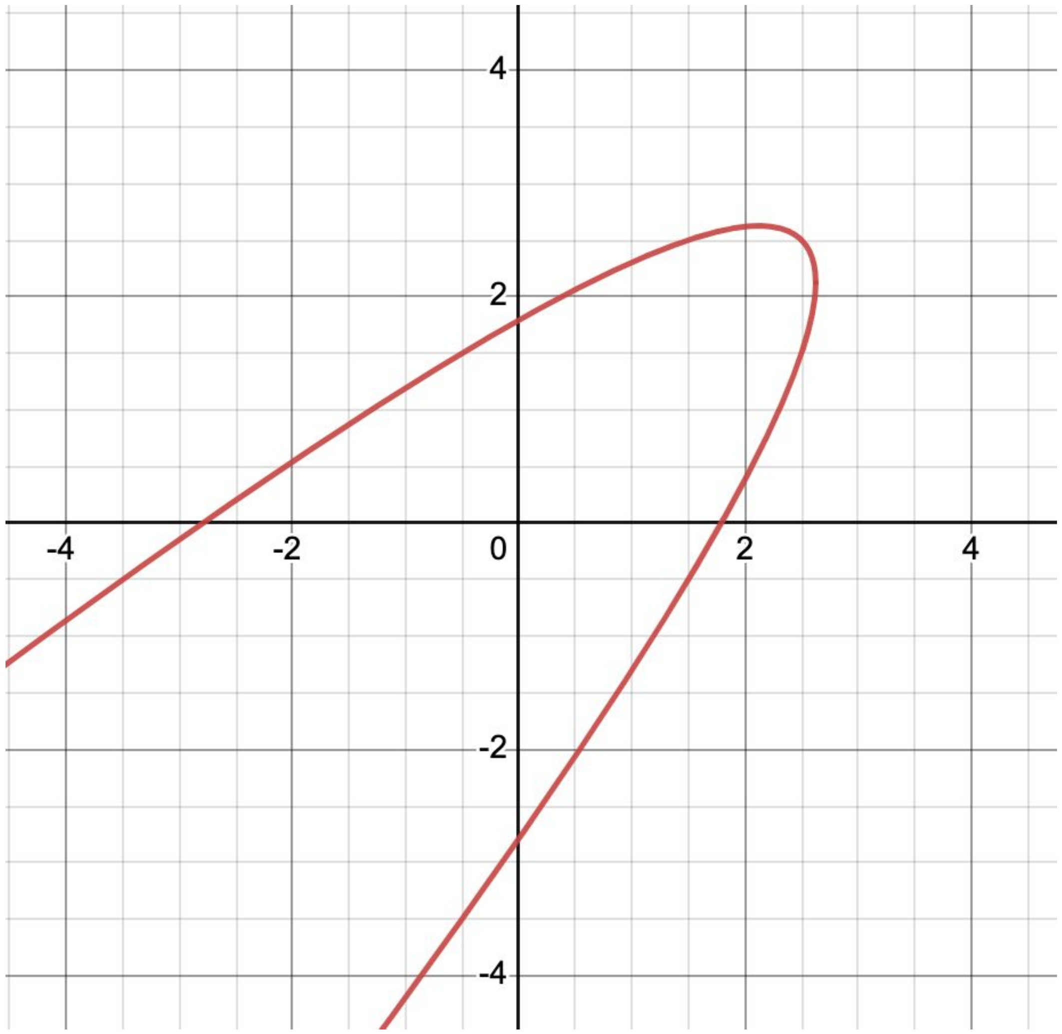
Complete quadrados para reconhecer que é uma circunferência.



circunferência

Exemplo 3.

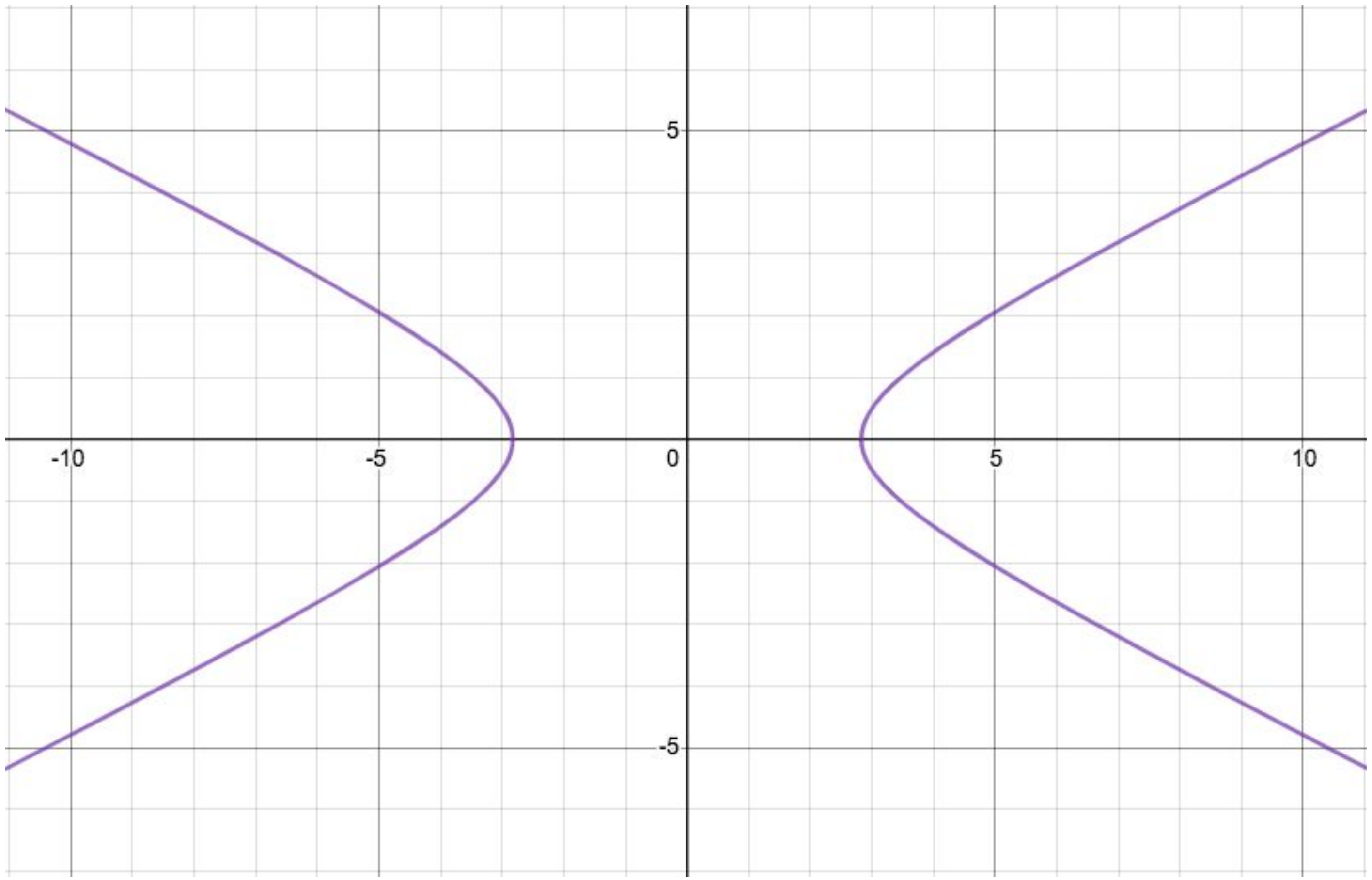
$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 5 = 0$$



parábola

Exemplo 4.

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$$

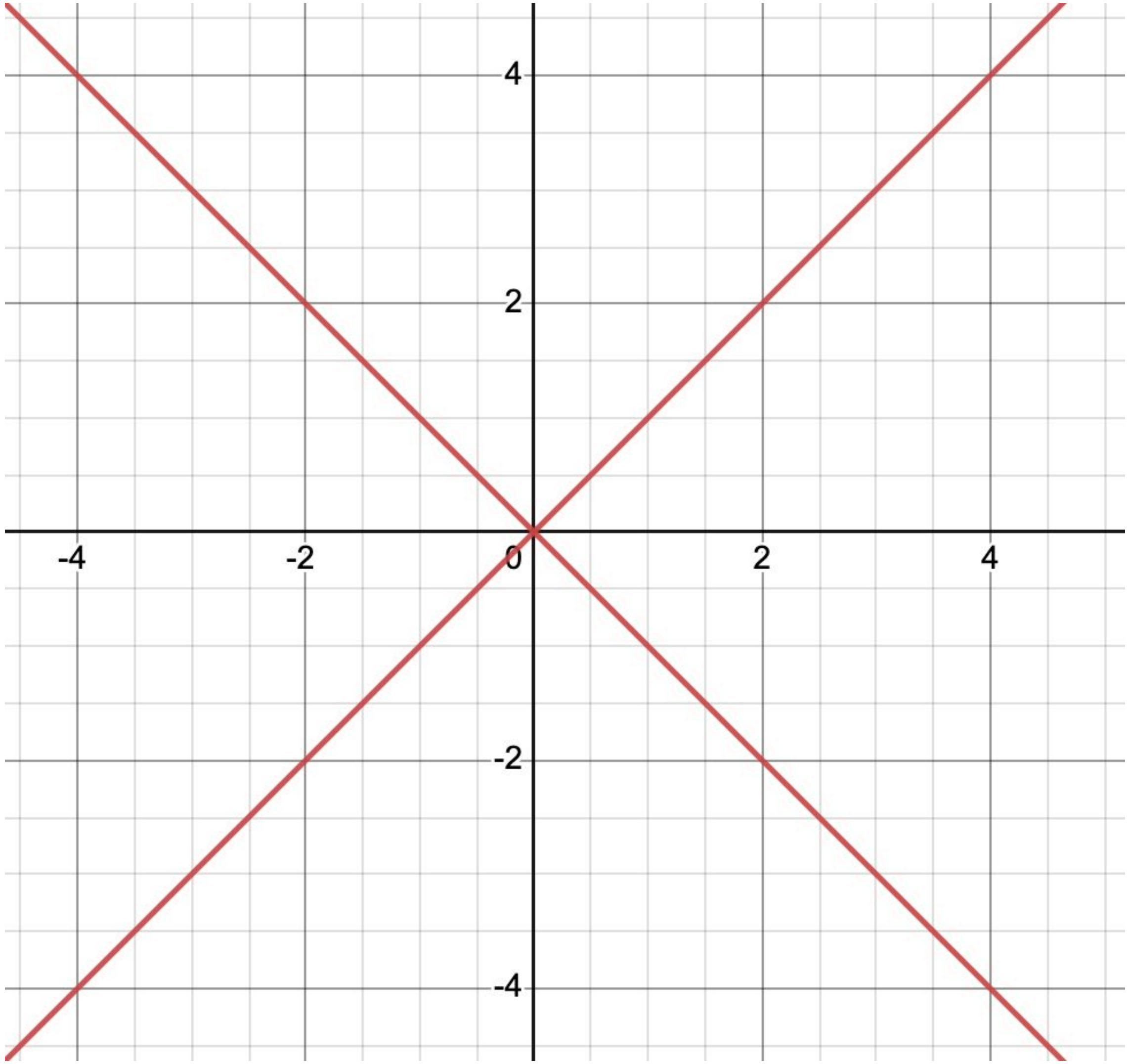


hipérbole

Exemplo 5.

$$x^2 - y^2 = 0$$

Fatore a expressão do lado esquerdo para reconhecer que são duas retas concorrentes.



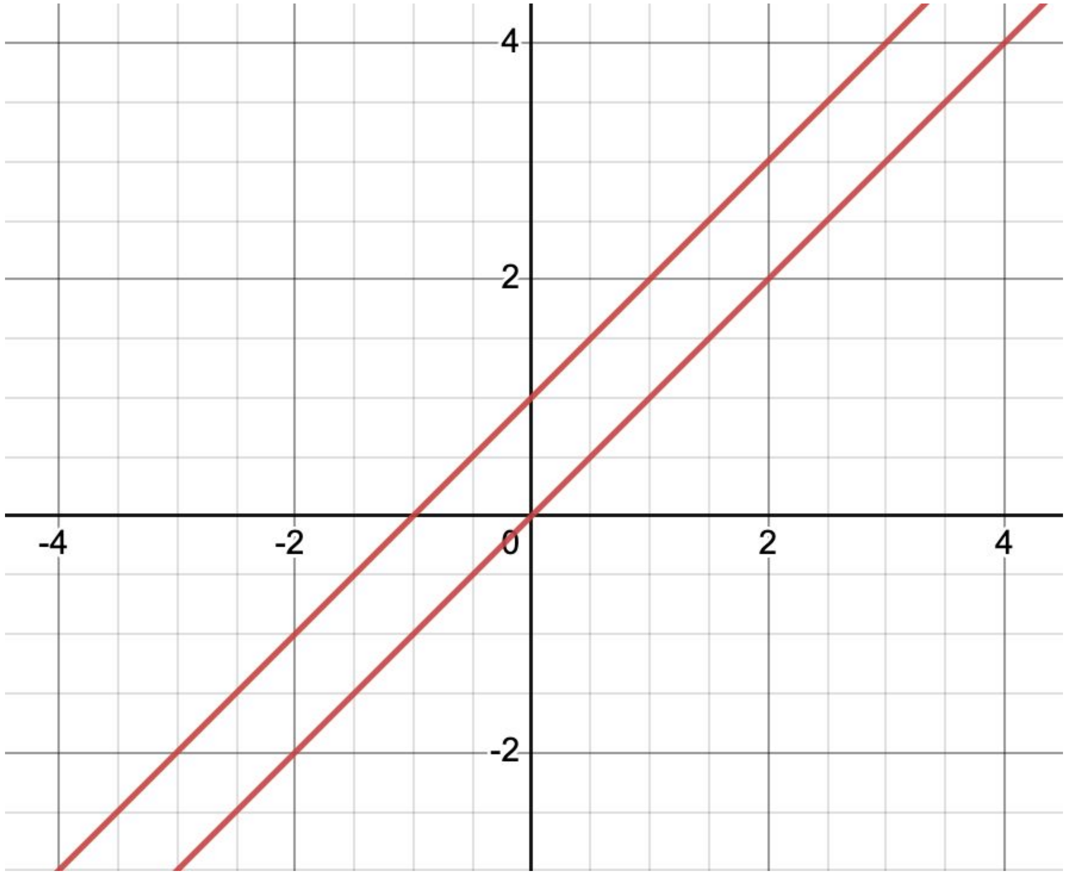
duas retas concorrentes

Exemplo 6.

$$x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0$$

Fatore a expressão do lado esquerdo para reconhecer que são duas retas concorrentes:

$$(x - y)(x - y + 1) = 0$$



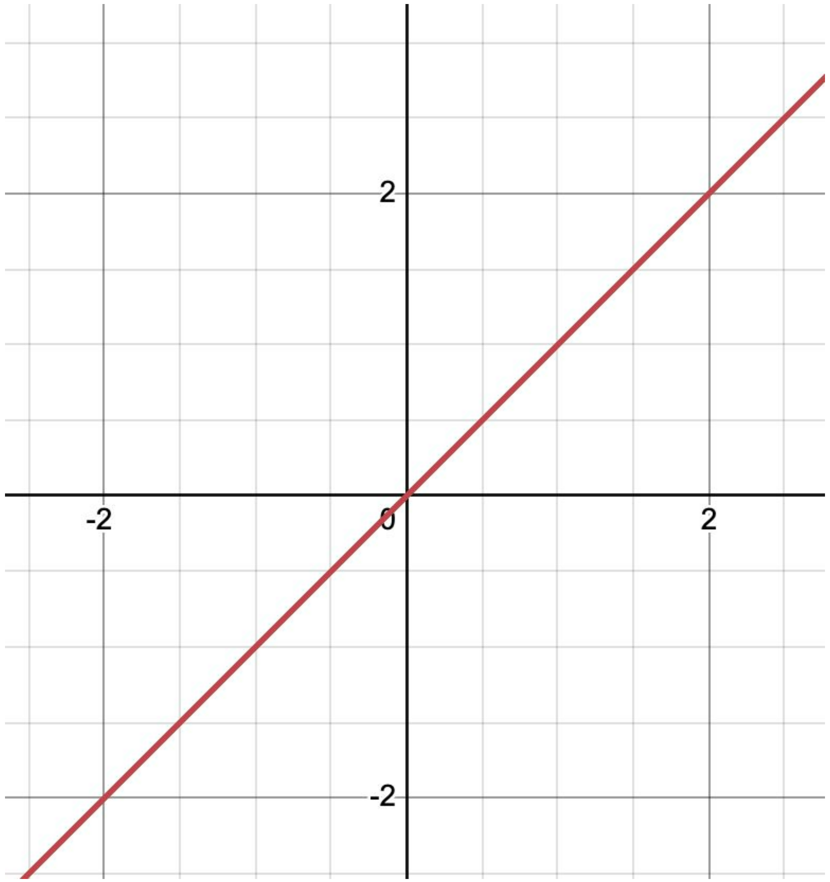
duas retas paralelas

Exemplo 7.

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

Complete quadrados para reconhecer que é uma reta:

$$(x-y)^2 = 0$$



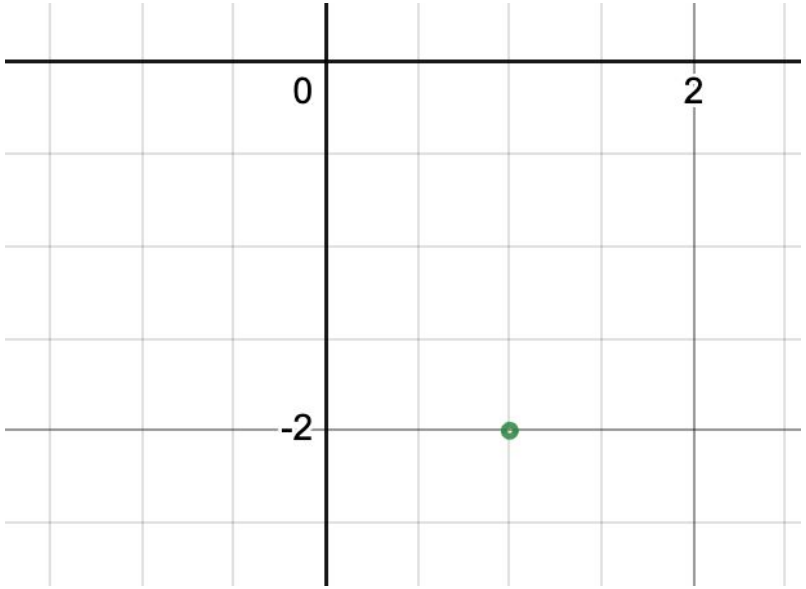
reta

Exemplo 8.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

Complete quadrados para reconhecer que é um ponto.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$



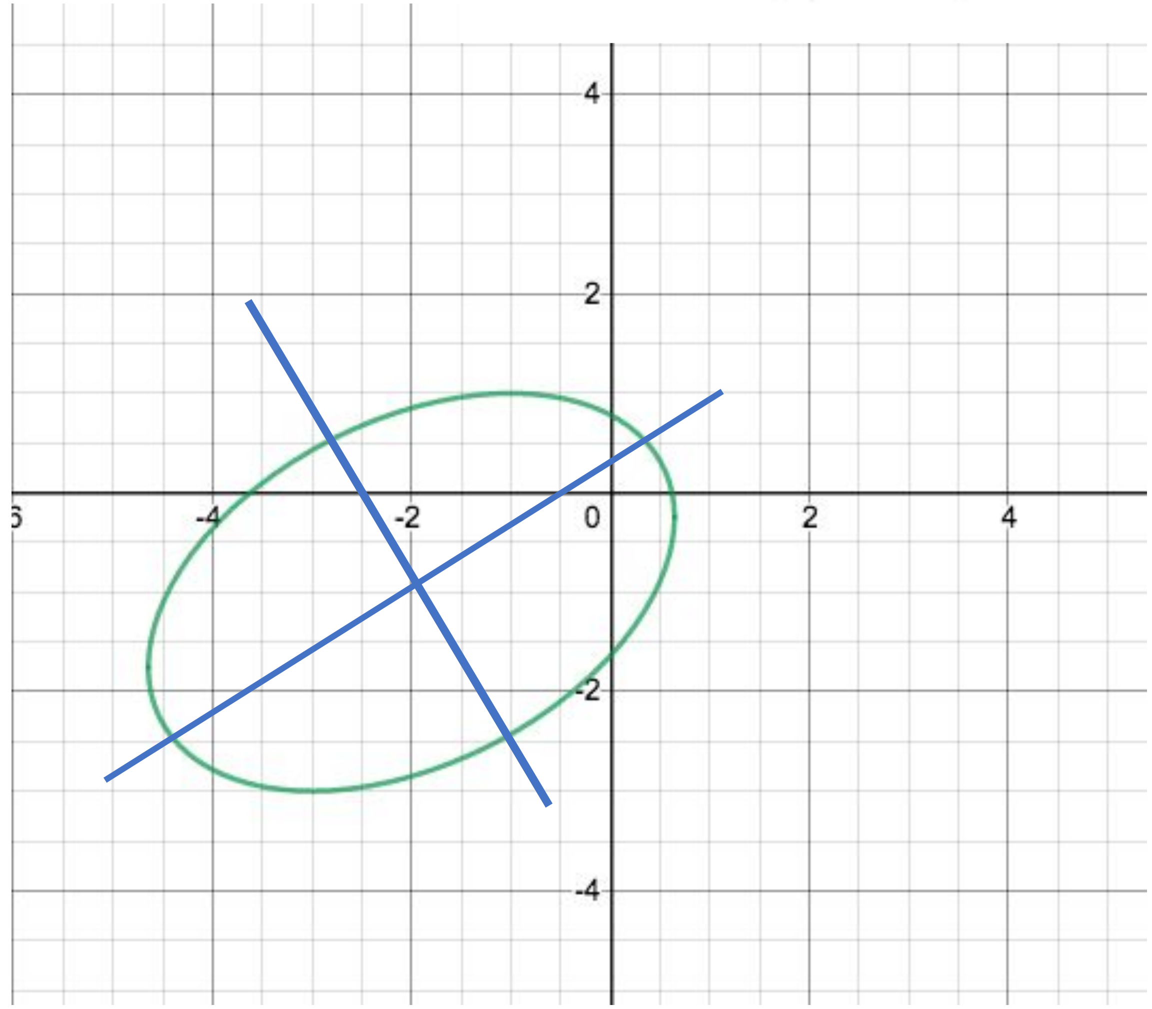
ponto

Exemplo 9. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$

conjunto vazio

Complete quadrados
para reconhecer que
é o vazio.

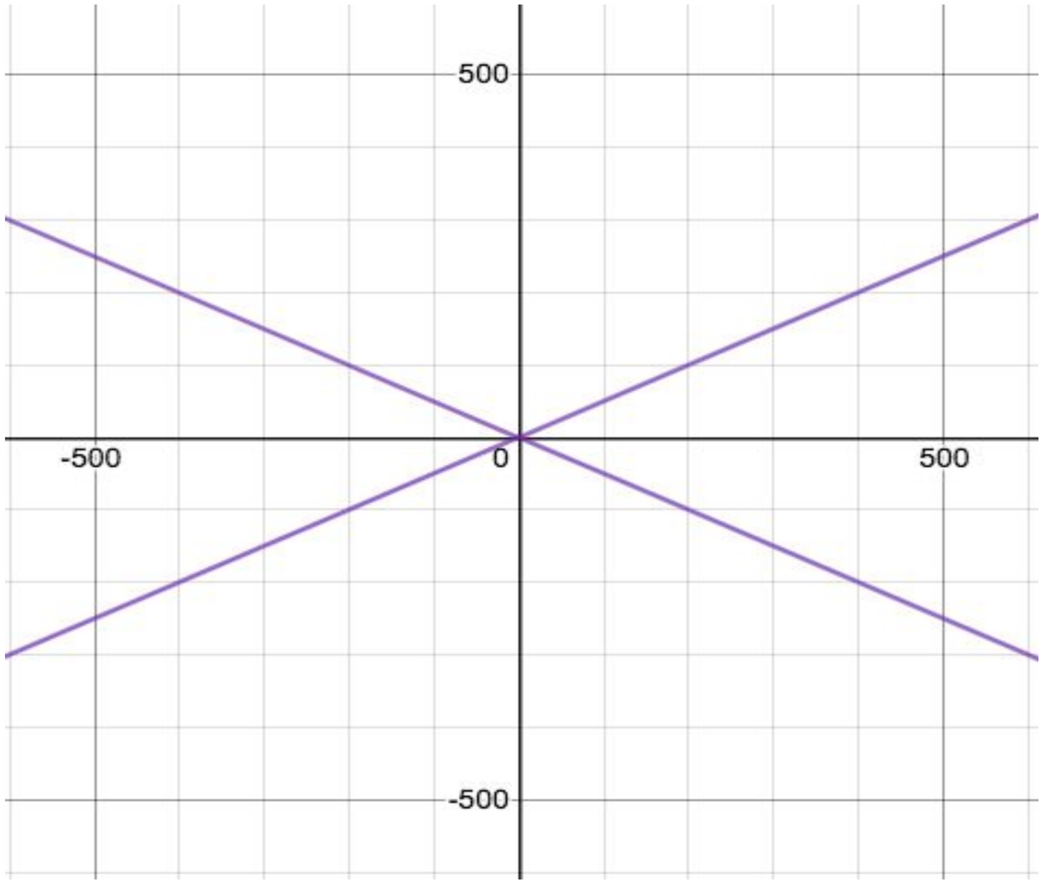
Consideremos agora a equação: $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$



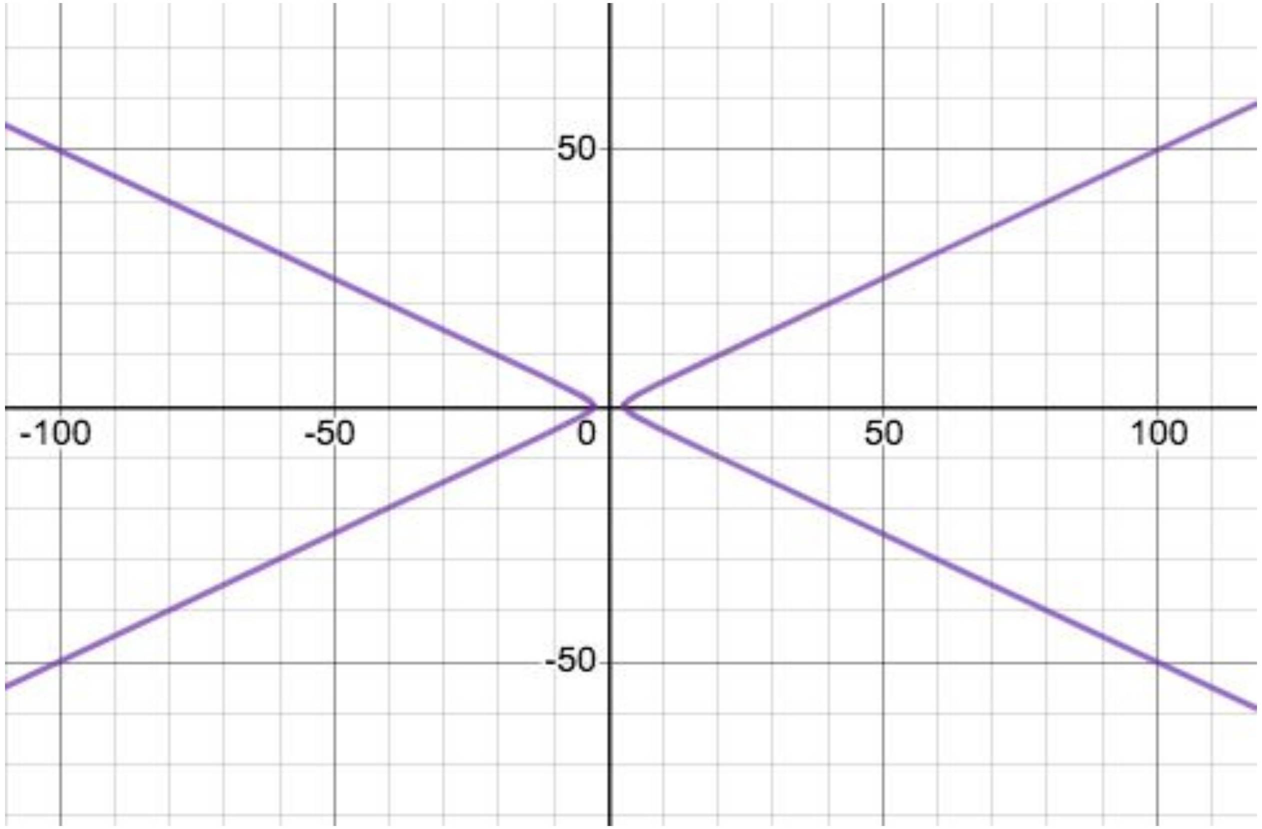
Como reconhecer que esta equação é de fato de uma elipse?

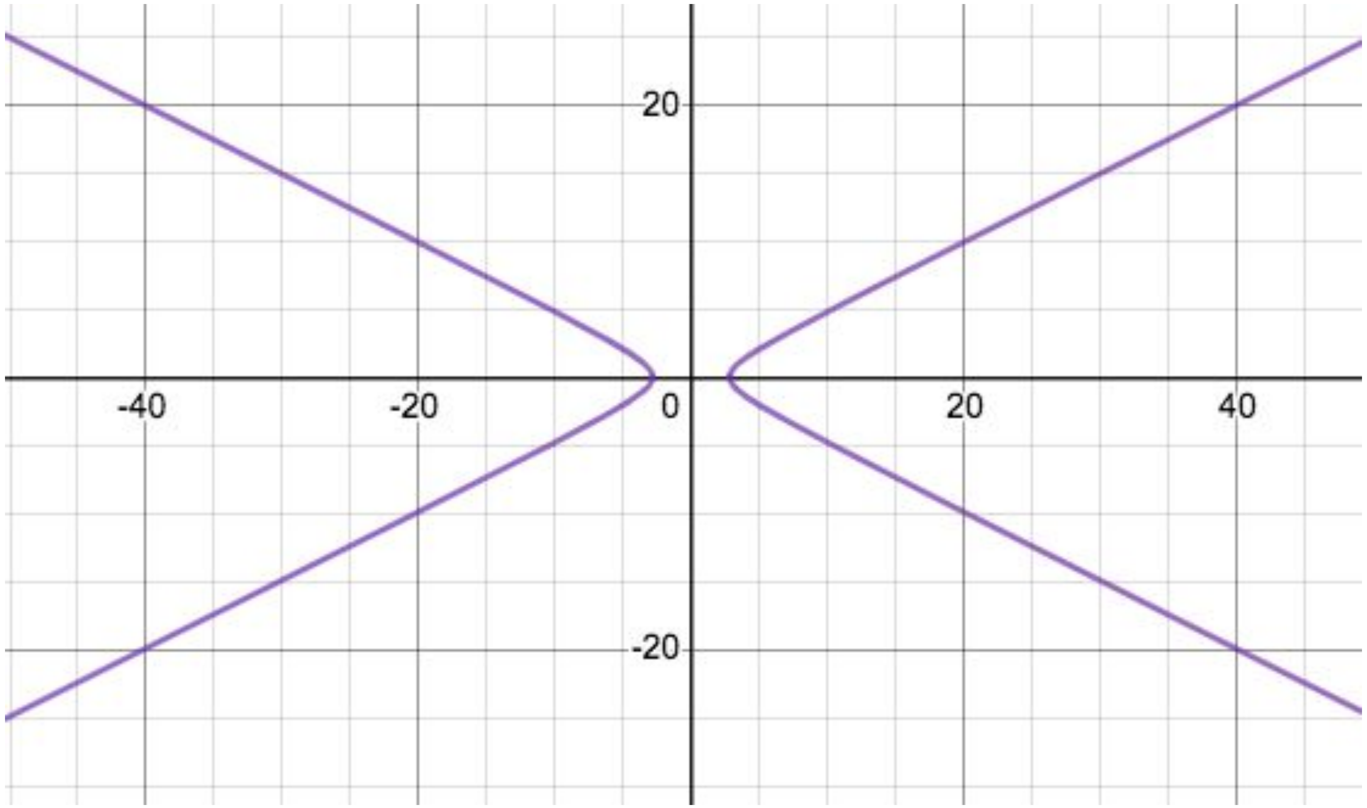
Ou, mais geralmente, dada uma equação polinomial de grau 2 em duas variáveis (x,y), como reconhecer qual é a cônica?

Por exemplo:

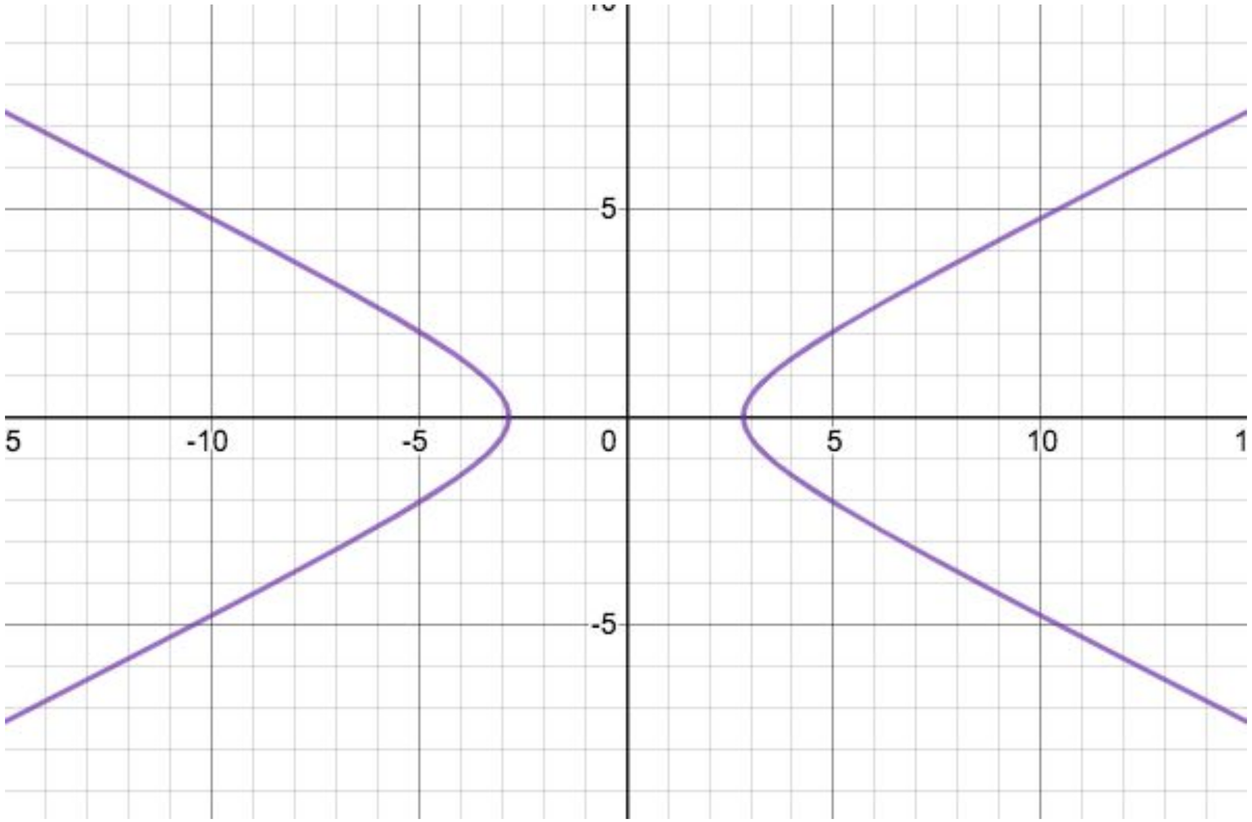


Vejamos esta mesma curva numa sequência de figuras mas em outras escalas:


50
-50
-100
-50
0
50
100

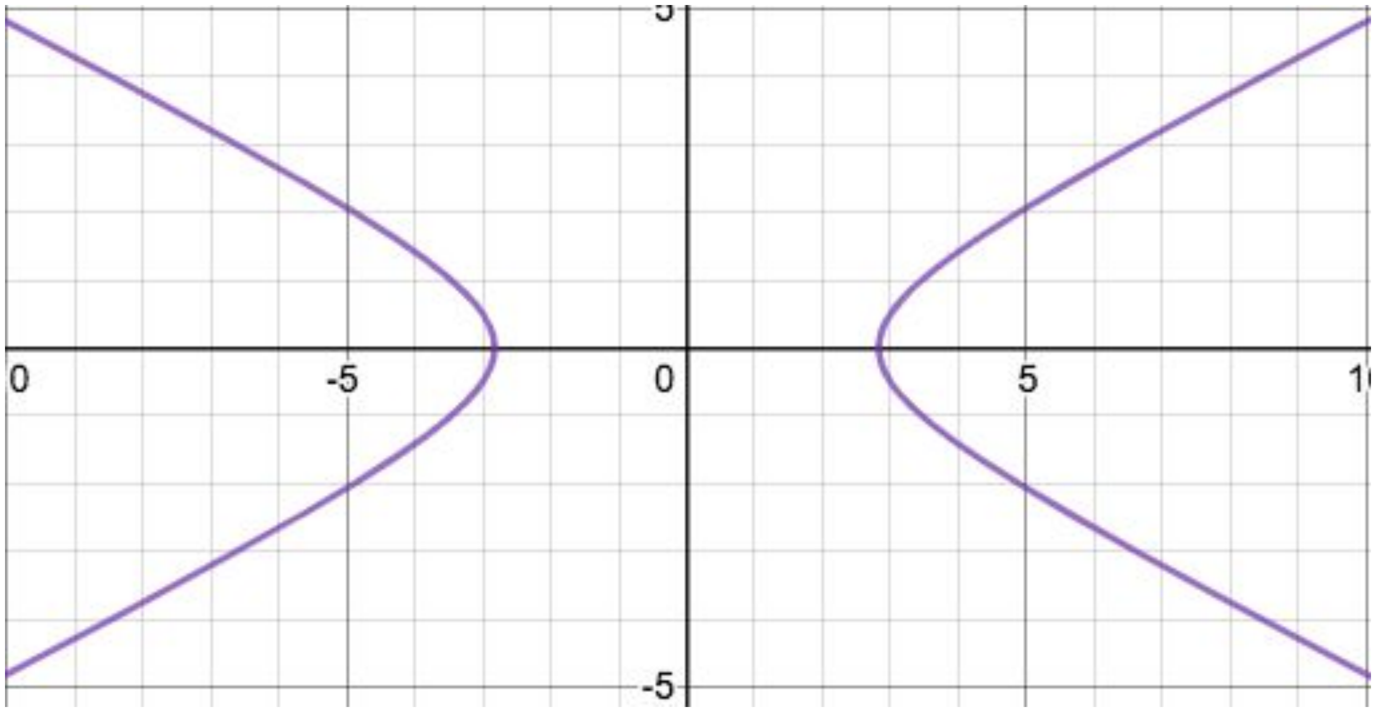


20
-40
-20
0
20
40
-20



5
-10
-5
0
5
10
1
5
-5

Notemos que a primeira figura, aparentemente de duas retas concorrentes, é de fato uma hipérbole:



$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$$

Estudo algébrico de uma cônica.

A técnica usada é mudança de coordenadas, passando do sistema inicial - no qual a equação da curva é mais complicada - para um novo sistema de coordenadas, no qual a equação desta mesma curva é a mais simples possível.

As mudanças de coordenadas que fazemos são:

translação

e

rotação

do sistema de coordenadas inicial.

Com a **translação**, passamos para um novo sistema de coordenadas no qual a nova equação **não tem os termos de grau 1**.

Com uma **rotação**, passamos para um novo sistema de coordenadas no qual a nova equação **não tem o termo misto**.

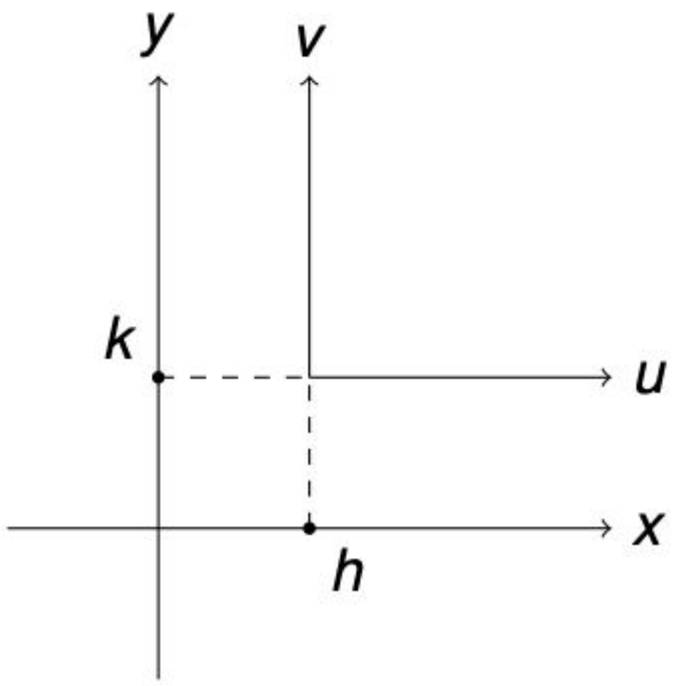
Esses dois passos finalizam o processo, chegando na forma algébrica mais simples possível de uma cônica.

Lembremos que a equação mais geral possível das cônicas é

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Translação do sistema de coordenadas

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$



Consiste da troca da origem do sistema para o ponto

O' = (h, k)

mantendo-se os vetores da base.

Objetivo: eliminar os termos de grau 1 na nova equação de uma cônica.

Vamos estudar os efeitos da translação no polinômio $g(x,y)$.

$$a(u+h)^2+b(v+k)(u+h)+c(v+k)^2+d(u+h)+e(v+k)+f =$$

$$= au^2+buv+cv^2+(2ah+bk+d)u+(bh+2ck+e)v +$$

$$ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f =$$

$$= au^2+buv+cv^2+(2ah+bk+d)u+(bh+2ck+e)v+g(h,k).$$

Queremos eliminar os termos lineares em $\bar{g}$, para isso vamos procurar h e k tais que

$$\begin{cases} 2ah+bk+d=0 \\ bh+2ck+e=0 \end{cases}$$

Temos um sistema linear de duas equações a duas incógnitas h e k.

Com (h,k) obtidos resolvendo-se o sistema linear, quando este sistema é possível (SPD ou SPI), a nova equação fica

$$\boxed{au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0}$$

Exemplo 1. Usando uma translação, transformar a equação

$$x^2 + y^2 - 6x - 5y + 14 = 0$$

de modo que no novo sistema a nova equação desta cônica não tenha os termos lineares.

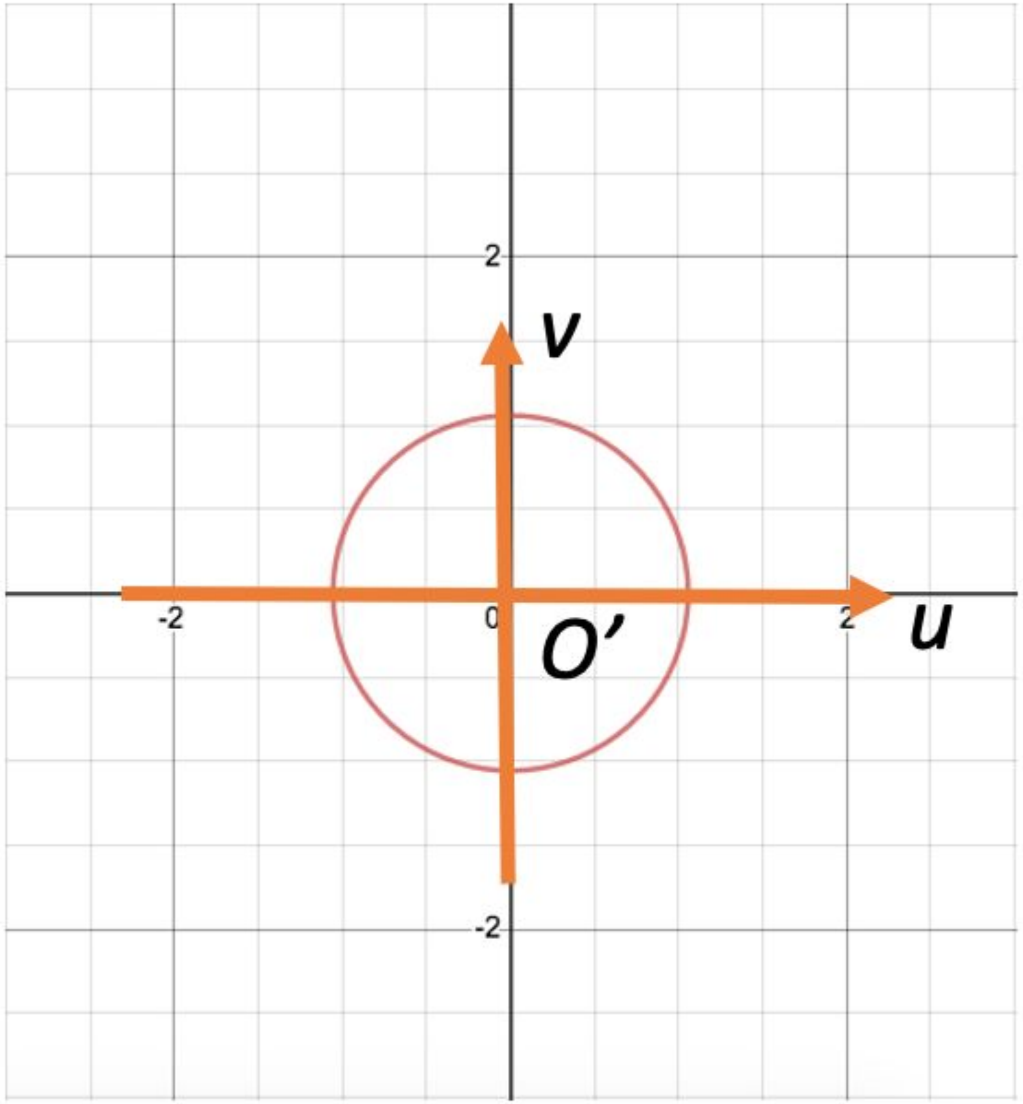
Resolução:

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2h + 0k - 6 = 0 \\ 0h + 2k - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} h = 3 \\ k = 5/2 \end{matrix}$$

$$g\left(3, \frac{5}{2}\right) = 9 + \frac{25}{4} - 18 - \frac{25}{2} + 14 = -\frac{5}{4}$$

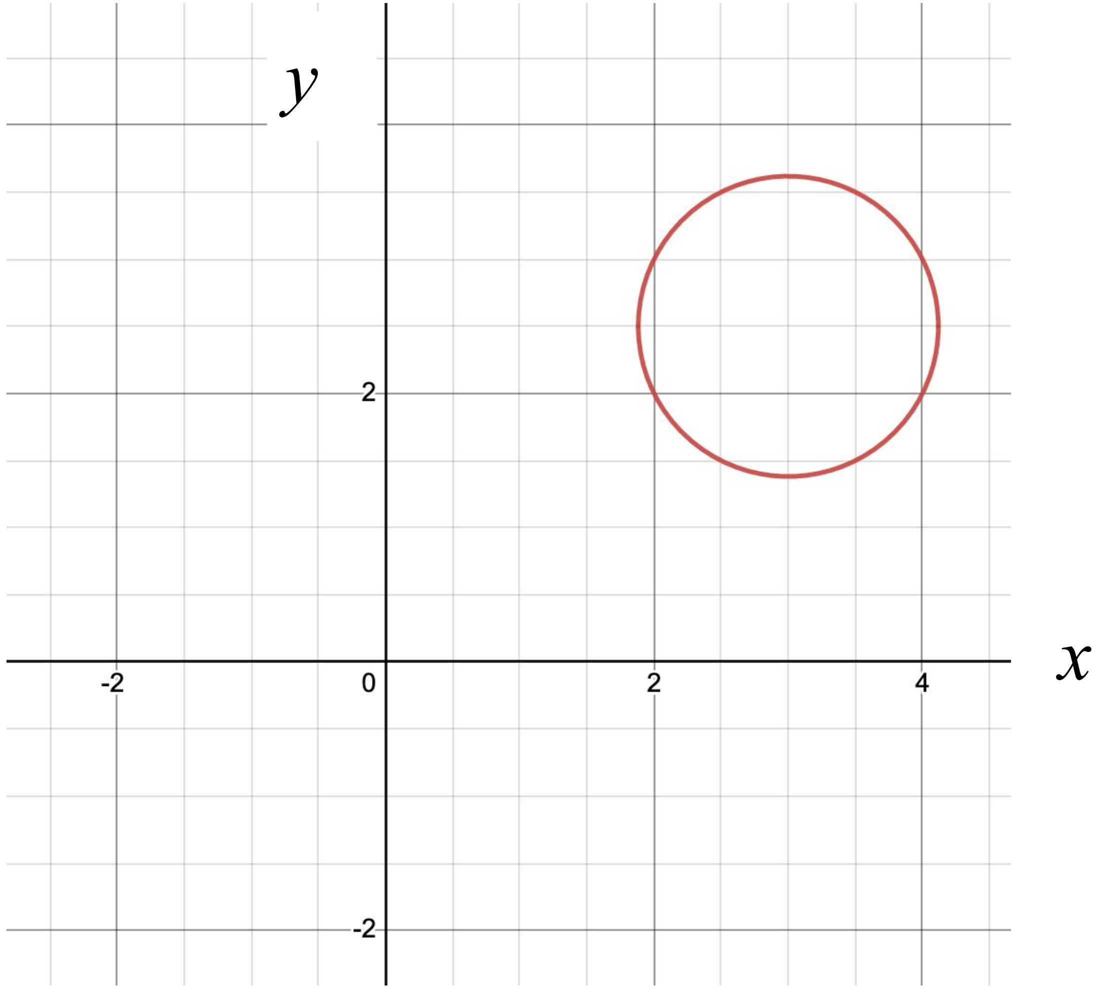
$$u^2 + v^2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$u^2 + v^2 - \frac{5}{4} = 0 \qquad \text{ou} \qquad u^2 + v^2 = \frac{5}{4}$$



Retomando a equação inicial, nas variáveis x,y (em azul na figura), e seu esboço no sistema inicial:

$$x^2 + y^2 - 6x - 5y + 14 = 0$$



Exemplo 2. (a) Usando as fórmulas da translação, transformar a equação

$$x^2 - y^2 + 2x - 6y - 9 = 0$$

de modo que no novo sistema a nova equação desta cônica não tenha os termos lineares.

(b) Completando quadrados, transformar a mesma equação acima com o mesmo objetivo (eliminar os termos lineares).