SMA0300 Geometria Analítica
Aula 18

25/05/203, quinta-feira

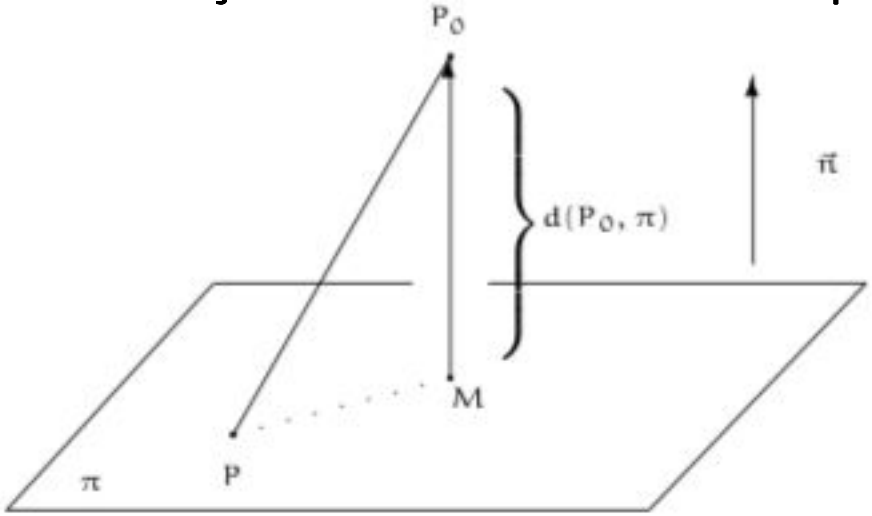
Miriam Manoel

Aula de hoje

Distância:
Distância entre ponto e plano
Distância entre dois planos
Distância entre reta e plano

Distância entre ponto e plano

Basta observar que esta distância é o comprimento da projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{PP_0}$ na direção do vetor normal do plano:



$$proj_{\vec{n}} P\vec{P}_0 = \frac{P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}}{||\vec{n}||^2}\, \vec{n}$$

$$d(P_0, \pi) = ||proj_{\vec{n}} P\vec{P}_0|| = \frac{|\, P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}\, |}{||\vec{n}||^2} ||\vec{n}|| = \frac{|\, P\vec{P}_0 \cdot \vec{n}\, |}{||\vec{n}||}$$

Agora passemos para coordenadas:

Em coordenadas:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

$$P_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$$

$$d(P_o, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PP_o} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|},$$

Logo, a distância do ponto $P_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$ ao plano π é

$$\boxed{d(P_o, \pi) = \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo. Calcular a distância do ponto $P_0 = (1, 2, -1)$ ao plano $\pi : 3x - 4y - 5z + 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
d(P_o, \pi) &= \frac{|a\,x_o + b\,y_o + c\,z_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{50}\, \text{u.c.}\,.
\end{aligned}
$$

Portanto a distância do ponto $\underline{P_o}$ ao plano $\underline{\pi}$ será igual à $\dfrac{\sqrt{50}}{50}$ u.c. (unidades de comprimento).

Distância entre dois planos

Basta analisar o caso em que os planos são paralelos (caso contrário, esta distância é zero).

Este caso se reduz ao cálculo da distância de um ponto de um plano ao outro plano.

$$\pi_1 : a\,x + b\,y + c\,z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a\,x + b\,y + c\,z + d_2 = 0$$

Distância de um ponto $P_0 = (x_0 , y_0 , z_0)$ do plano π_1 ao plano π_2 :

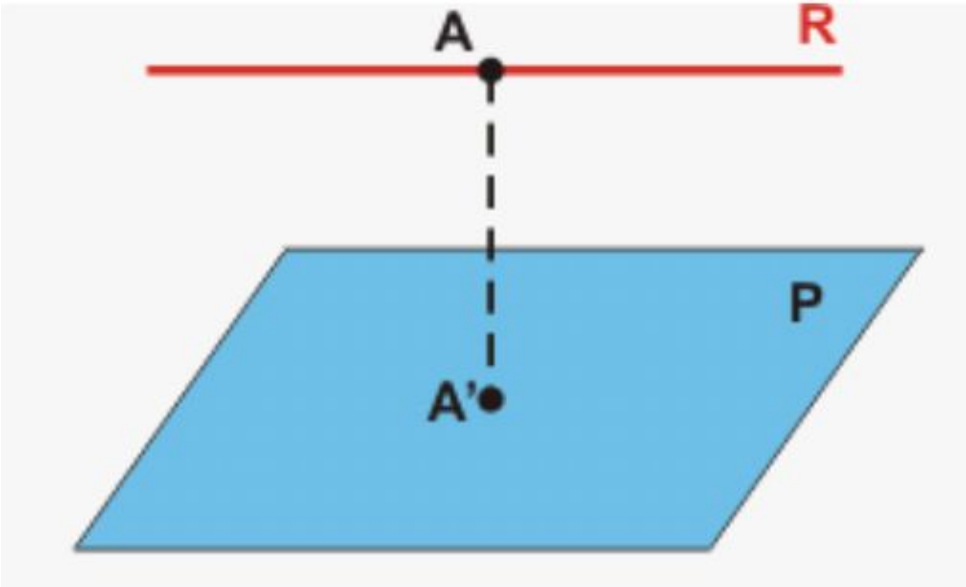
$$d(P_o, \pi_2) = \frac{|a x_o + b y_o + c z_o + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \boxed{= \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Distância entre reta e plano

Basta analisar o caso em que a reta é paralela ao plano (caso contrário, esta distância é zero).

E este caso recai no caso anterior, calculando-se a distância de um ponto qualquer desta reta ao plano.



Distância entre duas retas

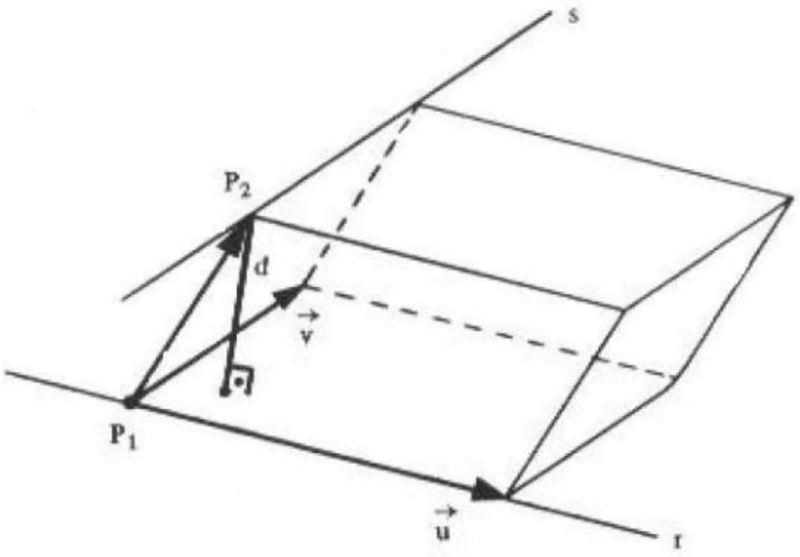
- Se são coincidentes ou concorrentes: a distância é igual a zero.

- Se são paralelas: a distância é igual à distância de um ponto qualquer de uma à outra. E este caso já foi estudado.

- Se são reversas: é a medida da perpendicular comum. Neste caso, pode ser calculada como a altura de um paralelepípedo que tem arestas apoiadas sobre as retas.

reta r $\begin{cases} P_1(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}=(a_1, b_1, c_1) \end{cases}$

reta s $\begin{cases} P_2\,(x_2, y_2, z_2) \\ \vec{v}=(a_2, b_2, c_2) \end{cases}$



$$\boxed{d(r, s) = \frac{|\ [\vec{P_1P_2}, \vec{u}, \vec{v}]\ |}{||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}}$$

Exercício 1. Quais são os dois planos π_1 e π_2 paralelos a $\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$ que distam 2 unidades de π? Dê a resposta apresentando a equação geral para cada um.

Exercício 2 *Determinar a distância da reta* r *ao plano* π

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$\pi : x - 2y - z - 1 = 0 .$$

Exercício 3

Encontrar uma equação geral do plano π *que contém* A, B *e que dista* ... *reta* r,

$$A = (1,1,-1) \quad e \quad B = (2,1,1)$$

$$r : (x,y,z) = (1,0,2) + \lambda\ (1,0,2), \quad para\ \lambda \in \mathbb{R}.$$